Courbes paramétrées (1/2)

Exercice 1. Calculer les longueurs des courbes suivantes :

1. $(a\cos(t)^3, a\sin(t)^3)$, pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $a > 0$ (astroïde).
2. $(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, pour $t \in [0, 2\pi]$ (arche de la cycloïde).
3. (t^2, t^3), pour $t \in [0, a]$ et $a > 0$ (parabole semi-cubique).

Exercice 1. Calculer la courbure en tout point des courbes suivantes :

1. la parabole d'équation $y^2 = 2px$, avec $p > 0$,
2. l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b > 0$, puis discuter les extremums de la courbure.

Exercice 2. Donner une formule générale pour la courbure d'un graphe $t \mapsto (t, y(t))$, puis calculer cette courbure pour $y(t) = sin(t)$. Observer et commenter les variations de la courbure pour cet exemple sur un dessin.

courbes paramétrées (2/2)

Exercice 1. Une *hélice circulaire* est une courbe qui, dans un repère orthonormé, admet une paramétrisation de la forme

$$\alpha : t \mapsto (a\cos(t), a\sin(t), bt), \quad a > 0.$$

a) Quelle condition doit-on avoir sur a et b pour que α soit paramétrée par son abscisse curviligne ?
b) Calculer la courbure et la torsion de cette hélice en fonction de a et b.
c) Que se passe-t-il si la torsion est supposée nulle ?
d) Comment pourrait-on, en s'inspirant de cet exemple, définir une courbe du même type, modelée sur une ellipse ? Indiquer rapidement comment calculer sa courbure et sa torsion.

Exercice 2. Déterminer le repère de Frenet, la courbure et la torsion pour le paramétrage (t, t^2, t^3). Décrire qualitativement quelques projections de cette courbe sur des plans parallèles à des axes de coordonnées.

Exercice 3. Déterminer le repère de Frenet, la courbure et la torsion de la courbe définie par le paramétrage $\alpha : t \mapsto (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$. Calculer la longueur de l'arc de cette courbe compris entre les points $\alpha(0)$ et $\alpha(t)$.

Surfaces paramétrées (1/2)

Exercice 2 (Une surface réglée). On considère deux arcs d'ellipse fournis pour $0 \leq u \leq \pi$ par les paramétrisations suivantes :

$$\alpha(u) := (0, a_1 \cos u, b_1 \sin u), \quad \beta(u) := (1, a_2 \cos u, b_2 \sin u),$$

$a_1, b_1, a_2, b_2 > 0$. Pour chaque valeur de u on trace la droite qui joint le point $\alpha(u)$ au point $\beta(u)$, et on considère la surface S obtenue comme la réunion de toutes ces droites.

1. Tracer qualitativement la surface.
2. Donner un paramétrage de cette surface en rajoutant un paramètre v.
3. Préciser la nature de la section de cette surface par des plans d'équation $x = constante$.
4. Calculer en tout point le vecteur normal unitaire.
5. On considère la courbe obtenue en coupant la surface par le plan d'équation $x = \frac{1}{2}$. Calculer le repère de Frenet de cette courbe.
6. Quel est le lien entre ce repère de Frenet et le vecteur normal à la surface calculé plus haut ?
7. Pour quelles valeurs des paramètres du modèle la surface est-elle une portion de cylindre, ou de cône ?

Surfaces paramétrées (2/2)

Exercice 1. Soit S le paraboloïde hyperbolique d'équation $z = xy$. Donner une paramétrisation simple de S puis calculer ses première et deuxième formes fondamentales.

Exercice 3 (Aire des surfaces de révolution). On fait tourner autour de l'axe z une courbe γ définie dans le plan (x, z), paramétrée à vitesse unité, et ne touchant pas l'axe z.

1. Écrire le paramétrage de cette surface.
2. Calculer ses coefficients métriques.
3. Pour chaque valeur du paramètre t, on note $\rho(t)$ la distance du point à l'axe vertical. Montrer que la surface totale est donnée par :

$$S = 2\pi \int \rho(u)\, du.$$

Examiner le cas particulier de la sphère et du tore.