LM206 : Initiation à Scilab

6 Programmation linéaire

Voici un exemple simple illustrant ce qu'est la programmation linéaire. Un boulanger fabrique de la brioche et du pain viennois. Il dispose pour cela de farine en quantité a (exprimée en kg par exemple), de beurre en quantité b et de sucre en quantité c. Le boulanger vend sa brioche à un prix p (exprimé en $euros$ par exemple) et son pain viennois à un prix q, que l'on supposera tous deux indépendants de la quantité vendue. La production est supposée linéaire, c'est-à-dire que le nombre de pains fabriqués dépend linéairement des quantités de matières premières utilisées ; on supposera que x unités de brioche et y unités de pain viennois nécessitent $u = 5x+4y$ unités de farine, $v = x+2y$ unités de beurre et $w = 3x + 2y$ unités de sucre. On définit les vecteur $\vec{x}$, $\vec{u}$, $\vec{a}$ et $\vec{p}$ représentant respectivement la quantité de pain produite, la quantité de matière première utilisée, le stock de matière première disponible et les prix de vente :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

<u>Contraintes.</u>
Montrer que la limitation des ressources se traduit par :

$$5x + 4y \leq a, \quad x + 2y \leq b, \quad 3x + 2y \leq c. \tag{1}$$

Écrire les contraintes (1) sous forme matricielle

$$M\vec{x} \leq \vec{a}. \tag{2}$$

<u>Optimisation.</u>
Les ventes de x unités de brioche et y unités de pain viennois rapportent au boulanger $C(\vec{x}) = px+qy$. On notera que

$$C(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle = \vec{p}^T \vec{x}. \tag{3}$$

Notre boulanger veut maximiser son chiffre d'affaire, tout en étant contraint de n'utiliser pour sa production que ce dont il dispose. On suppose qu'il vend tout ce qu'il produit. D'un point de vue mathématique, le problème consiste à maximiser la fonction $C(\vec{x})$ sur l'ensemble Ω des vecteurs $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ dont toutes les composantes sont positives et qui vérifient l'inégalité (2). Comme application numérique, on prendra $p = 40$, $q = 50$, $a = 80$, $b = 24$, et $c = 36$.

Exercice 1 Exécuter les instructions suivantes de `Scilab` et expliquer leur utilité dans la détermination du domaine Ω.

```
p=40; q=50; a=80; b=24; c=36;
x=linspace(0,50,100)'; z1=(a-5*x)/4;z2=(b-x)/2;z3=(c-3*x)/2;
plot2d(x,[z1 z2 z3]);
xbasc();x=linspace(0,20,100)'; z1=(a-5*x)/4;z2=(b-x)/2;z3=(c-3*x)/2;
plot2d(x,[z1 z2 z3]);xgrid();
```

Exécuter les instructions suivantes

```
for r=100:50:800, plot2d(x,[z1 z2 z3 (r-p*x)/q]), end;xgrid()
```

et en déduire que la solution optimale de notre problème est (à peu près) $x = 6, y = 9$. En déduire que le chiffre d'affaire du boulanger est d'environ 700. Pouvez-vous calculer plus précisément le chiffre d'affaire ? Il n'est pas demandé de faire des calculs exacts (et simples !) à la main, mais de se servir uniquement des graphiques obtenus par `Scilab`.
Solution.

Bien entendu, la démarche précédente est propre à la dimension deux (il y a deux inconnues (x et y) dans le problème) et on imagine mal l'appliquer à un problème à mille inconnues. Il existe cependant des algorithmes efficaces pour résoudre les problèmes de la programmation linéaire, par exemple l'algorithme de la fonction `karmarkar` de `Scilab`.

Exercice 2 Retrouver les résultats de l'exercice précédent en utilisant la fonction `karmarkar`. Utiliser la commande `printf` pour afficher la solution optimale, le chiffre d'affaires, la quantité de matière première disponible, la quantité de matière première utilisée, la quantité de matière première restante, ...
Solution.

Exercice 3 Modifier le problème précédent en supposant que le boulanger produit deux autres variétés de pain de plus, vendues respectivement aux prix r et s. La production de z unités du premier pain et de t unités du second nécessite l'utilisation de $u = 5x+4y+3z+t$ unités de farine, $v = x+2y+z+2t$ unités de beurre, et $w = 3x+2y+z+3t$ unités de sucre. Faire varier r et s et commenter les résultats obtenus. On prendra en particulier $(r, s) = (0, 0)$, $(r, s) = (55, 45)$ et $(r, s) = (20, 45)$.

```
r=55;s=45;
p=-[40;50;r;s];a=[80;24;36];M=[5,4,3,1;1,2,1,2;3,2,1,3];
MM=[M;-diag(ones(p))];aa=[a;zeros(p)];
x=linpro(p,MM,aa)
sol=x(1:length(p))
printf('solution optimale : \n');printf('%f  ',sol);
printf('chiffre d''affaires : \n');printf('%f  ',-p'*sol);
printf('matiere premiere disponible: \n');printf('%f  ',a);
printf('matiere premiere utilisee: \n');printf('%f  ',M*sol);
printf('matiere premiere restante: \n');printf('%f  ',a-M*sol);
```

Solution.