Université Pierre et Marie Curie — Année 2013-2014
Licence — période 1

LM206 : Initiation à `Scilab`

5 Systèmes linéaires

Il s'agit de résoudre des systèmes de n équations linéaires à n inconnues. On pourra au préalable vérifier par les fonctions `det` ou `rank` si le système en question possède une unique solution. [1] L'instruction `A\b`, où b est un vecteur de $\mathbb{C}^n$ et A une matrice carrée $n \times n$, calcule le vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ solution du système

$$Ax = b \tag{1}$$

On peut aussi utiliser la commande `linsolve` pour déterminer toutes les solutions du système (1). Ce qui est utile quand la matrice A n'est pas une matrice carrée ou est une matrice carrée singulière (non inversible). Nous utiliserons essentiellement l'instruction `A\b`.

5.1 Système carré

Exercice 1 On note $\mathbb{P}_n$ l'ensemble des polynômes algébriques degré inférieur ou égal à l'entier n. Étant donnés une fonction continue u et $n+1$ points distincts x_i de l'intervalle $[0,1]$, on cherche le polynôme $p_n \in \mathbb{P}_n$ tel que

$$p_n(x_i) = u(x_i) \qquad i = 0, \ldots, n.$$

En exprimant p_n dans la base canonique de $\mathbb{P}_n$

$$p_n(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j \, t^j, \tag{2}$$

montrer que le vecteur $a = (a_0, \ldots, a_n)^T$ est solution d'un système linéaire

$$Aa = u_n,$$

où $u_n = (u(x_0), \ldots, u(x_n))^T$ et A est la matrice (dite de Vandermonde)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que cette matrice est inversible.
2. Écrire un programme calculant cette matrice à partir de la donnée des $n+1$ points x_i et de la fonction u.

1. `det` calcule le déterminant d'une matrice et `rank` son rang, c'est à dire la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice.

3. On fixe $n = 5$ et $x_i = i/n$ pour $i = 0, \dots, n$. Déterminer les coefficients a_i (on prendra $u(x) = e^{\cos(5x)}$).
4. En utlisant l'aide des fonctions `poly` et `horner`, calculer les valeurs du polynôme p sur la grille de points définie par `X=linspace(0,1,100)'`.
5. Représenter le polynôme p et la fonction u sur le même graphique.

Solution.

5.2 Problème aux moindres carrés

On cherche toujours à approcher une fonction f par un polynôme, mais dans le cas où le degré du polynôme est petit par rapport au nombre de données. Du coup, nous allons donner un sens à la résolution de systèmes linéaires dont les matrices sont rectangulaires.

Étant donnés m points $(x_i)_{i=1}^m$ et m valeurs $(y_i)_{i=1}^m$, on cherche à déterminer un polynôme $p \in \mathbb{P}_{n-1}$ qui minimise la quantité

$$E = \sum_{i=1}^{m} |y_i - p(x_i)|^2, \tag{3}$$

où m est en général très grand par rapport à n. Développons le polynôme p dans une base de $\mathbb{P}_{n-1}$

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \varphi_j(x). \tag{4}$$

La fonction E définie par (3) est une fonction des n variables $(a_0, a_{1,} \cdots, a_{n-1})$. Cette fonction quadratique admet un minimum en l'unique point de $\mathbb{R}^n$ qui annule ses dérivées partielles $\frac{\partial E}{\partial a_j}$.

Exercice 2 Pour $n = 2$, la meilleure approximation est une droite appelée **droite des moindres carrés** ou **droite de régression linéaire**. Dans ce cas, on pose $p(x) = a_0 + a_1 x$ et la quantité à minimiser se réduit à

$$E = \sum_{i=1}^{m} |y_i - (a_0 + a_1 x_i)|^2.$$

1. Montrer que le couple (a_0, a_1) est solution du système 2×2

$$\begin{cases} m a_0 & + & (\sum_i x_i) a_1 & = & \sum_i y_i \\ (\sum_i x_i) a_0 & + & (\sum_i x_i^2) a_1 & = & \sum_i x_i y_i. \end{cases}$$

2. Soit $\Delta = m(\sum_i x_i^2) - (\sum_i x_i)^2$ le déterminant de ce système. Montrer que

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} (x_i - x_j)^2.$$

On en déduit que $\Delta = 0$ correspond au cas où les points sont alignés sur une droite verticale.

3. On suppose que les points x_i ne sont pas alignés sur une droite verticale. Calculer a_0 et a_1.
4. Écrire un programme calculant a_0 et a_1 à partir de la donnée des points x_i et des valeurs y_i.
5. Pour les valeurs suivantes [2]

x_i	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
y_i	939	972	1006	1022	1016	1011	1038	1047	1058	1071	1083

   Représenter sur un même graphique le nuage de points (x_i, y_i) et la droite des moindres carrés.
6. Vérifier les résultats en les comparant avec ceux obtenus avec la commande `reglin` (voir l'aide de cette commande).

Solution.

2. Ce tableau représente l'évolution de l'indice du coût de la construction en France (source INSEE). Le lecteur est invité à considérer d'autres valeurs. Faire une recherche sur le web par exemple.