

OPTIMISATION DE L'ORGANISATION DE SERVICES D'URGENCES HOSPITALIÈRES

Proposition de sujet de thèse (mathématiques appliquées).

1. CONTEXTE

Ce sujet de thèse s'appuie sur une collaboration entre des chercheurs d'une équipe d'optimisation de l'INRIA (Tropical, INRIA Saclay – Ile-de-France, commune au CMAP, École polytechnique, CNRS) et des personnels soignants urgentistes de l'AP-HP, dans le cadre du laboratoire commun "Bernoulli" INRIA-AP-HP, avec la participation d'une fédération regroupant une vingtaine de services d'urgences de la région parisienne.

Ce travail est motivé par la congestion chronique observée dans les services d'accueil des urgences, en raison de la hausse de la fréquentation depuis 10 ans. L'enjeu est de développer des modèles mathématiques de ces services, suffisamment génériques pour prendre en compte différentes spécificités (taille du service, caractéristiques de la population, etc.), pouvant ensuite être utilisées pour proposer des recommandations de dimensionnement des ressources (médecins, infirmiers, locaux, matériels) mais aussi de comparer différentes organisations envisagées par les urgentistes.

2. MÉTHODES

On s'appuiera sur des modèles de systèmes à événements discrets, et notamment de réseaux de Petri, qui peuvent être représentés par des systèmes dynamiques affines par morceaux, et analysés par des techniques issues de la théorie des processus de décision Markoviens et de la géométrie tropicale [ABG15, ABG21]. Cette approche conduit à des formules analytiques pour le débit, asymptotiquement précises en prenant des limites d'échelle (grands systèmes). Elles permettent en particulier de déterminer analytiquement des diagrammes de phases, donnant les différents régimes de congestion, en fonction des ressources "goulot". Elles fournissent aussi des bornes précises sur le temps de retour à la normale après un pic de charge [ABG22]. Des approches probabilistes ont aussi été développées [BR19].

3. TRAVAIL PROJETÉ

3.1. Modélisation. Une première phase du travail consistera à modéliser le fonctionnement de plusieurs services d'urgence de l'AP-HP impliqués dans ce projet, en y effectuant des visites d'observation, afin de dégager un modèle générique de réseau de Petri. Une analyse des données (journaux d'horodatage des différents actes) permettra de paramétrer de manière réaliste ces modèles, en identifiant les distributions des temps de traitement caractéristiques ainsi que la typologie des parcours de patients.

3.2. Algorithmes pour le calcul des diagrammes de congestion. On a montré dans [ABG15, ABG21] que les régimes stationnaires d'un réseau de Petri, avec priorités, peuvent être obtenus en énumérant les cellules d'un complexe polyédral, dans un espace dont la dimension est égale au nombre de ressources élémentaires. Les calculs explicites menés permettent jusqu'ici seulement de traiter des exemples de petite taille (avec un nombre limité de chaînes de traitement), tels que des centres de réception et de régulation des appels d'urgence. Comparativement, l'approche analytique des services d'accueil des urgences au sein des hôpitaux, traitant des flux de patients de natures multiples, présente une complexité inédite. Cela rend indispensable le développement d'une approche algorithmique systématique. On peut voir l'ensemble des régimes stationnaires comme une variété tropicale sur un espace de germes de fonctions affines ordonné lexicographiquement. On pourra s'appuyer sur la compréhension de la géométrie des hypersurfaces tropicales (qui sont duales d'une subdivision d'un polytope de Netwon) [PR04, BK19], ainsi que sur des algorithmes spécifiques de calcul de prévariétés tropicales [GRZ22, Lü20], afin de développer des méthodes énumératives systématiques. On étudiera en particulier la question de l'existence d'un algorithme "output sensitive", c'est-à-dire dont la complexité est polynomiale en le nombre de phases de congestion. Cette approche permet a priori de traiter symboliquement le cas où les ressources varient. On étudiera aussi le cas où les durées des tâches typiques sont des variables symboliques, ou bien des variables assujetties à appartenir à des intervalles.

3.3. Convergence vers un régime stationnaire. Les résultats de [ABG21] ont montré qu'en l'absence de règles de priorité, la trajectoire d'un réseau de Petri temporisé converge vers un régime périodique, ayant un écart borné par rapport à un régime stationnaire (affine).

L'extension de ce résultat aux réseaux avec priorité est un problème ouvert. Il s'agira d'identifier des conditions garantissant une déviation bornée par rapport à un régime stationnaire. On pourra pour cela chercher à exploiter des invariants stoechiométriques, ou bien construire des ensembles invariants dans une bonne classe (polyèdres ou semi-algébriques paramétrés [AGG12]), conduisant à des méthodes effectives. On pourra aussi s'appuyer sur des techniques de "network calculus" [Bou14].

3.4. Écart entre le modèle fluide et le modèle réel. On cherchera à comparer les résultats donnés par le modèle fluide simplifié de réseau de Petri, et le modèle le plus réaliste (tenant compte des phénomènes d'intégrité et éventuellement des aspects stochastiques). On pourra pour cela s'appuyer sur le simulateur EmergencyEval développé dans l'équipe. On aimerait obtenir des bornes analytiques sur l'écart entre le modèle réaliste et le modèle fluide (ce qui est un problème ouvert dans le cas avec priorité). On cherchera aussi à établir un théorème de correspondance entre l'approche polyédrale et l'approche probabiliste, montrant que les phases de congestions prédites par le diagramme polyhedral coïncident avec celles établies par des "heuristiques" probabilistes, telles que celles employées dans [BR19]. Il s'agira notamment de voir dans quelle mesure les résultats de [BR19] s'étendent. Ainsi à partir d'un temps déterministe, le processus donnant l'état renormalisé du modèle stochastique converge vers sa limite fluide, solution déterministe d'une equation différentielle, dont on calcule aisément l'équilibre. La principale difficulté de l'analyse des modèles de service d'urgence sera la complexité due à la dimension.

3.5. Optimisation des ressources et emplois du temps. On cherchera enfin à exploiter les modèles agrégés de réseaux de Petri, obtenus dans le cadre de l'approximation fluide, afin d'aborder des problèmes de dimensionnement optimal. En particulier, on pourra étudier des problèmes d'emploi du temps, et élaborer des modèles à base de programmation linéaire entière ou mixte, permettant d'appréhender la couverture hebdomadaire d'un flux attendu de patients, sous une contrainte de délai de service (temps d'attentes maximaux cibles par exemple, en fonction des différents types de patients).

4. PROFIL RECHERCHÉ

Ce sujet est adapté à un ou une élève intéressé par la modélisation mathématique et l'optimisation, et ayant aussi un goût pour les applications au domaine de la santé. La composante méthodologique du travail a une forte composante mathématique (systèmes dynamiques, géométrie polyédrale et tropicale). Il serait aussi souhaitable d'avoir une certaine aisance en matière d'analyse de données.

5. ENCADREMENT

Ce travail de thèse est financé par un projet collaboratif du Bernoulli Lab (Laboratoire commun entre INRIA et AP-HP).

Il sera encadré par une équipe pluridisciplinaire, formée de X. Allamigeon (Chercheur dans Tropical, professeur chargé de cours à l'école polytechnique), S. Gaubert (Directeur de recherche, Tropical, professeur à l'école polytechnique), Y. Yordanov (PU-PH, Sorbonne Université, et Hôpital Saint-Antoine), et Ch. Fricker (INRIA Paris et ENS) pour la composante probabiliste du travail. Il pourra aussi s'appuyer sur des interactions avec J. Leblanc (MdC, Sorbonne Université et Hôpital Saint-Antoine) et B. Nguyen-Van-Yen (Ingénieur de recherche, Tropical). La thèse sera effectuée dans l'équipe Tropical (INRIA et CMAP, Ecole polytechnique), le docteur sera inscrit à l'école mathématique Jacques Hadamard, il pourra être amené à passer une partie de son temps au contact des urgentistes (notamment à l'Hôpital Saint-Antoine) ou à l'INRIA Paris.

En particulier, le travail donnera lieu à des interactions régulières avec des médecins et infirmiers de services d'urgences, et notamment à des présentations des résultats obtenus par la modélisation mathématiques, auprès de ceux-ci.

Contacts : Xavier.Allamigeon@inria.fr et Stephane.Gaubert@inria.fr
<http://www.cmap.polytechnique.fr/~allamigeon/>
<http://www.cmap.polytechnique.fr/~gaubert/>

RÉFÉRENCES

- [ABG15] X. Allamigeon, V. Bœuf, and S. Gaubert. Performance evaluation of an emergency call center : Tropical polynomial systems applied to timed Petri nets. In S. Sankaranarayanan and E. Vicario, editors, *Proceedings of FORMATS*, volume 9268 of *LNCS*, pages 10–26. Springer, 2015.
- [ABG21] Xavier Allamigeon, Marin Boyet, and Stéphane Gaubert. Piecewise affine dynamical models of timed petri nets – application to emergency call centers. *Fundamenta Informaticae*, 183(3-4) :169–201, 2021.
- [ABG22] X. Allamigeon, M. Boyet, and S. Gaubert. Computing transience bounds of emergency call centers : a hierarchical timed Petri net approach. In *Proceedings of PETRI NETS 2022*, number 13288 in *LNCS*. Springer, 2022.

- [AGG12] A. Adje, S. Gaubert, and E. Goubault. Coupling policy iteration with semi-definite relaxation to compute accurate numerical invariants in static analysis. *Logical methods in computer science*, 8(1) :1–32, 2012.
- [BK19] E. Baldwin and P. Klemperer. Understanding preferences : “demand types”, and the existence of equilibrium with indivisibilities. *Econometrica*, 87(3) :867–932, 2019.
- [Bou14] Anne Bouillard. *Algorithms and efficiency of Network calculus*. Hdr, École normale supérieure, 2014.
- [BR19] Vianney Bœuf and Philippe Robert. A stochastic analysis of a network with two levels of service. *Queueing Systems*, 92(3-4) :203–232, May 2019.
- [DLRS10] J.A. De Loera, J. Rambau, and F. Santos. *Triangulations*, volume 25 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2010. Structures for algorithms and applications.
- [GRZ22] P. Görlach, Y. Ren, and L. Zhang. Computing zero-dimensional tropical varieties via projections. *Computational complexity*, 31(1), May 2022.
- [Lü20] Ch. Lüders. Computing tropical prevarieties with satisfiability modulo theories (smt) solvers. In P. Fontaine, K. Korovin, I. S. Kotsireas, Ph. Rümmer, and S. Tourret, editors, *Proceedings of SC2'20 : Fifth International Workshop on Satisfiability Checking and Symbolic Computation, July 05, 2020, Paris, France*. CEUR Workshop Proceedings (CEUR-WS.org), 2020.
- [PR04] Mikael Passare and Hans Rullgård. Amoebas, Monge-Ampère measures, and triangulations of the Newton polytope. *Duke Math. J.*, 121(3) :481–507, 2004.