

# Sujet de Stage

## Simulation de diffusions avec coefficients singuliers

Équipe-Projet : PASTA, Inria Nancy - Grand Est, IECL, Nancy  
Encadrantes : Madalina Deaconu et Sara Mazzonetto

### Description

L'objectif de ce stage est l'étude des *diffusions à seuil*, qui représentent ici une classe de processus stochastiques à trajectoires continues, solutions d'équations différentielles stochastiques (EDS, équations différentielles bruitées par un mouvement brownien) à coefficients (dérive et diffusion) singuliers. Le stage se concentrera sur des EDS unidimensionnelles à coefficients discontinus, par exemple constants par morceaux, ou des EDS qui font intervenir le temps local sous forme de dérive.

Ces processus sont utilisés souvent dans la modélisation du mouvement microscopique des particules dans un milieu poreux ou dans des modèles des mathématiques financières (certains modèles de volatilité locale). Les seuils agissent en effet comme des points de changement de régime ou des barrières semi-perméables et semi-réfléchissantes.

Les méthodes d'approximation classiques, comme par exemple la méthode d'Euler-Maruyama, ne sont pas adaptées à cette problématique car elles ne contrôlent pas les changements de régime du processus autour des seuils. Dans les dernières années, plusieurs méthodes de simulations d'EDS à seuil, dont les solutions sont souvent appelées diffusions biaisées, ont été développées.

Dans ces questions, on a besoin de simuler une variable  $X_T$  pour estimer, via Monte-Carlo, des quantités de la forme  $\mathbb{E}[h(X_T)]$ . Il n'est ainsi pas nécessaire de connaître toute la trajectoire mais uniquement  $X_T$ , et pour simuler la variable  $X_T$ , il suffirait de connaître sa loi.

Cette question est très difficile, cette loi est explicitement connue et exploitable pour des simulations (par exemple à l'aide d'une *méthode par rejet*) dans un nombre réduit de cas. Pour la même raison, il est rare de pouvoir simuler *exactement* (sans approximer) le "squelette" d'une trajectoire  $(X_0, X_1, \dots, X_T)$ . Il y a une quinzaine d'année, [1] introduit un algorithme de simulation *exacte* qui repose sur une *méthode par rejet rétrospective*. Cette méthode a été adaptée par différents auteurs (par exemple [5,6]) dans des cas particuliers des diffusions à seuils. Cependant cette approche n'est pas optimale d'un point de vue numérique et d'autres méthodes d'approximation sont nécessaires.

Les méthodes d'approximation le plus répandues passent par une discrétisation du temps. L'article récent [3], considère des EDS singulières, en construisant une discrétisation de l'espace avec des modèles de type Continuous-Time Markov Chain (CTMC).

L'objectif du stage sera d'étudier cette méthode. Dans une première étape on analysera la méthode de simulation décrite dans cette référence et on développera la méthode pour un mouvement brownien avec dérive constante ou constante par morceaux. Ensuite on implémentera numériquement la méthode pour l'illustrer sur des exemples et la comparer avec d'autres méthodes.

Dans une seconde étape, on étudiera de nouveaux modèles et on comparera avec d'autres méthodes de simulation. Nous allons considérer d'abord un modèle de Black-Scholes à seuil ou un modèle de volatilité locale pour lesquels on approximera le prix d'une option call de manière similaire à la méthode proposée en [4]. D'autres méthodes de simulation, comme la  $\varepsilon$ -strong approximation (e.g. [2,6]), seront aussi étudiées.

Une possible poursuite en thèse est envisageable.

## Compétences requises

Une formation en mathématiques appliquées et de bonnes bases en processus stochastiques sont importantes. Une formation aux logiciels de simulation et un goût pour les développements des algorithmes de simulation probabilistes (langages Matlab, Python) sont aussi demandés.

## Équipe d'accueil

Le stage sera réalisé dans l'équipe-projet PASTA d'Inria Nancy - Grand Est, à l'Institut Élie Cartan de Lorraine, à Nancy. Il sera encadré par Madalina Deaconu (IECL & Inria-PASTA) et Sara Mazzonetto (IECL & Inria-PASTA). L'équipe-projet PASTA est experte dans la modélisation stochastique, les méthodes de simulation probabilistes ainsi que l'analyse des données. Les travaux de l'équipe portent sur l'étude des processus aléatoires spatio-temporels et leurs applications. <https://team.inria.fr/pasta/fr/>

## Gratification de stage

Environ 550 euros par mois, selon la législation actuelle.

## Dossier de candidature

Lettre de motivation, une lettre de recommandation, Curriculum Vitae et les derniers bulletins de notes sont à adresser à

[Madalina.Deaconu@inria.fr](mailto:Madalina.Deaconu@inria.fr) et [Sara.Mazzonetto@univ-lorraine.fr](mailto:Sara.Mazzonetto@univ-lorraine.fr)

avant le 31 mars 2023. Le stage commencera en avril ou mai. Durée 5 à 6 mois.

## Références

- [1] Alexandros Beskos. Gareth O. Roberts. "Exact simulation of diffusions." Ann. Appl. Probab. 15 (4) 2422 - 2444, 2005.

- [2] Madalina Deaconu and Samuel Herrmann. “Strong approximation of Bessel processes.” *Methodology and Computing in Applied Probability*, 2022. <https://hal.science/hal-03244538> .
- [3] Kailin Ding and Zhenyu Cui. “ A General Framework to Simulate Diffusions with Discontinuous Coefficients and Local Times.” *Association for Computing Machinery* 32 (4) 1049-3301, October 2022. <https://dl.acm.org/doi/10.1145/3559541>
- [4] Kailin Ding, Zhenyu Cui, and Yongjin Wang. “A Markov chain approximation scheme for option pricing under skew diffusions.” *Quantitative Finance*, 21:3, 461-480, 2021.
- [5] Pierre Étoré and Miguel Martinez. “Exact simulation for solutions of one-dimensional Stochastic Differential Equations with discontinuous drift”. *ESAIM: Probability and Statistics*, Tome 18 (2014), pp. 686-702.
- [6] Murray Pollock. Adam M. Johansen. Gareth O. Roberts. “On the exact and  $\varepsilon$ -strong simulation of (jump) diffusions.” *Bernoulli* 22 (2) 794 - 856, 2016.