

Differential geometry

Florent Lafarge

Inria Sophia Antipolis - Mediterranee

(based on M. Pauly courses)

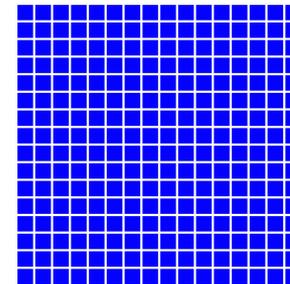
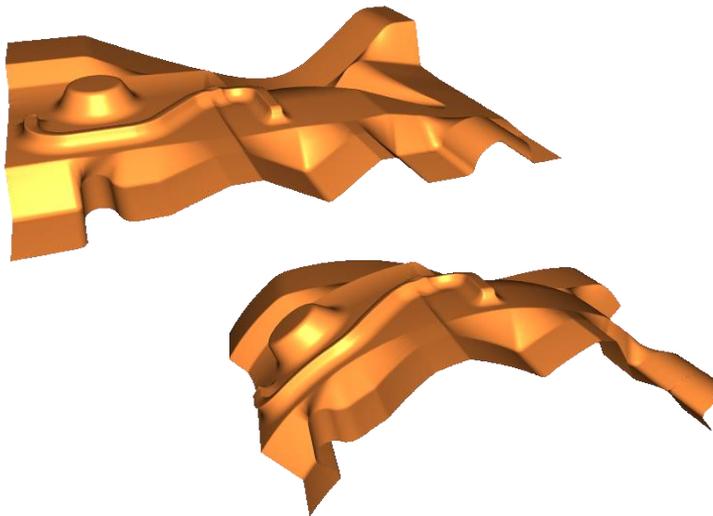
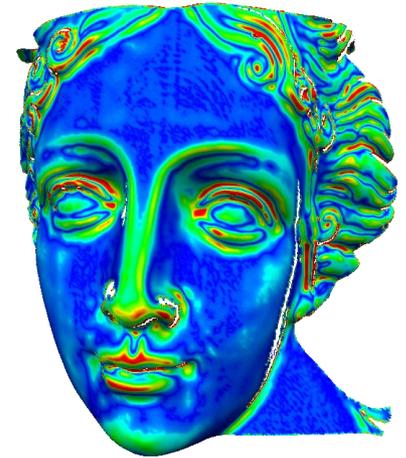
Contents

- Differential Geometry
- Discrete Differential Geometry
- Mesh Quality Measures

Motivations

We need differential geometry to compute

- surface curvature
- parameterization distortion
- deformation energies



Parametric curves in 2D

Définition. Une courbe est dite plane lorsqu'elle est entièrement contenue dans un plan. Une courbe plane paramétrée s'identifie à la donnée d'une application

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow \alpha(t) := (x(t), y(t))$$

où I désigne un intervalle de \mathbb{R} et $x(t), y(t)$ sont des fonctions au moins continues, habituellement suffisamment différentiables (ce que nous supposerons dans toute la suite).

Parametric curves in 2D

Régularité. On dit qu'une courbe plane paramétrée est régulière en un point t_0 , ou bien que t_0 est un point régulier pour cette courbe, si $\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$. Elle est dite régulière sur I si pour tout t dans I , $\alpha'(t) \neq (0, 0)$. Un point t_0 tel que $\alpha'(t_0) = (0, 0)$ est appelé point singulier pour la courbe.

Parametric curves in 2D

Vecteur vitesse. Pour tout $y \in I$, le vecteur $\alpha'(t)$ est souvent appelé *vecteur vitesse* de la courbe au point $\alpha(t)$. Ainsi, la courbe est régulière au point $\alpha(t)$ si et seulement si elle possède une vitesse non nulle en ce point.

Parametric curves in 2D

Reparamétrisation. Soient $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée, J un autre intervalle de \mathbb{R} et $h : J \rightarrow I$ une fonction \mathcal{C}^1 telle que $h'(s) \neq 0$ pour tout $s \in J$. Alors

$$\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2 : s \mapsto \alpha(h(s))$$

est appelée une *reparamétrisation* de α .

Si $h'(s) > 0$ pour tout $s \in J$, on parle de reparamétrisation positive : l'orientation (le sens des vecteurs vitesses) de la courbe est conservée.

Si $h'(s) < 0$ pour tout $s \in J$, on parle de reparamétrisation négative : l'orientation (le sens des vecteurs vitesses) de la courbe est inversée.

Parametric curves in 2D

Longueur d'un arc. Soient $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $]a, b[\subset I$. La longueur de l'arc de courbe compris entre les points $A := \alpha(a)$ et $B := \alpha(b)$ est donnée par

$$L(A, B) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

La longueur est bien définie : elle est invariante par reparamétrisation.

Abscisse curviligne. Soient $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$. L'abscisse curviligne d'origine $\alpha(t_0)$ de α est la fonction

$$s : I \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt.$$

Parametric curves in 2D

Repère de Frenet. Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière. Pour tout $t \in I$, on appelle *repère de Frenet* de la courbe au point $\alpha(t)$ le repère $(\tau(t), \eta(t))$ tel que

- $\tau(t)$ est le vecteur tangent unitaire $:= \alpha'(t)/\|\alpha'(t)\|$ et
- $\eta(t)$ est l'unique vecteur unitaire normal à $\tau(t)$, tel que le repère $(\tau(t), \eta(t))$ soit direct (c'est-à-dire tel que $\det(\tau(t), \eta(t)) = +1$).

Parametric curves in 2D

Courbure. Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne. Alors, pour tout $t \in I$ le vecteur accélération $\alpha''(t)$ est perpendiculaire au vecteur tangent $\tau(t)$, c'est-à-dire $\tau(t) \cdot \alpha''(t) = 0$.

Définition. La courbure au point $P = \alpha(t)$, notée $\kappa(P) \in \mathbb{R}$, est définie par l'égalité

$$\alpha''(t) = \tau'(t) = \kappa(P)\eta(t).$$

Si $\kappa(P) \neq 0$ alors la quantité $\rho(P) = 1/|\kappa(P)|$ est appelée le *rayon de courbure* au point P (par convention, on pose $\rho(P) = +\infty$ si $\kappa(P) = 0$).

Noter que le signe de la courbure est sensible au changement d'orientation.

Théorème. Soit κ une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soit $t_0 \in I$, P un point et v un vecteur unitaire dans le plan. Alors, il existe une unique courbe de classe \mathcal{C}^2 paramétrée par son abscisse curviligne $t \mapsto \alpha(t)$ telle que $\kappa(t)$ soit la courbure de la courbe au point $\alpha(t)$ pour tout $t \in I$, $\alpha(t_0) = P$ et $\alpha'(t_0) = v$.

Formulation générale de la courbure Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée régulière. Sa courbure au point $P := \alpha(t)$ est donnée par la formule

$$\kappa(P) := \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

Parametric curves in 2D: excercies

Exercice 1. Calculer les longueurs des courbes suivantes :

1. $(a \cos(t)^3, a \sin(t)^3)$, pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $a > 0$ (astroïde).
2. $(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, pour $t \in [0, 2\pi]$ (arche de la cycloïde).
3. (t^2, t^3) , pour $t \in [0, a]$ et $a > 0$ (parabole semi-cubique).

Parametric curves in 2D: exercices

Exercice 1. Calculer la courbure en tout point des courbes suivantes :

1. la parabole d'équation $y^2 = 2px$, avec $p > 0$,
2. l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b > 0$, puis discuter les extremums de la courbure.

Exercice 2. Donner une formule générale pour la courbure d'un graphe $t \mapsto (t, y(t))$, puis calculer cette courbure pour $y(t) = \sin(t)$. Observer et commenter les variations de la courbure pour cet exemple sur un dessin.

Parametric curves in 3D

Définition. On appelle courbe gauche paramétrée la donnée d'une application

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow \alpha(t) := (x(t), y(t), z(t))$$

où I désigne un intervalle de \mathbb{R} et $x(t), y(t), z(t)$ sont des fonctions au moins continues, habituellement suffisamment différentiables (ce que nous supposerons dans toute la suite).

Parametric curves in 3D

Définition. On appelle courbe gauche paramétrée la donnée d'une application

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow \alpha(t) := (x(t), y(t), z(t))$$

où I désigne un intervalle de \mathbb{R} et $x(t), y(t), z(t)$ sont des fonctions au moins continues, habituellement suffisamment différentiables (ce que nous supposerons dans toute la suite).

Abscisse curviligne. Les notions de régularité, de reparamétrisation, de longueur d'arc et d'abscisse curviligne se définissent exactement comme pour les courbes planes et possèdent les mêmes propriétés. En particulier, toute courbe gauche régulière peut être reparamétrisée par son abscisse curviligne (et donc possède une paramétrisation à vitesse constante unitaire).

Parametric curves in 3D

Courbure. Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ paramétrée par son abscisse curviligne. On note $\tau(t) := \alpha'(t)$ le vecteur tangent unitaire à la courbe.

Définition. La courbure de la courbe α au point $\alpha(t)$ est la quantité $\kappa(\alpha(t)) := \|\tau'(t)\| = \|\alpha''(t)\|$. Elle est toujours positive.

Définition. Un point où la courbure s'annule est appelé un point d'inflexion.

Parametric curves in 3D

Repère de Frenet. Soit toujours $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ paramétrée par son abscisse curviligne. Pour tout point $\alpha(t)$ qui n'est pas un point d'inflexion (i.e. $\kappa(\alpha(t)) \neq 0$) on définit le *vecteur normal unitaire* à la courbe par

$$\eta(t) := \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|} = \frac{\alpha''(t)}{\kappa(\alpha(t))}.$$

Afin d'obtenir un *plan* normal à la courbe, on introduit un troisième vecteur unitaire, appelé *vecteur binormal unitaire*

$$b(t) := \tau(t) \wedge \eta(t).$$

Définition. La repère mobile direct $(\tau(t), \eta(t), b(t))$ centré au point $\alpha(t)$ est appelé le repère de Frenet de la courbe α au point $\alpha(t)$.

Parametric curves in 3D

Torsion. Soit encore $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ paramétrée par son abscisse curviligne. Si $\alpha(t)$ n'est pas un point d'inflexion alors on montre que les vecteurs $b'(t)$ et $\eta(t)$ sont colinéaires et on pose la

Définition. Si $\alpha(t)$ n'est pas un point d'inflexion, la torsion de la courbe α au point $\alpha(t)$, notée $\theta(\alpha(t))$, est définie par l'égalité

$$b'(t) = -\theta(\alpha(t))\eta(t).$$

Théorème. “Une courbe gauche est déterminée par sa courbure et sa torsion à déplacement près.”

Parametric curves in 3D

Formules de Serret-Frenet. Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ paramétrée par son abscisse curviligne et $\alpha(t)$ un point qui n'est pas un point d'inflexion. Alors, on a les relations suivantes

$$\begin{pmatrix} \tau'(t) \\ \eta'(t) \\ b'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(\alpha(t)) & 0 \\ -\kappa(\alpha(t)) & 0 & \theta(\alpha(t)) \\ 0 & -\theta(\alpha(t)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(t) \\ \eta(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Formulation générale pour une paramétrisation quelconque. Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ paramétrée. On pose

$$\tau(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \quad b(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}, \quad \eta(t) = b(t) \wedge \tau(t)$$

et alors

$$\kappa(\alpha(t)) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}, \quad \theta(\alpha(t)) = \frac{(\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2} = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}.$$

Parametric curves in 3D: exercices

Exercice 1. Une *hélice circulaire* est une courbe qui, dans un repère orthonormé, admet une paramétrisation de la forme

$$\alpha : t \mapsto (a \cos(t), a \sin(t), bt), \quad a > 0.$$

- Quelle condition doit-on avoir sur a et b pour que α soit paramétrée par son abscisse curviligne ?
- Calculer la courbure et la torsion de cette hélice en fonction de a et b .
- Que se passe-t-il si la torsion est supposée nulle ?
- Comment pourrait-on, en s'inspirant de cet exemple, définir une courbe du même type, modélée sur une ellipse ? Indiquer rapidement comment calculer sa courbure et sa torsion.

Exercice 2. Déterminer le repère de Frenet, la courbure et la torsion pour le paramétrage (t, t^2, t^3) . Décrire qualitativement quelques projections de cette courbe sur des plans parallèles à des axes de coordonnées.

Exercice 3. Déterminer le repère de Frenet, la courbure et la torsion de la courbe définie par le paramétrage $\alpha : t \mapsto (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$. Calculer la longueur de l'arc de cette courbe compris entre les points $\alpha(0)$ et $\alpha(t)$.

Parametric surfaces

- Continuous surface

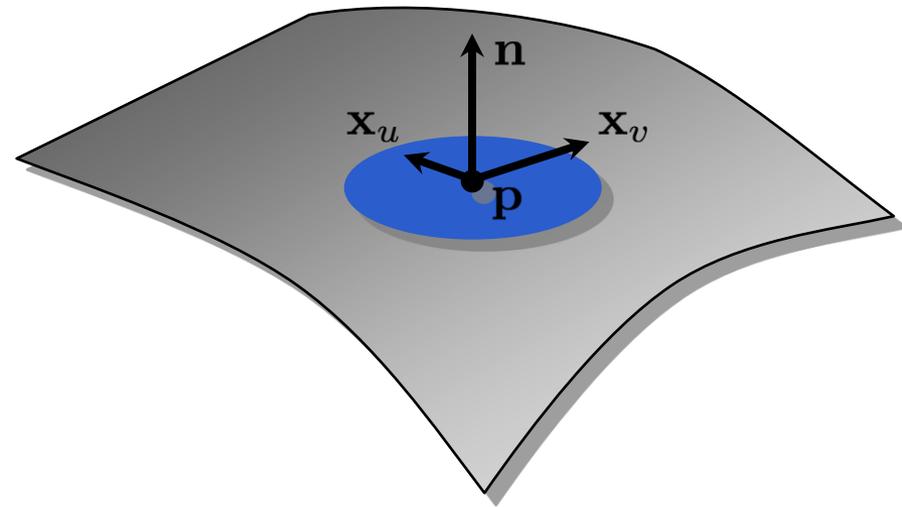
$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

- Normal vector

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

- Assume *regular* parameterization

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq \mathbf{0}$$



Parametric surfaces

Angles on surface

- Curve $[u(t), v(t)]$ in uv -plane defines curve on the surface $\mathbf{x}(u,v)$

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$$

- Two curves c_1 and c_2 intersecting at p

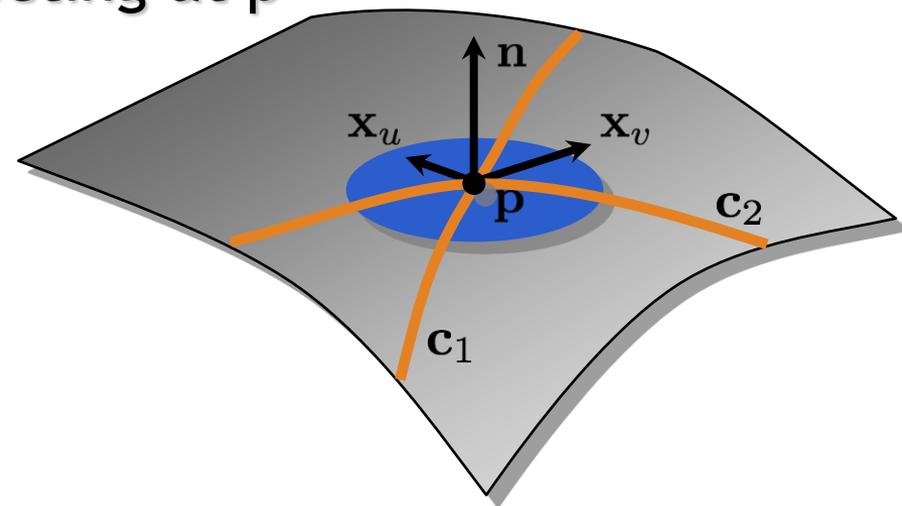
- Angle of intersection?

- Two tangents \mathbf{t}_1 and \mathbf{t}_2

$$\mathbf{t}_i = \alpha_i \mathbf{x}_u + \beta_i \mathbf{x}_v$$

- Compute inner product

$$\mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_2 = \cos \theta \|\mathbf{t}_1\| \|\mathbf{t}_2\|$$



Parametric surfaces

Angles on surface

- Curve $[u(t), v(t)]$ in uv -plane defines curve on the surface $\mathbf{x}(u,v)$

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$$

- Two curves c_1 and c_2 intersecting at p

$$\mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_2 = (\alpha_1 \mathbf{x}_u + \beta_1 \mathbf{x}_v)^T (\alpha_2 \mathbf{x}_u + \beta_2 \mathbf{x}_v)$$

$$= \alpha_1 \alpha_2 \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_u + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_v + \beta_1 \beta_2 \mathbf{x}_v^T \mathbf{x}_v$$

$$= (\alpha_1, \beta_1) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_v & \mathbf{x}_v^T \mathbf{x}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

Parametric surfaces

First fundamental form

- First fundamental form
- Defines inner product on tangent space

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_v & \mathbf{x}_v^T \mathbf{x}_v \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\rangle := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}^T \mathbf{I} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

Parametric surfaces

First fundamental form

$$\mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_2 = \langle (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_1, \beta_1) \rangle$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= \langle (du, dv), (du, dv) \rangle \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dA &= \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| \, du \, dv \\ &= \sqrt{\mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v^T \mathbf{x}_v - (\mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_v)^2} \, du \, dv \\ &= \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \end{aligned}$$

Parametric surfaces: exercices

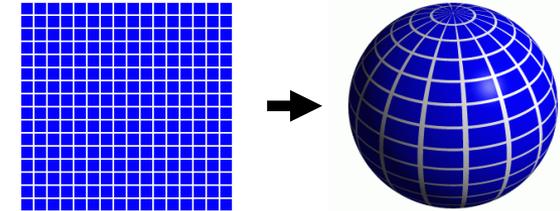
- Sphere centrée en $(0,0,0)$ de rayon 1
 - Parametrage de la surface
 - Longueur à l'équateur
 - Aire de la sphere

Parametric surfaces: exercices

Sphere example

- Spherical parameterization

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi)$$



- Tangent vectors

$$\mathbf{x}_u(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin u \sin v \\ \cos u \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_v(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ -\sin v \end{pmatrix}$$

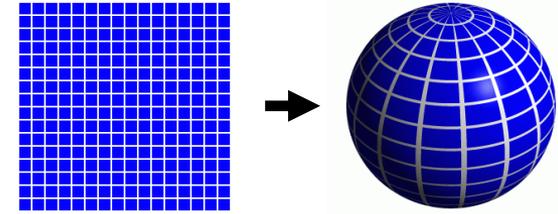
- First fundamental form

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sin^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Parametric surfaces: exercices

Sphere example

- Length of equator $\mathbf{x}(t, \pi / 2)$

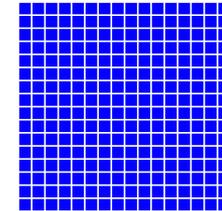


$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} 1 \, ds &= \int_0^{2\pi} \sqrt{E (u_t)^2 + 2F u_t v_t + G (v_t)^2} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin v \, dt \\ &= 2\pi \sin v = 2\pi\end{aligned}$$

Parametric surfaces: exercices

Sphere example

- Area of a sphere



$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} 1 \, dA &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin v \, du \, dv \\ &= 4\pi\end{aligned}$$

Parametric surfaces: exercices

- cylindre centrée en $(0,0,0)$, de normal $(0,0,1)$, de rayon 1 et de hauteur $2h$
 - Parametrage de la surface
 - Longueur à l'équateur
 - Aire du cylindre

Parametric surfaces: exercices

- tore centrée en $(0,0,0)$, de normal $(0,0,1)$, de grand rayon 10 et de petit rayon 1
 - Parametrage de la surface
 - Aire du tore

Parametric surfaces: exercices

Exercice 2 (Une surface réglée). On considère deux arcs d'ellipse fournis pour $0 \leq u \leq \pi$ par les paramétrisations suivantes :

$$\alpha(u) := (0, a_1 \cos u, b_1 \sin u), \quad \beta(u) := (1, a_2 \cos u, b_2 \sin u),$$

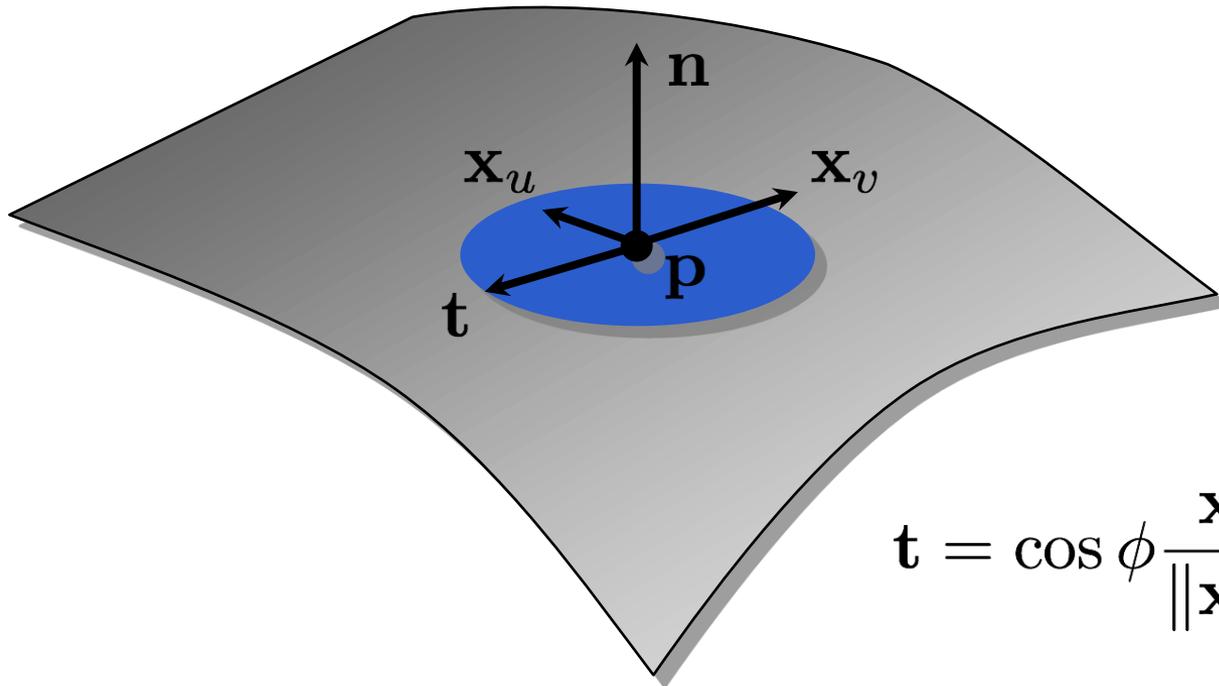
$a_1, b_1, a_2, b_2 > 0$. Pour chaque valeur de u on trace la droite qui joint le point $\alpha(u)$ au point $\beta(u)$, et on considère la surface S obtenue comme la réunion de toutes ces droites.

1. Tracer qualitativement la surface.
2. Donner un paramétrage de cette surface en rajoutant un paramètre v .
3. Préciser la nature de la section de cette surface par des plans d'équation $x = \text{constante}$.
4. Calculer en tout point le vecteur normal unitaire.
5. On considère la courbe obtenue en coupant la surface par le plan d'équation $x = \frac{1}{2}$. Calculer le repère de Frenet de cette courbe.
6. Quel est le lien entre ce repère de Frenet et le vecteur normal à la surface calculé plus haut ?
7. Pour quelles valeurs des paramètres du modèle la surface est-elle une portion de cylindre, ou de cône ?

Parametric surfaces

Normal curvature

- Tangent vector \mathbf{t} ...

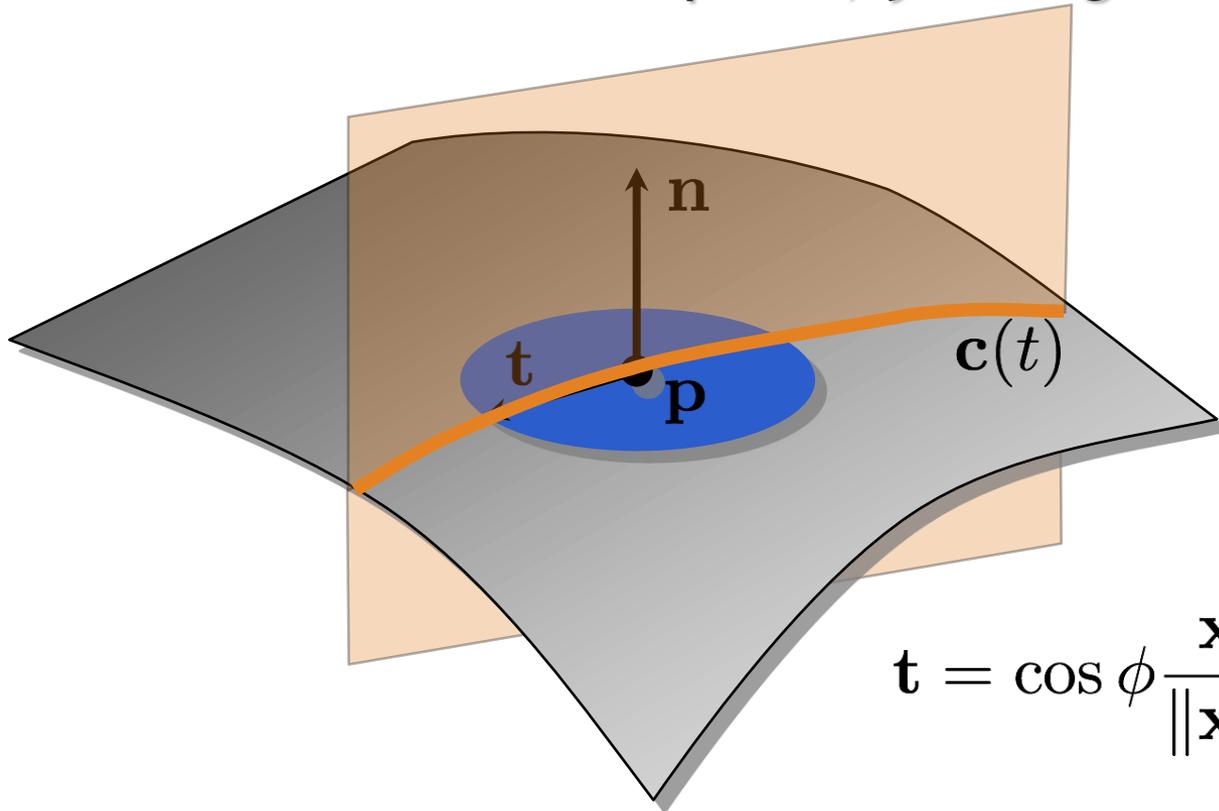


$$\mathbf{t} = \cos \phi \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} + \sin \phi \frac{\mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_v\|}$$

Parametric surfaces

Normal curvature

- .. defines intersection plane, yielding curve $\mathbf{c}(t)$



$$\mathbf{t} = \cos \phi \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} + \sin \phi \frac{\mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_v\|}$$

Parametric surfaces

Normal curvature

- Normal curvature $\kappa_n(\mathbf{t})$ is defined as curvature of the normal curve $c(t)$ at point $p = x(u, v)$.
- With second fundamental form

$$\mathbf{II} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uu}^T \mathbf{n} & \mathbf{x}_{uv}^T \mathbf{n} \\ \mathbf{x}_{uv}^T \mathbf{n} & \mathbf{x}_{vv}^T \mathbf{n} \end{pmatrix}$$

- normal curvature can be computed as

$$\kappa_n(\bar{\mathbf{t}}) = \frac{\bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{II} \bar{\mathbf{t}}}{\bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{I} \bar{\mathbf{t}}} = \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v \\ \bar{\mathbf{t}} &= (a, b) \end{aligned}$$

Parametric surfaces

Surface curvatures

- *Principal curvatures*

- Maximum curvature $\kappa_1 = \max_{\phi} \kappa_n(\phi)$

- Minimum curvature $\kappa_2 = \min_{\phi} \kappa_n(\phi)$

- Euler theorem: $\kappa_n(\phi) = \kappa_1 \cos^2 \phi + \kappa_2 \sin^2 \phi$

- Corresponding *principal directions* e_1, e_2 are orthogonal



Parametric surfaces

Surface curvatures

- *Principal curvatures*

- Maximum curvature $\kappa_1 = \max_{\phi} \kappa_n(\phi)$

- Minimum curvature $\kappa_2 = \min_{\phi} \kappa_n(\phi)$

- Euler theorem: $\kappa_n(\phi) = \kappa_1 \cos^2 \phi + \kappa_2 \sin^2 \phi$

- Corresponding *principal directions* e_1, e_2 are orthogonal

- *Special curvatures*

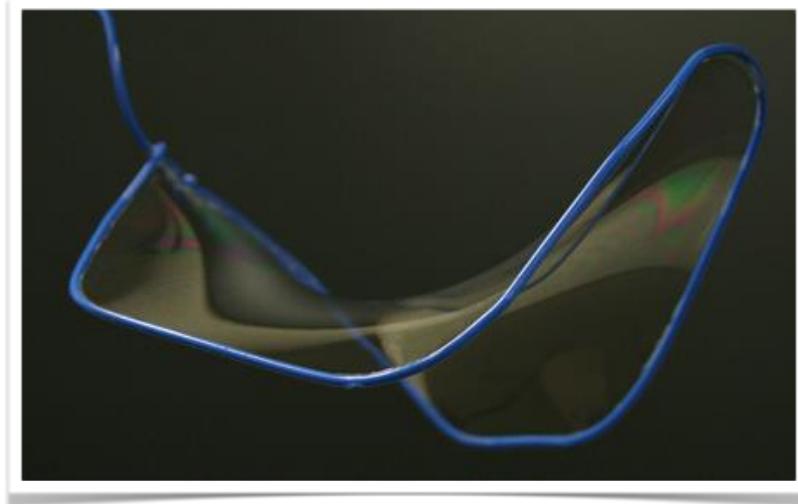
- Mean curvature $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$

- Gaussian curvature $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$

Parametric surfaces

Curvature of surfaces

- Mean curvature $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$
 - $H = 0$ everywhere \rightarrow minimal surface



soap films

Parametric surfaces

Curvature of surfaces

- Gaussian curvature $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$
 - $K = 0$ everywhere \rightarrow developable surface



Disney Concert Hall, L.A.
Architects: Gehry Partners



Timber Fabric
IBOIS, EPFL

Parametric surfaces

Classification

- A point \mathbf{x} on the surface is called
 - *elliptic*, if $K > 0$
 - *hyperbolic*, if $K < 0$
 - *parabolic*, if $K = 0$
 - *umbilic*, if $\kappa_1 = \kappa_2$

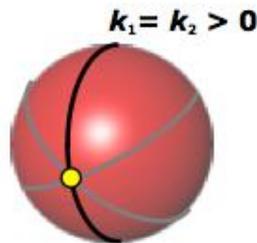
Parametric surfaces

Classification

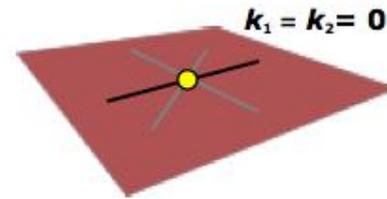
- A point x on the surface is called

Isotropic

Equal in all directions



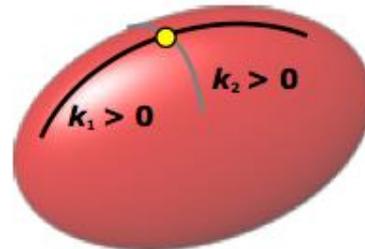
spherical



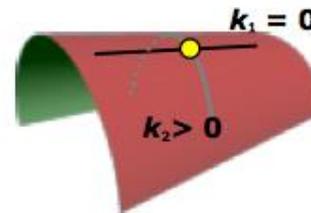
planar

Anisotropic

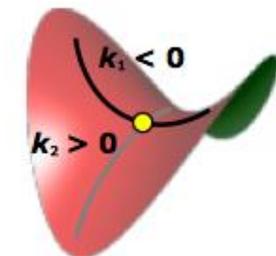
Distinct principal directions



elliptic
 $K > 0$



parabolic
 $K = 0$
developable



hyperbolic
 $K < 0$

Parametric surfaces: exercices

Exercice 3 (Aire des surfaces de révolution). On fait tourner autour de l'axe z une courbe γ définie dans le plan (x, z) , paramétrée à vitesse unité, et ne touchant pas l'axe z .

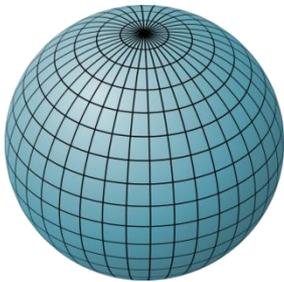
1. Écrire le paramétrage de cette surface.
2. Calculer ses coefficients métriques.
3. Pour chaque valeur du paramètre t , on note $\rho(t)$ la distance du point à l'axe vertical. Montrer que la surface totale est donnée par :

$$S = 2\pi \int \rho(u) du.$$

Examiner le cas particulier de la sphère et du tore.

Genus of a surface

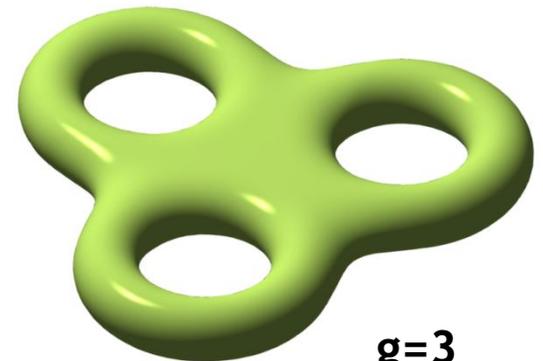
- largest number of nonintersecting simple closed curves that can be drawn on the surface without separating it
- It is equal to the number of holes in a surface



$g=0$



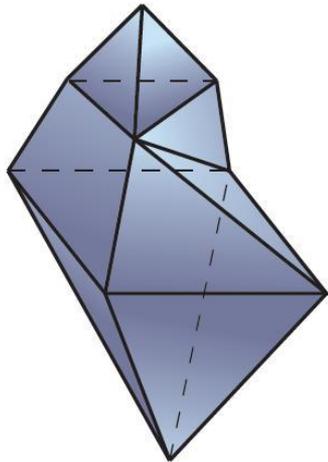
$g=1$



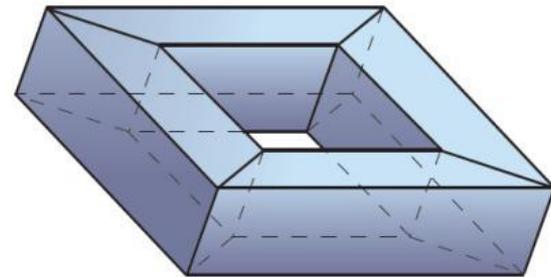
$g=3$

Euler characteristic

$$\chi = V - E + F$$



$$V - E + F = 2$$



$$V - E + F = 0$$

Gauss-Bonnet theorem

- For any closed manifold surface with Euler characteristic $\chi = 2-2g$

$$\int K = 2\pi\chi$$

$$\int K(\text{Hand}) = \int K(\text{Cow}) = \int K(\text{Sphere}) = 4\pi$$

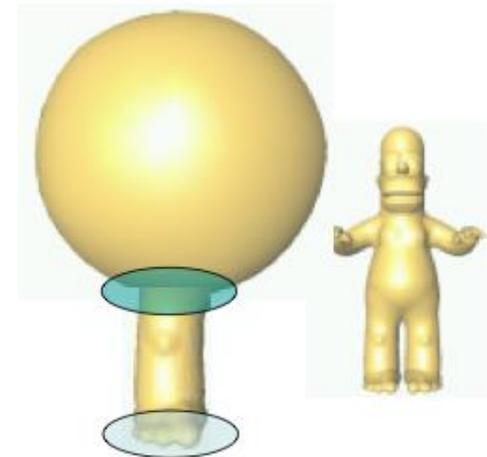
Gauss-Bonnet theorem

- Sphere

$$\kappa_1 = \kappa_2 = 1/r$$

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = 1/r^2$$

$$\int K = 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{r^2} = 4\pi$$



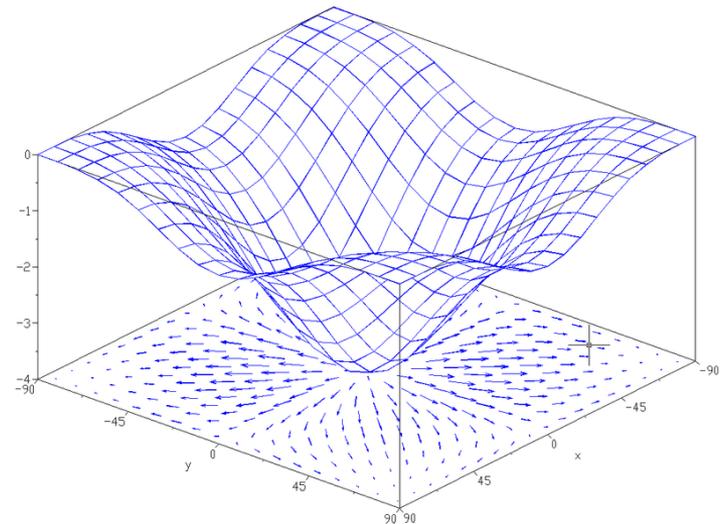
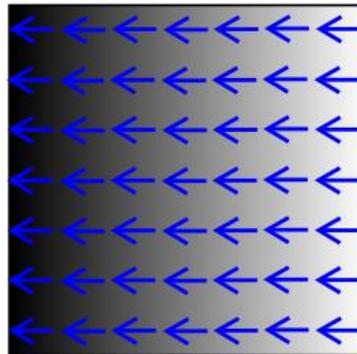
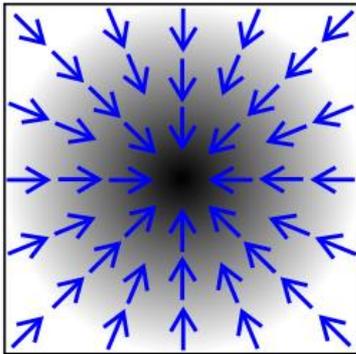
- when sphere is deformed new positive and negative curvature cancel out!

Differential operators

- Gradient

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

- points in the direction of steepest ascent

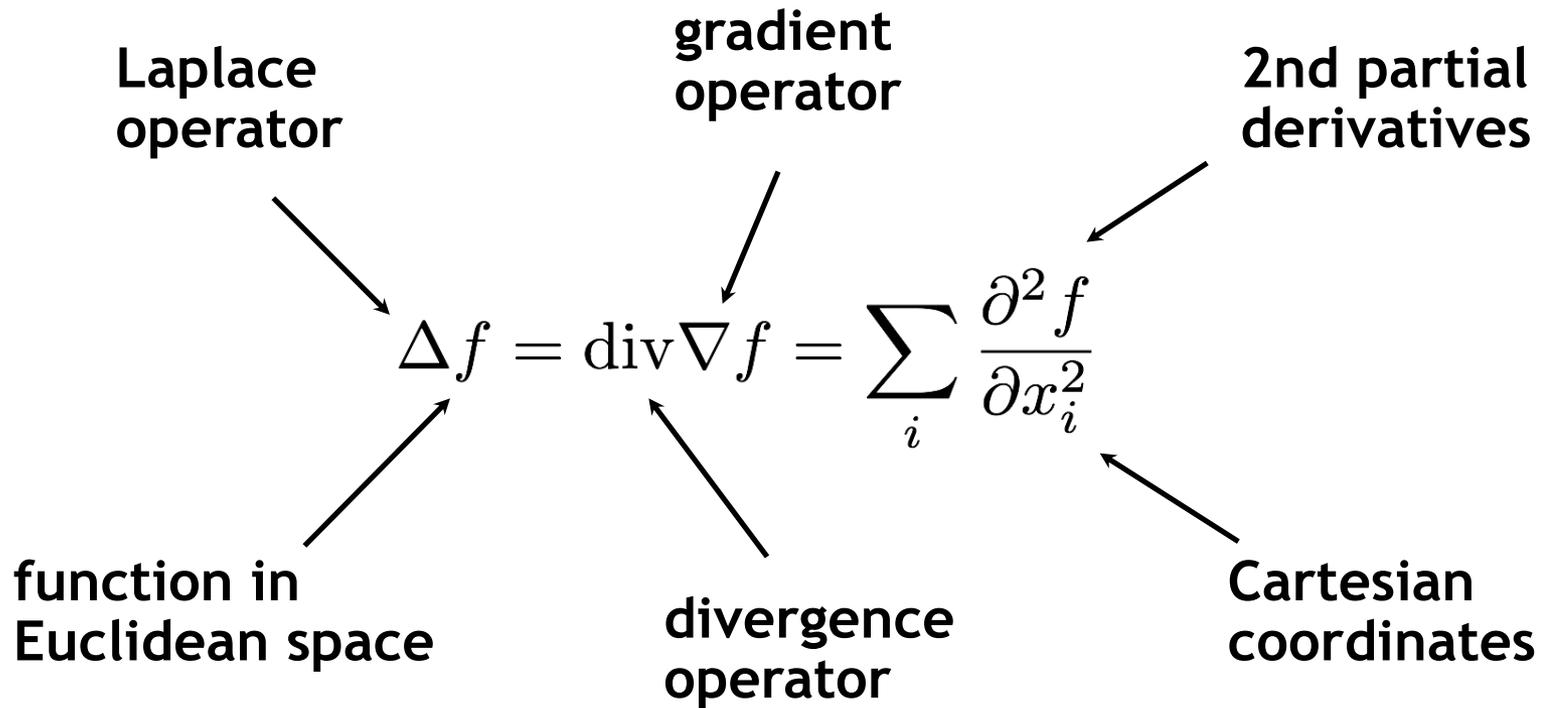


Differential operators

- Divergence

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F := \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

Laplace operator



Laplace-Beltrami operator

- Extension of Laplace to functions on manifolds

The diagram illustrates the Laplace-Beltrami operator as the composition of the divergence operator and the gradient operator. It features the central equation $\Delta_S f = \operatorname{div}_S \nabla_S f$. Four arrows point towards this equation from the following labels: 'Laplace-Beltrami' (top-left), 'gradient operator' (top-right), 'function on manifold S ' (bottom-left), and 'divergence operator' (bottom-right).

$$\Delta_S f = \operatorname{div}_S \nabla_S f$$

Laplace-Beltrami operator

- Extension of Laplace to functions on manifolds

The diagram illustrates the Laplace-Beltrami operator equation on a manifold \mathcal{S} . The central equation is $\Delta_{\mathcal{S}} \mathbf{x} = \operatorname{div}_{\mathcal{S}} \nabla_{\mathcal{S}} \mathbf{x} = -2H \mathbf{n}$. Arrows point from descriptive labels to the corresponding parts of the equation: 'Laplace-Beltrami' points to $\Delta_{\mathcal{S}}$, 'coordinate function' points to \mathbf{x} , 'divergence operator' points to $\operatorname{div}_{\mathcal{S}}$, 'gradient operator' points to $\nabla_{\mathcal{S}}$, 'mean curvature' points to H , and 'surface normal' points to \mathbf{n} .

$$\Delta_{\mathcal{S}} \mathbf{x} = \operatorname{div}_{\mathcal{S}} \nabla_{\mathcal{S}} \mathbf{x} = -2H \mathbf{n}$$

Labels and their corresponding parts in the equation:

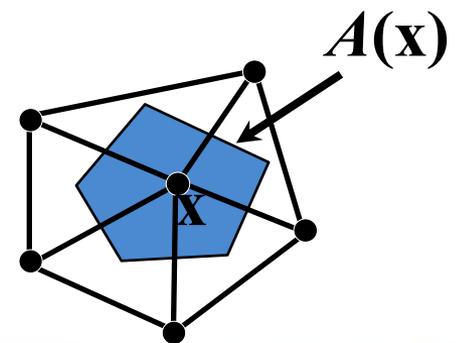
- Laplace-Beltrami: $\Delta_{\mathcal{S}}$
- coordinate function: \mathbf{x}
- divergence operator: $\operatorname{div}_{\mathcal{S}}$
- gradient operator: $\nabla_{\mathcal{S}}$
- mean curvature: H
- surface normal: \mathbf{n}

Contents

- Differential Geometry
- Discrete Differential Geometry
- Mesh Quality Measures

Discrete curvatures

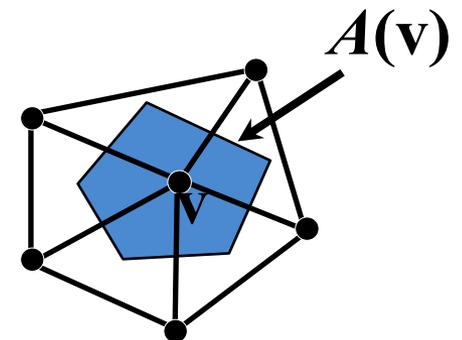
- How to discretize curvatures on a mesh?
- Approximate differential properties at point \mathbf{x} as average over local neighborhood $A(\mathbf{x})$
 - \mathbf{x} is a mesh vertex
 - $A(\mathbf{x})$ within one-ring neighborhood



Discrete curvatures

- How to discretize curvatures on a mesh?
- Approximate differential properties at point \mathbf{x} as average over local neighborhood $A(\mathbf{x})$

$$K(v) \approx \frac{1}{A(v)} \int_{A(v)} K(\mathbf{x}) \, dA$$

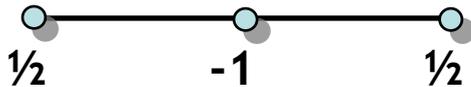


Discrete curvatures

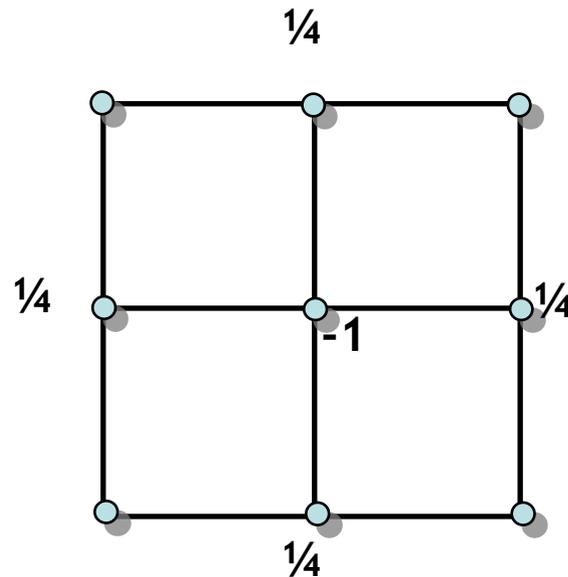
- Which curvatures to discretize?
 - Discretize Laplace-Beltrami operator
 - Laplace-Beltrami gives us mean curvature H
 - Discretize Gaussian curvature K
 - From H and K we can compute κ_1 and κ_2

Laplace operator on mesh?

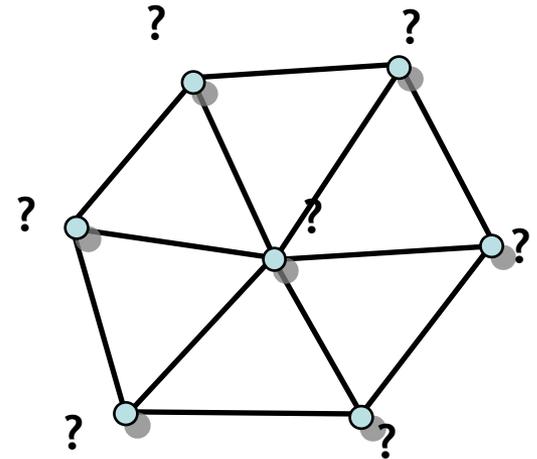
- Extend finite differences to meshes?
 - What weights per vertex / edge?



1D grid



2D grid

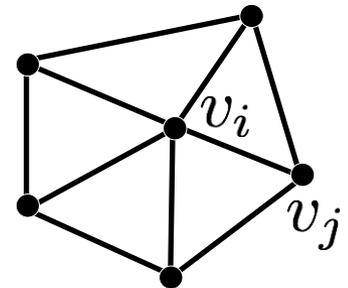


2D/3D mesh

Uniform Laplace

- Uniform discretization

$$\Delta_{\text{uni}} f(v_i) := \frac{1}{|\mathcal{N}_1(v_i)|} \sum_{v_j \in \mathcal{N}_1(v_i)} (f(v_j) - f(v_i))$$



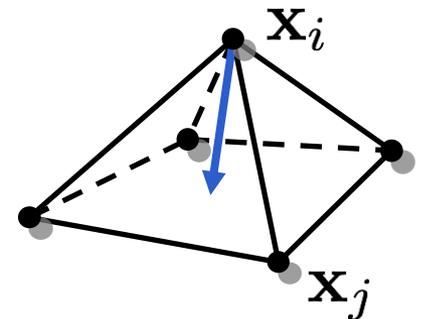
Uniform Laplace

- Uniform discretization

$$\Delta_{\text{uni}} \mathbf{x}_i := \frac{1}{|\mathcal{N}_1(v_i)|} \sum_{v_j \in \mathcal{N}_1(v_i)} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \approx -2H \mathbf{n}$$

- Properties

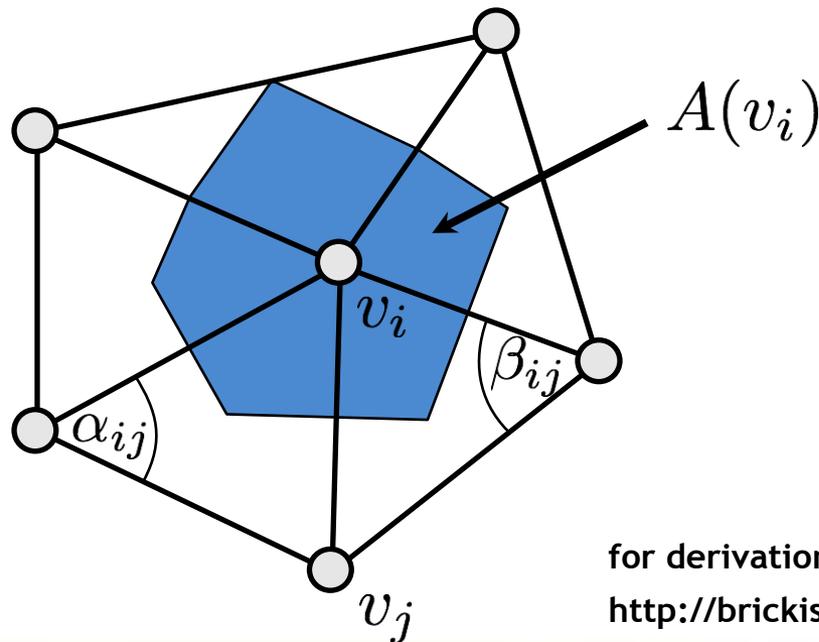
- depends only on connectivity
- simple and efficient
- bad approximation for irregular triangulations



Discrete Laplace-Beltrami

- Cotangent discretization

$$\Delta_S f(v_i) := \frac{1}{2A(v_i)} \sum_{v_j \in \mathcal{N}_1(v_i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) (f(v_j) - f(v_i))$$

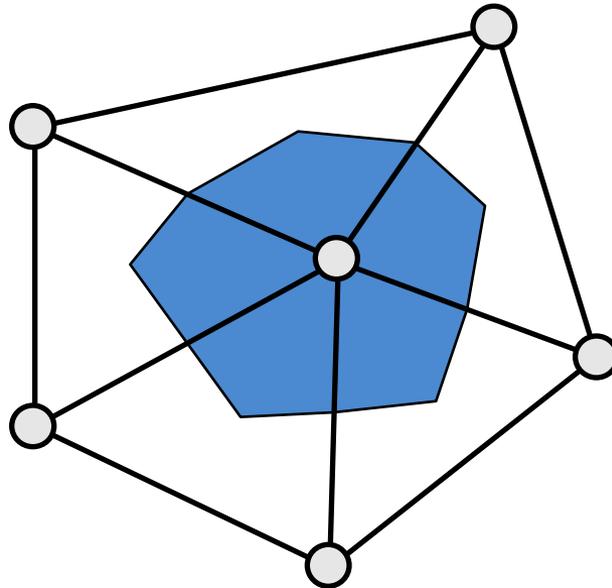


for derivation, check out:

<http://brickisland.net/cs177/>

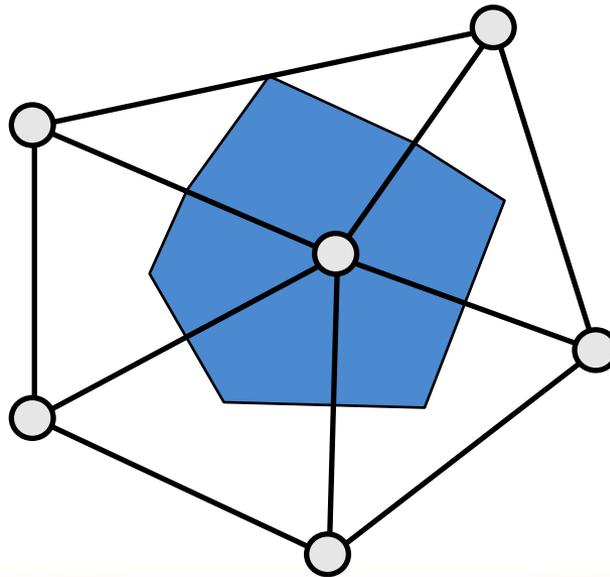
Barycentric cells

- Connect edge midpoints and triangle barycenters
 - Simple to compute
 - Area is $1/3$ of triangle areas
 - Slightly wrong for obtuse triangles



Mixed cells

- Connect edge midpoints and
 - Circumcenters for non-obtuse triangles
 - Midpoint of opposite edge for obtuse triangles
 - Better approximation, more complex to compute...



Discrete Laplace-Beltrami

- Cotangent discretization

$$\Delta_{\mathcal{S}} f(v) := \frac{1}{2A(v)} \sum_{v_i \in \mathcal{N}_1(v)} (\cot \alpha_i + \cot \beta_i) (f(v_i) - f(v))$$

- Problems
 - weights can become negative (when?)
 - depends on triangulation
- Still the most widely used discretization

Discrete curvatures

- Mean curvature (absolute value)

$$H = \frac{1}{2} \|\Delta_S \mathbf{x}\|$$

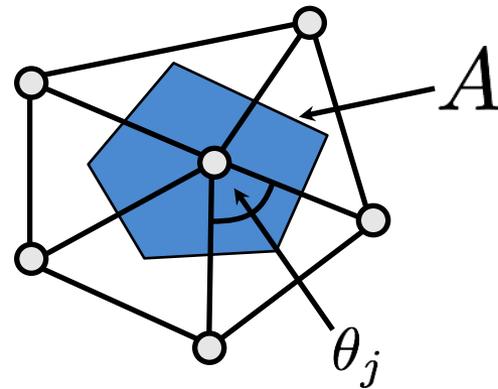
- Gaussian curvature

$$K = (2\pi - \sum_j \theta_j) / A$$

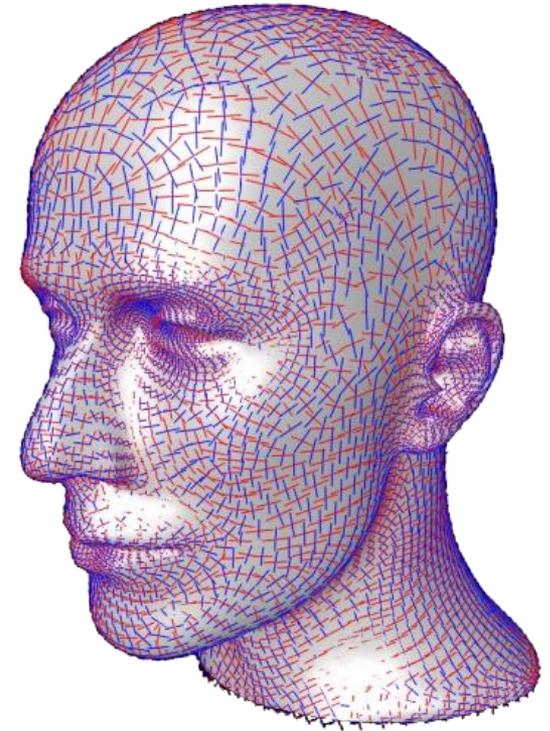
- Principal curvatures

$$\kappa_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$$

$$\kappa_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$



- P. Alliez: *Estimating Curvature Tensors on Triangle Meshes* (source code)
 - <http://www-sop.inria.fr/geometrica/team/Pierre.Alliez/demos/curvature/>
- CGAL package



principal directions

Contents

- Differential Geometry
- Discrete Differential Geometry
- Mesh Quality Measures

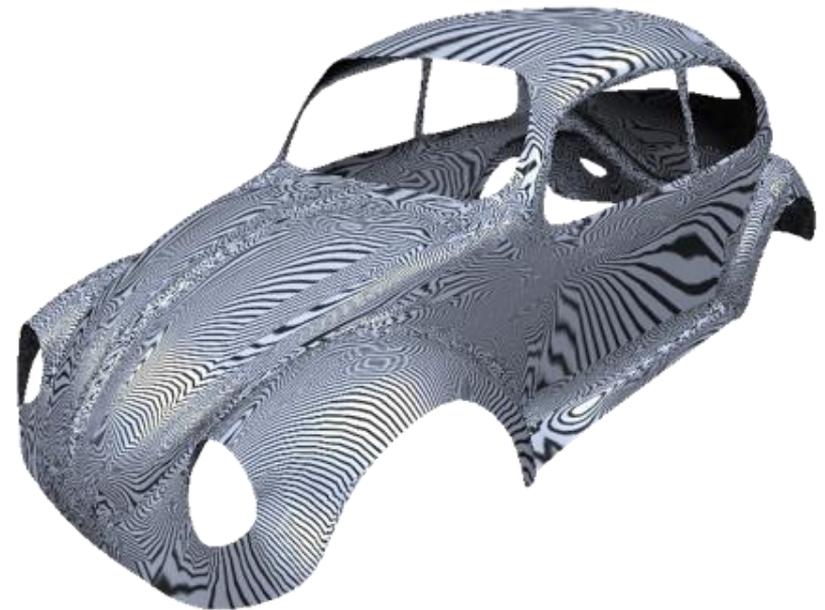
Mesh quality

- Visual inspection of “sensitive” attributes
 - Specular shading



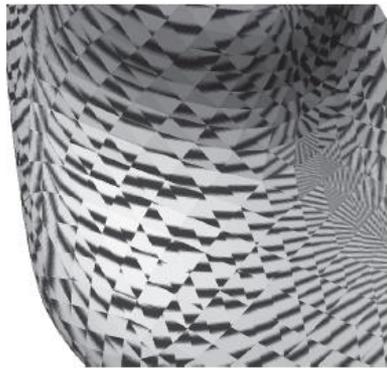
Mesh quality

- Visual inspection of “sensitive” attributes
 - Specular shading
 - Reflection lines



Mesh quality

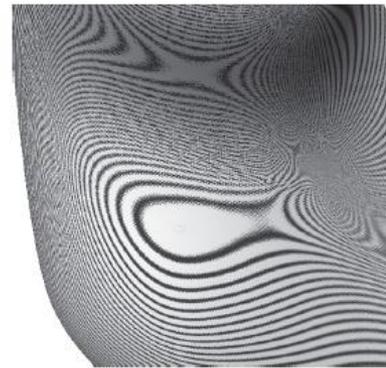
- Visual inspection of “sensitive” attributes
 - Specular shading
 - Reflection lines
 - differentiability one order lower than surface
 - can be efficiently computed using graphics hardware



C^0



C^1



C^2

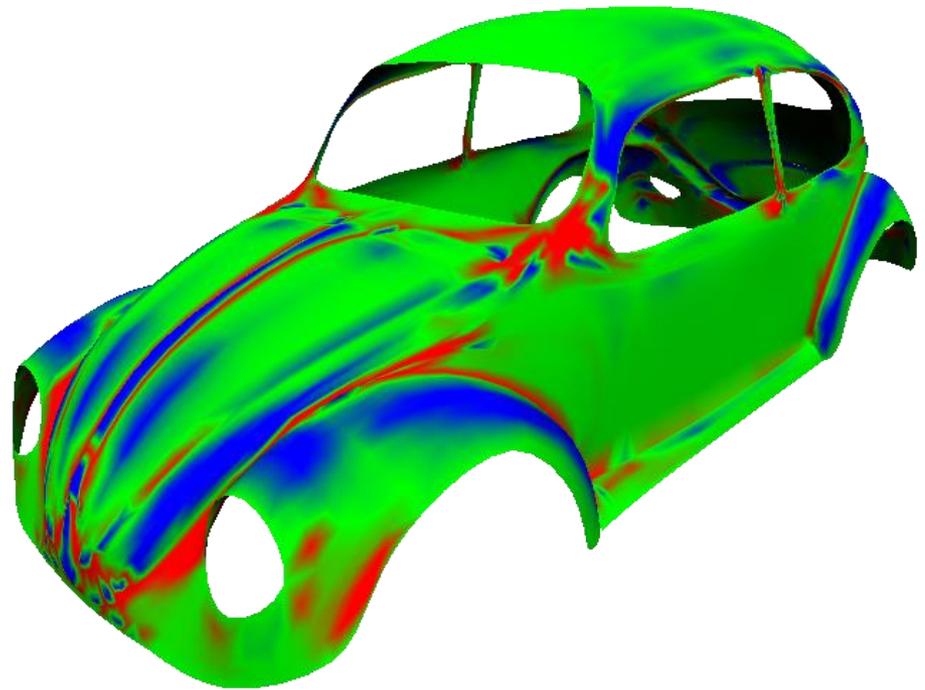
Mesh quality

- Visual inspection of “sensitive” attributes
 - Specular shading
 - Reflection lines
 - Curvature
 - Mean curvature



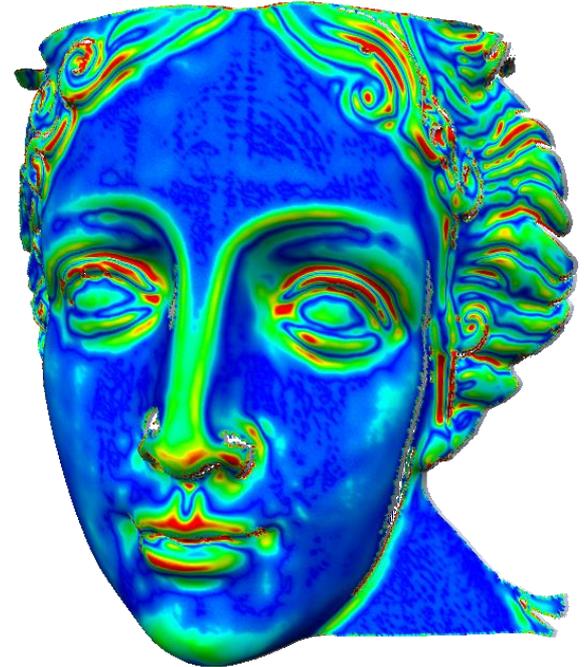
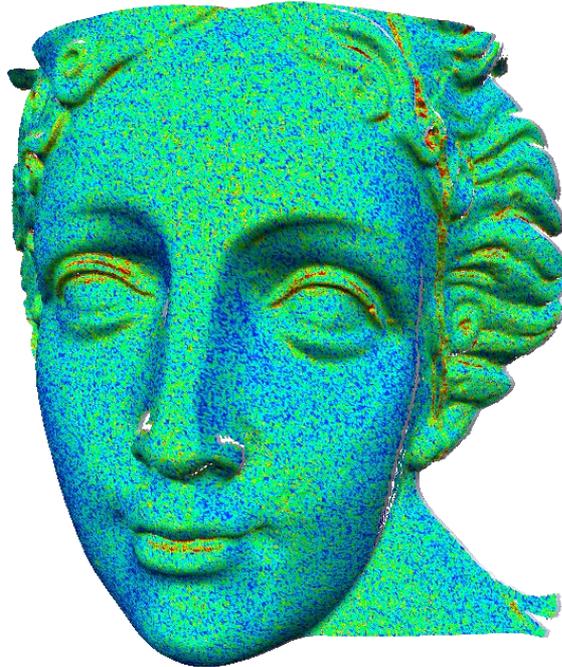
Mesh quality

- Visual inspection of “sensitive” attributes
 - Specular shading
 - Reflection lines
 - Curvature
 - Mean curvature
 - Gauss curvature



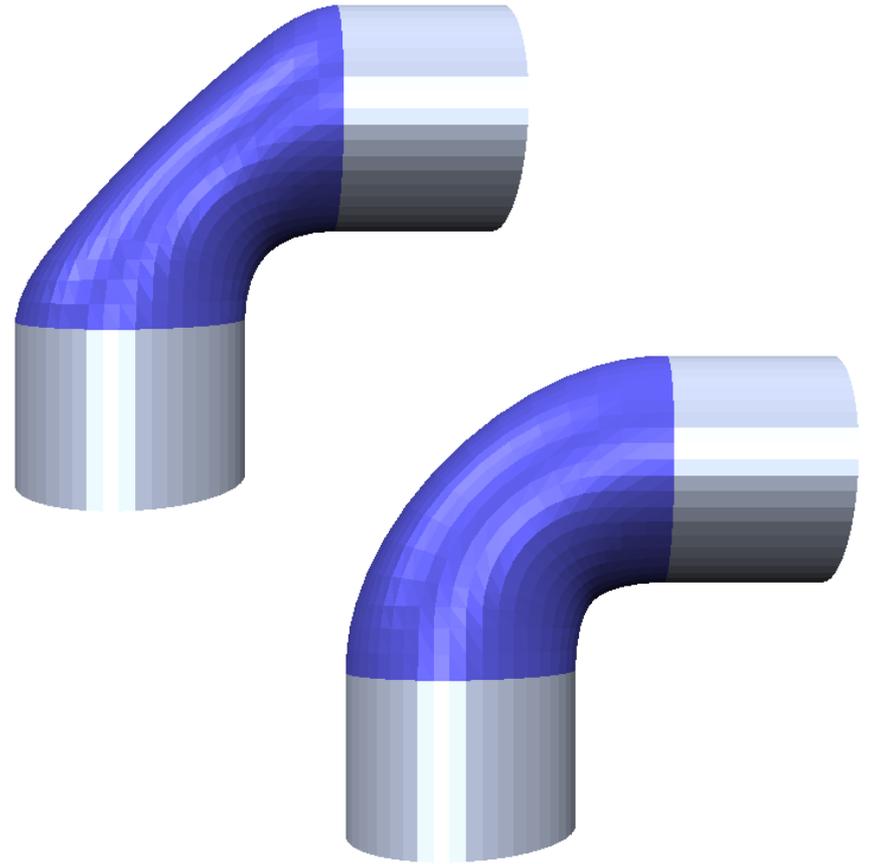
Mesh quality criteria

- Smoothness
 - Low geometric noise



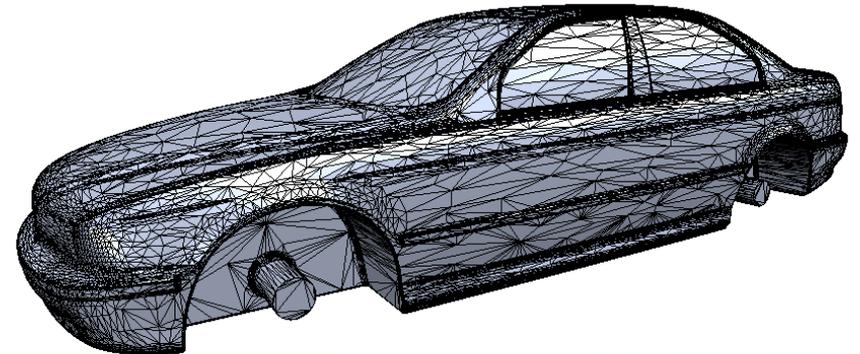
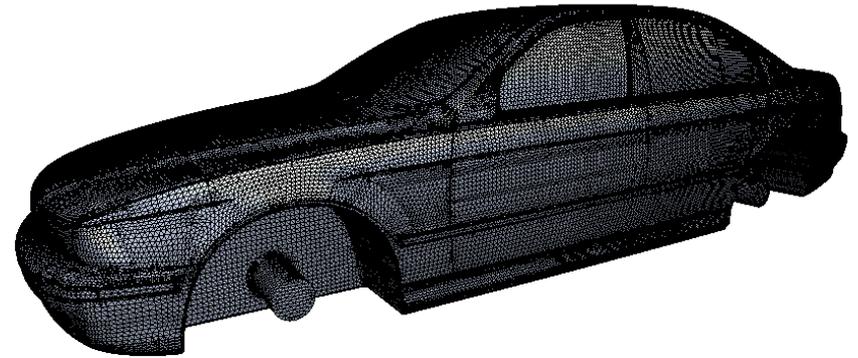
Mesh quality criteria

- Smoothness
 - Low geometric noise
- Fairness
 - Simplest shape



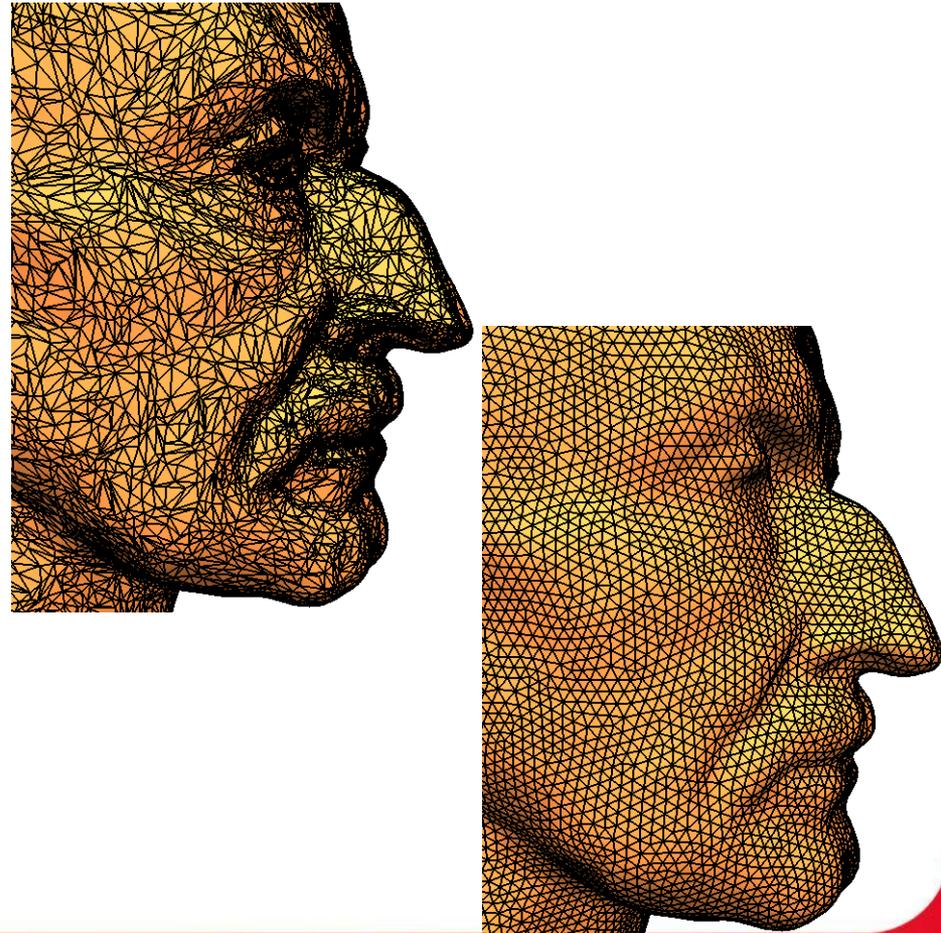
Mesh quality criteria

- Smoothness
 - Low geometric noise
- Fairness
 - Simplest shape
- Adaptive tessellation
 - Low complexity



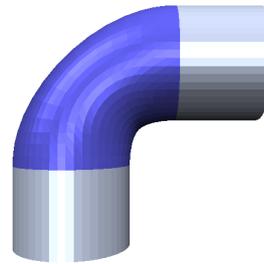
Mesh quality criteria

- Smoothness
 - Low geometric noise
- Fairness
 - Simplest shape
- Adaptive tessellation
 - Low complexity
- Triangle shape
 - Numerical robustness

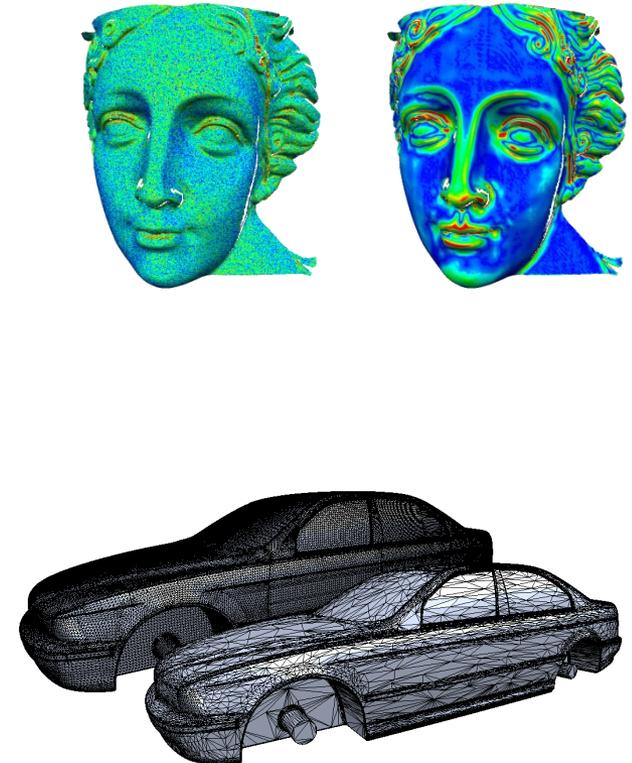


Mesh quality criteria

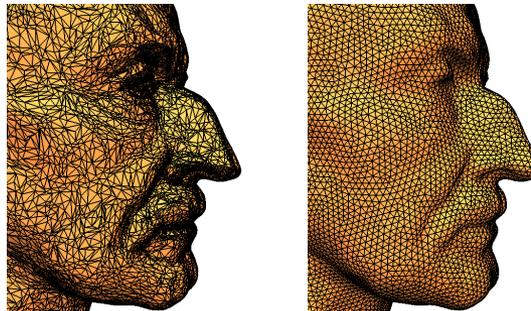
- Smoothness
 ➔ Smoothing



- Fairness
 ➔ Fairing



- Adaptive tessellation
 ➔ Decimation



- Triangle shape
 ➔ Remeshing