

Courbes paramétrées (1/3)

Exercice 1. Calculer les longueurs des courbes suivantes :

1. $(a \cos(t)^3, a \sin(t)^3)$, pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $a > 0$ (astroïde).
2. $(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, pour $t \in [0, 2\pi]$ (arche de la cycloïde).
3. (t^2, t^3) , pour $t \in [0, a]$ et $a > 0$ (parabole semi-cubique).

Exercice 1. Calculer la courbure en tout point des courbes suivantes :

1. la parabole d'équation $y^2 = 2px$, avec $p > 0$,
2. l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b > 0$, puis discuter les extremums de la courbure.

Exercice 2. Donner une formule générale pour la courbure d'un graphe $t \mapsto (t, y(t))$, puis calculer cette courbure pour $y(t) = \sin(t)$. Observer et commenter les variations de la courbure pour cet exemple sur un dessin.

courbes paramétrées (2/3)

Exercice 1. Une *hélice circulaire* est une courbe qui, dans un repère orthonormé, admet une paramétrisation de la forme

$$\alpha : t \mapsto (a \cos(t), a \sin(t), bt), \quad a > 0.$$

- Quelle condition doit-on avoir sur a et b pour que α soit paramétrée par son abscisse curviligne ?
- Calculer la courbure et la torsion de cette hélice en fonction de a et b .
- Que se passe-t-il si la torsion est supposée nulle ?
- Comment pourrait-on, en s'inspirant de cet exemple, définir une courbe du même type, modélée sur une ellipse ? Indiquer rapidement comment calculer sa courbure et sa torsion.

Exercice 2. Déterminer le repère de Frenet, la courbure et la torsion pour le paramétrage (t, t^2, t^3) . Décrire qualitativement quelques projections de cette courbe sur des plans parallèles à des axes de coordonnées.

Exercice 3. Déterminer le repère de Frenet, la courbure et la torsion de la courbe définie par le paramétrage $\alpha : t \mapsto (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$. Calculer la longueur de l'arc de cette courbe compris entre les points $\alpha(0)$ et $\alpha(t)$.

courbes paramétrées (3/3)

Exercice 1. On se donne les trois points de base suivants : $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(2, 0)$. Donner une représentation paramétrique de la courbe de Bézier associée aux points (A, B, C) , puis de celle associée aux points (A, C, B) , puis les tracer et les comparer.

Exercice 2. Soient A et B deux points distincts du plan et \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de \mathbb{R}^2 .

1. Justifier qu'il existe une unique courbe de Bézier cubique qui passe par le point A avec la vitesse \vec{u} et par le point B avec la vitesse \vec{v} .
2. Déterminer les points de contrôle d'une telle courbe.

Exercice 3. On suppose données deux courbes de Bézier dont les points de contrôle sont respectivement

$$((1, 0), (0, 1), (1, 2), (0, 3)) \text{ et } ((2, 0), (2, 1), (1, 3), (3, 3)).$$

Est-il possible que ces deux courbes s'intersectent ? Justifier.

Exercice 4. Expliquer comment convertir une courbe définie par l'équation $y = P(x)$ sur l'intervalle $x \in [a, b]$, où $P(x)$ est un polynôme, en une courbe de Bézier. Donner les points de contrôle. Traiter l'exemple $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ avec $a = 0$ et $b = 1$.

(Ind : on pensera à écrire la matrice des coefficients des polynômes de Bernstein dans la base usuelle des monômes.)

Exercice 5. Étant donnée deux courbes de Bézier de même degré $x_1(t)$ et $x_2(t)$, on forme la courbe barycentre de ces deux courbes à l'aide d'un couple (α, β) tel que $\alpha + \beta = 1$. On dit que cette courbe est aussi la courbe des barycentres ; pourquoi ?

Surfaces paramétrées (1/2)

Exercice 2 (Une surface réglée). On considère deux arcs d'ellipse fournis pour $0 \leq u \leq \pi$ par les paramétrisations suivantes :

$$\alpha(u) := (0, a_1 \cos u, b_1 \sin u), \quad \beta(u) := (1, a_2 \cos u, b_2 \sin u),$$

$a_1, b_1, a_2, b_2 > 0$. Pour chaque valeur de u on trace la droite qui joint le point $\alpha(u)$ au point $\beta(u)$, et on considère la surface S obtenue comme la réunion de toutes ces droites.

1. Tracer qualitativement la surface.
2. Donner un paramétrage de cette surface en rajoutant un paramètre v .
3. Préciser la nature de la section de cette surface par des plans d'équation $x = \text{constante}$.
4. Calculer en tout point le vecteur normal unitaire.
5. On considère la courbe obtenue en coupant la surface par le plan d'équation $x = \frac{1}{2}$. Calculer le repère de Frenet de cette courbe.
6. Quel est le lien entre ce repère de Frenet et le vecteur normal à la surface calculé plus haut ?
7. Pour quelles valeurs des paramètres du modèle la surface est-elle une portion de cylindre, ou de cône ?

Surfaces paramétrées (2/2)

Exercice 1. Soit S le paraboloid hyperbolique d'équation $z = xy$. Donner une paramétrisation simple de S puis calculer ses première et deuxième formes fondamentales.

Exercice 3 (Aire des surfaces de révolution). On fait tourner autour de l'axe z une courbe γ définie dans le plan (x, z) , paramétrée à vitesse unité, et ne touchant pas l'axe z .

1. Écrire le paramétrage de cette surface.
2. Calculer ses coefficients métriques.
3. Pour chaque valeur du paramètre t , on note $\rho(t)$ la distance du point à l'axe vertical. Montrer que la surface totale est donnée par :

$$S = 2\pi \int \rho(u) du.$$

Examiner le cas particulier de la sphère et du tore.