Université Pierre et Marie Curie — Année 2013-2014
Licence — période 1

LM206 : Initiation à Scilab

8 Équations non linéaires

Cette séance traite de la résolution d'équations ou de systèmes d'équations avec l'instruction `fsolve` de `Scilab`.

Premiers exemples de résolution d'équations ou systèmes d'équations La commande `fsolve` permet de résoudre de manière approchée des systèmes d'équations du type $f(x) = 0$ où f est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On présente deux exemples afin de comprendre le fonctionnement de cette commande.

Exemple 1 Soit $f(x) = x^4 + x^3 - 5$. On peut montrer facilement que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle positive x_0 (expliquer comment). Cependant, il n'existe pas de méthode permettant de la calculer explicitement. Mais on peut en obtenir une excellente approximation en tapant simplement dans `Scilab` :

```
deff('y=f(x)','y=x^4+x^3-5'); x0=fsolve(1,f)
```

On obtient alors $x_0 \simeq 1.2961533$. Le premier argument de `fsolve` (ici, le réel 1) correspond à une valeur approchée connue de la solution à calculer permettant à `Scilab` d'initier sa recherche. Dans cet exemple, toute valeur strictement positive convient. À l'opposé, le choix de la valeur 0 donnera une solution fausse ($x_0 = 0$) et le choix d'une valeur négative conduira en général à la solution négative de l'équation $x^4 + x^3 - 5 = 0$ (en l'occurrence $-1.8239745\cdots$). Dans tous les cas, il sera donc préférable de vérifier que la valeur x_0 trouvée par `Scilab` est dans le domaine recherché (ici $\mathbb{R}^+$) mais aussi que c'est un bon choix de valeur initiale en vérifiant que $f(x_0)$ est proche de zéro.

Exemple 2 Soit $f(x_1, x_2) = (x_1^3 + x_2^3 - 3, x_1^2 + x_2^2 - 2x_2)$. On peut montrer que le système d'équations $f(x_1, x_2) = (0, 0)$ admet une unique solution dans le quart de plan $(x_1 > 0, x_2 > 0)$. Afin d'en obtenir une approximation, on peut taper dans `Scilab` :

```
deff('y=f2(x)','y=[x(1)^3+x(2)^3-3,x(1)^2+x(2)^2-2*x(2)]');
x=fsolve([1,1],f2);
f2(x)
```

On obtient alors $x \simeq (0.9587068, 1.2843962)$ et $f(x) \simeq (-0.4440892\,10^{-15}, 0)$ ce qui confirme la pertinence de la solution obtenue.

Exercice 1 [Équation scalaire]
Montrer graphiquement avec `Scilab` que l'équation

$$2\cos(x) - x = 0,$$

a une unique solution $x > 0$. Utiliser l'instruction `fsolve` de `Scilab` pour obtenir une valeur approchée de la solution.
Solution.

Exercice 2 [Système d'équations]
Montrer graphiquement que le système d'équations

$$\begin{cases} e^x - y = 0, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

a une unique solution (x, y) avec $x > 0$ et $y > 0$. Calculer cette solution.
Solution.

Calcul d'une position par GPS (Global Positioning System) Le GPS est un système de positionnement basé sur le connaissance avec une grande précision de la distance du récepteur à trois satellites (situés à des orbites de l'ordre de $28\,000\,km$).

Le recepteur (assimilé à un point P) reçoit d'un satellite S_1 des informations permettant de calculer sa distance d_1 à ce satellite (voir la figure 1). Notons $\Omega_1(d)$ l'ensemble des points de la terre à la distance d_1 du satellite S_1. On sait donc que $P \in \Omega_1(d_1)$. L'utilisation d'un deuxième satellite permet de dire que $P \in \Omega_1(d_1) \cap \Omega_2(d_2)$. Comme l'intersection de "courbes de niveaux" $\Omega_1(d_1)$ et $\Omega_2(d_2)$ n'est réduite à un seul point que dans le cas exceptionnel où ces courbes sont tangentes, l'utilisation d'un troisième satellite est nécessaire (et suffisante !) puisque

$$\Omega_1(d_1) \cap \Omega_2(d_2) \cap \Omega_3(d_3) = \{P\}.$$

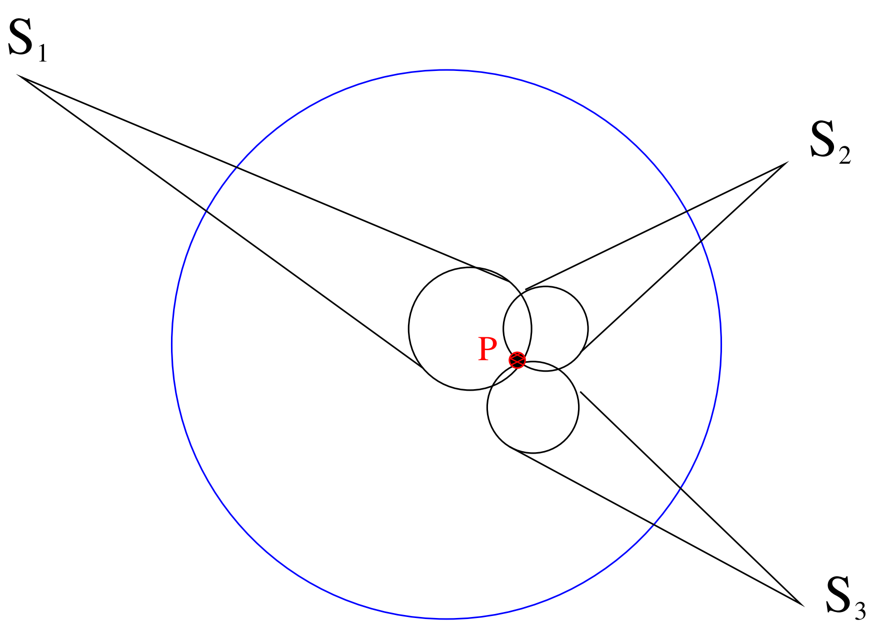

FIGURE 1 – Le recepteur P est déterminé comme étant l'intersection de trois courbes. Chacune des courbes est constituée de l'ensemble des points situés à la même distance que le point P d'un satellite donné.

Exercice 3 On suppose qu'à l'instant où les distances sont calculées, les trois satellites ont les positions suivantes dans un repère cartésien dont l'origine est le centre de la terre :

$$\begin{aligned}
S_1 &= (-11\,716.227\,778\,km,\ -10\,118.754\,628\,km,\ 21\,741.083\,973\,km) \\
S_2 &= (-12\,082.643\,974\,km,\ -20\,428.242\,179\,km,\ 11\,741.374\,154\,km) \\
S_3 &= (\ \ 14\,373.286\,650\,km,\ -10\,448.439\,349\,km,\ 19\,596.404\,858\,km).
\end{aligned}$$

Les distances respectives au récepteur ont été calculées et valent

$$d_1 = 22\,163.847\,742\,km, \quad d_2 = 21\,492.777\,482\,km, \quad d_3 = 21\,492.469\,326\,km.$$

Calculer avec la commande `fsolve` la position exacte P du récepteur. Que représente $\|P\|_2$? (On rappelle que le rayon de la terre est d'environ $6\,400\,km$.)
Solution.