LM206 - Initiation à `Scilab`

Projet final - sujet 2 (à rendre avant le 06/01/2014)

Un rapport et un seul fichier `.sci` (ou `.sce`) doivent être rendus. Tout document rendu doit porter nom et prénom de l'étudiant. Tout exercice doit être séparé des autres et toute réponse commentée. La présentation et la lisibilité entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Partie 1 - Jeu de hasard.

On se propose ici de réaliser un petit jeu interactif. L'idée est la suivante : `Scilab` génère un entier aléatoire entre 1 et 10 inclus et l'utilisateur doit deviner ce nombre. Pour ce faire, le joueur donne des propositions et `Scilab` lui répond selon les deux cas de figure suivants :

- le nombre entré par l'utilisateur est différent de celui tiré par `Scilab`. Alors `Scilab` indique au joueur si le nombre proposé est supérieur ou inférieur à celui ciblé et invite le joueur à faire une nouvelle proposition.
- le nombre entré par l'utilisateur est celui tiré par `Scilab`. Dans ce cas, `Scilab` félicite le joueur et lui précise en combien de propositions il a trouvé la solution.

Question. Ecrire un programme `Scilab` qui génère ce jeu en utilisant les outils de votre choix pour le dialogue entre `Scilab` et l'utilisateur.

Partie 2 - Une histoire de sardines et de requins.

A Trieste, pendant la première guerre mondiale, suite aux événements, la pêche avait bien sûr fortement diminué. Le bureau des pêches avait alors constaté que, suite à cette diminution, la proportion de poissons du style requins, peu intéressants pour la consommation, avait considérablement augmenté par rapport aux poissons intéressants du style sardines. On demanda alors l'aide d'un scientifique qui modélisa le système requins-sardines-pêche par le système à deux équations différentielles suivants où $x_1(t)$ représente le nombre de sardines et $x_2(t)$ celui des requins :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & (a-\delta)\,x_1(t) \;-\; b\,x_1(t)\,x_2(t) \\ x_2'(t) & = & c\,x_1(t)\,x_2(t) \;-\; (d+\delta)\,x_2(t) \\ x_1(0)=x_1^0 \quad , & & x_2(0)=x_2^0 \end{array}\right. \tag{1}$$

où a, b, c, d et δ sont des réels positifs, $x_1(0)=x_1^0$, $x_2(0)=x_2^0$ les conditions initiales, et notre intervalle de temps d'étude est donné par $t\in[0,T]$ pour $T>0$ fixé.

Ce modèle (1) signifie que :

- $\delta \geq 0$ est le taux de pêche (les poissons de chaque espèce sont pêchés avec le même taux, et on a $\delta = 0$ en temps de guerre),

- en l'absence de requins les sardines prolifèrent, c'est le terme $x_1'(t) = a\, x_1(t)$,
- en l'absence de sardines les requins disparaissent, c'est le terme $x_2'(t) = -d\, x_2(t)$,
- le terme en $x_1(t)\, x_2(t)$, qui représente la rencontre des requins et des sardines, augmente le nombre de requins et diminue le nombre de sardines (car ces dernières sont mangées par les requins).

La but du projet est d'observer numériquement sous `Scilab`, à l'aide de ce modèle, l'influence du taux de pêche sur la proportion de sardines (évidemment, à partir d'un certain seuil de pêche, il n'y a plus de poissons, intéressants ou non, à pêcher).

La méthode d'Euler est une méthode d'approximation d'un problème d'équations différentielles donné sous la forme générique :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X'(t) & = & f(\,X(t)\,) \\ X(0) & = & X^0 \end{array} \right. \tag{2}$$

où $t \in [0, T]$, et f est une fonction de $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ où d est la dimension du problème.

Question 1. Ecrire dans votre rapport le modèle du projet (1) sous la forme (2). Définir également cette fonction sous `Scilab` (à vous de définir les paramètres d'entrée et sortie).

Pour approcher notre problème sur l'intervalle en temps $[0, T]$, on commence par découper celui-ci en une suite de valeurs $(t_k)_k$, pour $k = 0, \dots, N_T$, définie par

$$\left| \begin{array}{l} t_k = kh, \;\; k = 0, 1, \dots, N_T \\ h = \frac{T}{N_T} \end{array} \right.$$

où h est appelé le "pas de temps". On note alors X^k, le vecteur réel de taille d, approchant $X(t_k)$, c'est à dire la solution au temps t_k.

En utilisant l'idée d'approximation suivante :

$$\frac{X(t_{k+1}) \; - \; X(t_k)}{h} \;\; \approx \;\; X'(t_k) = f(\,X(t_k)\,),$$

on obtient le schéma numérique dit *d'Euler explicite* donné par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X^{k+1} & = & X^k \; + \; h\, f(\,X^k\,), \quad \forall k = 0, \dots, N_T \\ X^0 & = & X(0) \end{array} \right. \tag{3}$$

Question 2. Ecrire un programme `Scilab` qui admet en paramètres d'entrée T, N_T, X^0 et qui renvoie la suite des (X_k), pour $k = 0, \dots, N_T$, déterminée par la méthode (3) et associée au problème (1) étudié ici.

Question 3. Ecrire un deuxième programme qui résout le problème différentiel décrit par (1) à l'aide de la fonction `ode`.

Question 4. On considère à partir de maintenant les données suivantes :

$$a = 2, b = 0.4, c = 0.1, d = 1, T = 10, x_1^0 = 22, x_2^0 = 8.$$

En faisant varier N_T et $\delta = 0, 1, 2, 3$, comparez la qualité des résultats obtenus par les deux méthodes en représentant l'évolution des deux espèces, sardines et requins, en fonction du temps.

Question 5. En choisissant l'une des deux méthodes (motivez votre choix dans le rapport), considèrez de nouveau l'évolution des deux espèces en fonction du temps, pour différentes valeurs de $\delta \in [0, 3]$ de votre choix. Précisez, lorsque cette donnée est telle que les approximations des fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ semblent avoir un comportement périodique, et dans ce cas estimez leur valeur moyenne au cours d'une période. Commentez les résultats, en précisant quelles valeurs du taux de pêche confirment les observations rapportées au début de ce document.