

Un résultat de reconstruction exacte pour TV sous une contrainte de type EDP

Kristian Bredies, David Vicente

Université de Graz

22 Mars 2017

Plan

- 1 Motivation: Quantitative Susceptibility Mapping (QSM)
- 2 Heuristique
- 3 Résultat théorique de reconstruction exacte
- 4 Numérique pour QSM
- 5 Conclusion

- **La Susceptibilité Magnétique χ** : une propriété intrinsèque d'un matériau liant l'aimantation \mathbf{M} et le champ magnétique \mathbf{H} via $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$.
- **QSM**: une modalité d'IRM qui a pour but d'imager la susceptibilité magnétique χ dans un volume $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.
- **Applications**: permettre le diagnostic de certaines maladies (Parkinson, Alzheimer, Calcification, etc.).
- **Principe**: exploiter l'information contenue dans la **phase** du signal mesuré, contrairement aux autres modalités qui exploitent son module.

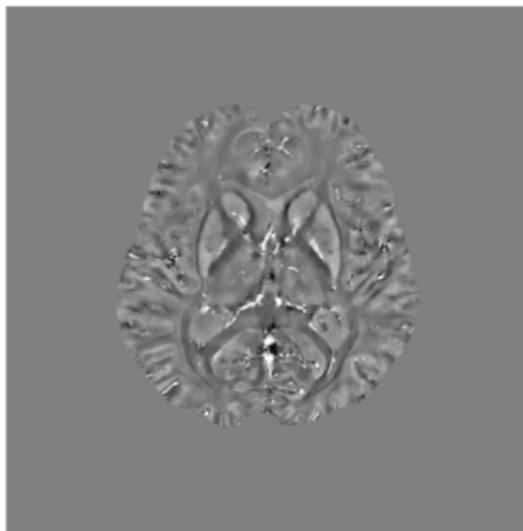
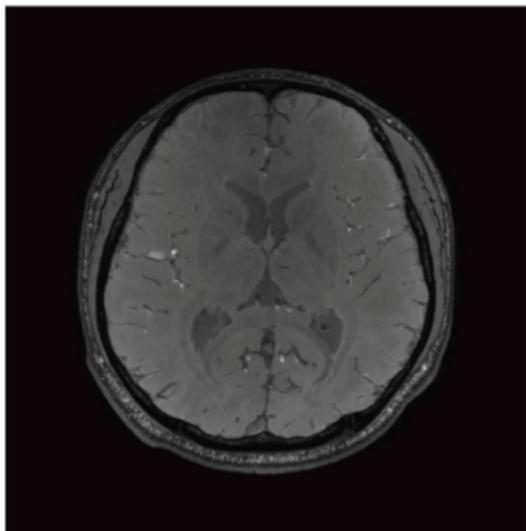


Figure : Image par Résonance Magnétique (gauche), Image de la Susceptibilité (droite)

Problème Inverse associé: les équations de Maxwell et la physique de l'IRM conduisent à ce que χ soit solution de l'EDP suivante:

$$\square \chi = -\Delta \psi.$$

où

- $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est la phase du signal mesuré $e^{i\psi}$,
- $\square = \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$,
- $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

QSM comme un problème de déconvolution: dans le domaine de Fourier $(k_x, k_y, k_z) \in \mathbb{R}^3$, l'EDP devient

$$(k_x^2 + k_y^2 - 2k_z^2) \mathcal{F}(\chi) = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \mathcal{F}(\psi),$$

et alors on a:

$$d * \chi = \psi$$

où d est appelé le *noyau du dipôle magnétique* et est égal à

$$d = \mathcal{F}^{-1}(P), \quad P(k_x, k_y, k_z) = \frac{k_x^2 + k_y^2 - 2k_z^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}.$$

- Problème inverse: QSM se réduit à la déconvolution par d .
- Simplicité formelle: il suffit de faire une division par $\mathcal{F}(d)$ dans le domaine de Fourier.

QSM est un problème formellement très simple, cependant cette approche souffre des défauts suivants:

- i) Seul le signal $e^{i\psi}$ est mesuré, il faut au préalable reconstruire le signal ψ .
→ Étape supplémentaire de *dépliage de la phase*.

- ii) Le passage dans le domaine de Fourier suppose que le signal mesuré ψ est mesuré dans l'espace \mathbb{R}^3 tout entier, or il ne l'est que dans un domaine borné Ω .
→ Étape supplémentaire de *suppression du champ de fond*.

QSM est un problème formellement très simple, cependant cette approche souffre des défauts suivants:

- iii) La division par $P(k_x, k_y, k_z) = \frac{k_x^2 + k_y^2 - 2k_z^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ est une **opération mal posée** car P s'annule sur le cône

$$C = \{(k_x, k_y, k_z) : k_x^2 + k_y^2 - 2k_z^2 = 0\}.$$

Ceci conduit, lorsque l'image est bruitée, à la création d'artefacts typiques pour QSM.

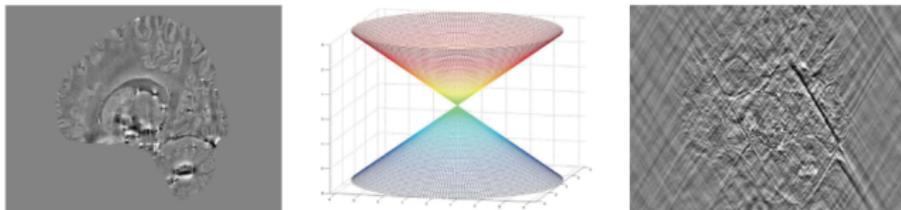


Figure : Image bruitée, C et les artefacts typiques de QSM

Nous souhaitons introduire une nouvelle approche

- qui ne contienne qu'une seule étape et soit bien posée,
- qui se situe dans un cadre pour la reconstruction d'images, c'est-à-dire l'espace des fonctions à variation bornée (BV),
- qui puisse intégrer *naturellement* la présence de bruit.

Le principe est de revenir à l'EDP initiale

$$\square \chi = -\Delta \psi, \text{ dans } \Omega.$$

- Grâce à la formule $\Delta \psi = \operatorname{div}(-ie^{-i\psi} \nabla(e^{i\psi}))$, le terme de droite est directement accessible depuis la mesure de $e^{i\psi}$.
- Contrairement au passage dans le domaine de Fourier, on se restreint au domaine Ω .

Structure des reconstructions possibles:

Si χ est solution de $\square\chi = \Delta\psi$ dans Ω , alors l'ensemble des reconstructions possibles est un espace affine de la forme

$$\{\chi + u : \square u = 0\}.$$

Afin de disposer d'un critère de sélection parmi toutes les reconstructions possibles, on introduit l'information a priori suivante:

Hypothèse:

On suppose que la reconstruction exacte χ est *simple*, i.e. constante par morceaux.

Plan

- 1 Motivation: Quantitative Susceptibility Mapping (QSM)
- 2 **Heuristique**
- 3 Résultat théorique de reconstruction exacte
- 4 Numérique pour QSM
- 5 Conclusion

Une notion cruciale: Le concept de front d'onde pour une EDP. En dimension 2, la fonction $u(x, y) = (f(x + y) + f(x - y))/2$ est solution de l'équation des ondes homogènes

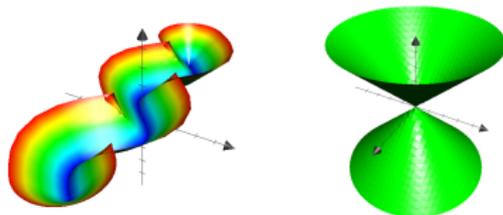
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(x, 0) = f(x)$$

Si f (resp. u) admet une singularité en x_0 (resp. $(x_0, 0)$), alors cette singularité va *se propager* le long des droites passant par $(x_0, 0)$ et de pente ± 1 . En particulier, les singularités de u appartiennent à un ensemble de droites dont le vecteur normal v appartient au cône d'isotropie de $y^2 - x^2$.

En dimension 3, si u est solution de l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

et u admet une singularité le long de $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, alors les singularités de u appartiennent à la *surface d'appui* de Γ .

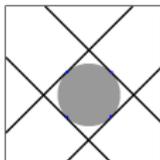


Title

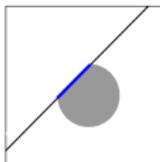
En particulier, les singularités de u appartiennent à une surface dont le vecteur normal v appartient au cône d'isotropie de $z^2 - y^2 - x^2$.

Par hypothèse, la solution χ que l'on souhaite reconstruire est constante par morceaux. Soit v un champ de vecteurs unitaire et orthogonal aux sauts de χ et soit \mathcal{C} le cône d'isotropie de l'opérateur des ondes. On distingue deux situations:

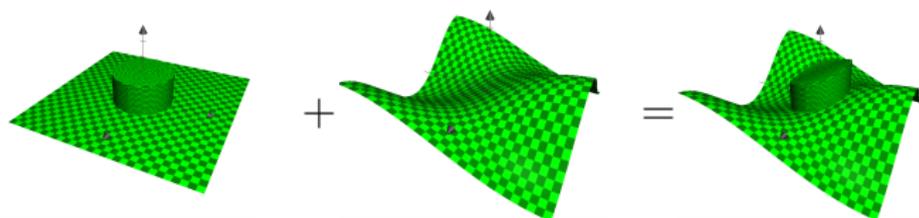
- 1 ou bien $\{x : v(x) \in \mathcal{C}\}$ est négligeable par rapport à la mesure de l'interface, on dit alors que χ est **régulier**,



- 2 dans le cas contraire on dit que χ est **singulier**.



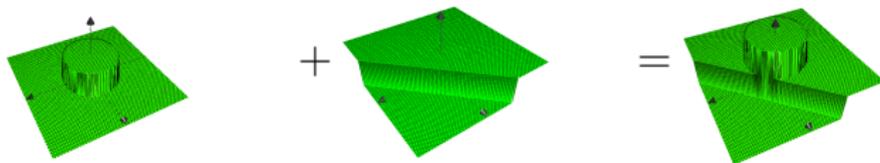
Si la fonction u est lisse, alors les singularités de $\chi + u$ sont les mêmes que celles de χ .



Si $\chi = \sum_i \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ et TV est la variation totale, on a

$$\begin{aligned}
 TV(\chi + u) &= \underbrace{\sum_i \alpha_i \text{Vol}^{d-1}(\partial A_i)}_{\text{ensemble des sauts}} + \underbrace{\int_{\Omega} |Du| dx}_{\text{partie régulière}}, \\
 &= TV(\chi) + TV(u), \\
 &\geq TV(\chi).
 \end{aligned}$$

Si la fonction u admet des singularités et la fonction χ est **régulière**, alors les singularités de χ et celles de u ont une intersection de mesure nulle.



Plus précisément, si $\chi = \sum_i \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$, on aura encore

$$TV(\chi + u) = TV(\chi) + TV(u) \geq TV(\chi).$$

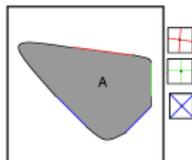
Heuristique: reconstruction exacte si χ est régulier

Si χ est simple, régulière et $\square\chi = -\Delta\psi$, alors on a

$$\chi \in \operatorname{Argmin}\{TV(\bar{\chi}) : \bar{\chi} \in BV(\Omega), \square\bar{\chi} = -\Delta\psi\}.$$

Lemme:

Soit $\chi = \mathbf{1}_A$, avec $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble de périmètre fini. Soit R_θ la rotation d'angle θ et de centre O . L'ensemble $\{\theta \in [0; 2\pi[: \chi \circ R_\theta \text{ est singulier}\}$ est (au plus) dénombrable.



Preuve: la famille $(\{x \in \partial A : \mathbf{v}(x) = (\cos(\theta), \sin(\theta))\})_{\theta \in [0; 2\pi[}$ est disjointe et $\mathcal{H}^1(\partial A)$ est fini.

Heuristique: généralité de l'hypothèse " χ est régulier"

Si l'orientation du domaine est choisie de manière aléatoire, alors χ est régulier p.s.

Plan

- 1 Motivation: Quantitative Susceptibility Mapping (QSM)
- 2 Heuristique
- 3 Résultat théorique de reconstruction exacte
- 4 Numérique pour QSM
- 5 Conclusion

Au sens Sobolev, le front d'onde de u est défini comme le complémentaire de l'ensemble des points $(x_0, \nu) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ tels qu'il existe une fonction $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\phi(x_0) \neq 0$, un voisinage conique $V \subset \mathbb{R}^d$ de ν et une suite de constantes $(C_N)_{N \geq 0}$ qui vérifient

$$\mathcal{F}(\phi u)(\xi) \leq C_N(1 + |\xi|^2)^N, \text{ pour tout } \xi \in V, N \geq 0.$$

La notion de front d'onde contient une composante spatiale x_0 et une fréquentielle ν qui correspondent à la localisation et l'orientation des singularités de u .

Remarque: concept non opérationnel dans BV

Cette définition n'est pas adaptée à notre problème car, à l'extérieur du support spatial du front d'onde, la fonction u doit être de classe C^∞ , ce qui est trop restrictif dans BV.

Soit \mathcal{A} un opérateur différentiel linéaire d'ordre $k \geq 0$ à coefficients constants

$$\mathcal{A} = \sum_{|\alpha| \leq k} a_{\alpha} \partial^{\alpha}, \quad a_{\alpha} \neq 0 \text{ pour un } |\alpha| = k. \quad (1)$$

L'adjoint formel de \mathcal{A} est défini par $\mathcal{A}^* = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} a_{\alpha} \partial^{\alpha}$.
 D'autre part, soit ψ une distribution dans Ω . Par définition, $\mathcal{A}\chi = \psi$ est satisfait pour $\chi \in \text{BV}(\Omega)$ dans le sens des distributions si et seulement si

$$\int_{\Omega} \chi \mathcal{A}^* \varphi \, dx = \psi(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

où $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions test dans Ω .

Pour $\xi \in \mathbb{R}^d$, on introduit

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \xi^\alpha \quad (2)$$

qui définit un polynôme homogène de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]$ de degré k .

Définition

On dit que $\chi \in BV(\Omega)$ est *régulier* pour P si on a

$$\mathcal{H}^{d-1}(\{x \in J_\chi : P(v_\chi(x)) = 0\}) = 0.$$

Sinon, χ est *singulier* pour P . D'autre part, $u \in BV(\Omega)$ est dit *purement singulier* pour P , si

$$P(v_u(x)) = 0 \quad \text{pour } \mathcal{H}^{d-1}\text{-presque tout } x \in J_u.$$

Avec cette notion de singularité associée à P , on peut énoncer le résultat suivant.

Théorème

Soit $u \in BV(\Omega)$ une solution faible de l'EDP $\mathcal{A}u = 0$. Alors, u est purement singulier pour P .

Ce résultat est l'extension de la notion de front d'onde à l'espace BV avec

- comme support spatial: J_u ,
- comme support fréquentiel : ν_u tel que

$$P(\nu_u(x)) = 0, \quad \text{pour } \mathcal{H}^{d-1}\text{-presque tout } x \in J_u.$$

Pour établir la propriété de reconstruction exacte, on suppose que les données $\psi = \mathcal{A}(\chi)$ proviennent d'une fonction constante par morceaux χ qui est régulière pour P . Même si cela n'est pas satisfait en général pour les fonctions constantes par morceaux, on peut montrer le résultat suivant:

Théorème

Pour $u \in BV(\Omega)$, la fonction $\chi \circ Q$ est régulière pour P presque tout $Q \in O_d(\mathbb{R})$.

Les résultats précédents nous permettent d'établir le résultat de reconstruction exacte suivant.

Théorème

Soit $u \in BV(\Omega)$ une fonction constante par morceaux et régulière pour P et soit $\psi = \mathcal{A}(\chi)$. Alors χ est une solution du problème variationnel suivant

$$\min\{\text{TV}(\bar{\chi}) : \bar{\chi} \in BV(\Omega), \psi = \mathcal{A}(\bar{\chi})\},$$

c'est-à-dire

$$\text{TV}(\chi) \leq \text{TV}(\chi + u),$$

pour tout $u \in BV(\Omega)$ tel que $\mathcal{A}(u) = 0$.

Les résultats *classiques* de reconstruction exacte pour ℓ^1 et TV utilisent le fait que la solution est parcimonieuse dans le domaine spatial.

À la différence des résultats classiques, le résultat présenté ici exploite la parcimonie du signal dans le domaine *total*: spatial et fréquentiel.

Plan

- 1 Motivation: Quantitative Susceptibility Mapping (QSM)
- 2 Heuristique
- 3 Résultat théorique de reconstruction exacte
- 4 Numérique pour QSM
- 5 Conclusion

Pour résoudre le problème inverse associé à QSM on considère le problème variationnel

$$\min\{\text{TV}(\bar{\chi}) : \square\chi = -\Delta\psi\}.$$

Le résultat de reconstruction exacte qu'on a introduit implique qu'en l'absence de bruit la reconstruction est exacte pour des fonctions simples.

Pour optimiser la capacité de reconstruction, on peut remplacer TV par une régularisation d'ordre supérieur comme TGV². Un résultat de reconstruction exacte est vérifié aussi pour TGV² mais sous une condition supplémentaire de régularité de J_χ : au moins de classe $C^{1,1}$.

Comme le modèle précédent suppose que les données ne sont pas bruitées, nous allons montrer comment le bruit peut être naturellement incorporé au modèle. En notant par ψ la mesure exacte et par $\eta \in L^2(\Omega)$ le bruit lors de la mesure, en introduisant $\tilde{\psi} = \psi + \eta$ dans l'EDP associée à QSM, on obtient

$$\square\chi + \Delta\eta = -\Delta\tilde{\psi}.$$

Nous devons estimer, au sens variationnel, η et χ . De manière classique, le bruit est mesuré avec une norme L^2 au carré qui est en balance avec le coefficient λ devant le terme de régularisation. Ceci conduit à la formulation suivante

$$\min_{\substack{\chi \in BV(\Omega), \\ \eta \in L^2(\Omega)}} \frac{1}{2} \|\eta\|_2^2 + \lambda \text{TV}(\chi) \quad \text{tel que} \quad \square\chi + \Delta\eta = -\Delta\tilde{\psi}.$$

(3)

Ceci est un problème entièrement convexe: minimisation d'une fonctionnelle convexe dans un domaine convexe. Il est donc adapté numériquement pour une implémentation primale-duale de recherche de point selle.

En ce qui concerne le problème inverse associé à QSM, les expérimentations ont prouvé que cette approche appartient au domaine de l'art en ce qui concerne la robustesse au bruit et la rapidité des calculs.

Plan

- 1 Motivation: Quantitative Susceptibility Mapping (QSM)
- 2 Heuristique
- 3 Résultat théorique de reconstruction exacte
- 4 Numérique pour QSM
- 5 Conclusion

En guise de remarque finale, on peut souligner des analogies formelles entre ce résultat et la propriété de reconstruction exacte de Candès-Romberg-Tao pour le Compress Sensing.

Compress Sensing		TV sous condition EDP
Condition "RIP"	\leftrightarrow	Régularité du bord
"overwhelming probability"	\leftrightarrow	presque sûrement pour Q
"Sparsity" du signal	\leftrightarrow	image simple
Cadre discret	\neq	Cadre continu

Question:

Peut-on expliquer ces analogies par un phénomène plus général qui relierait le cadre discret au cadre continu? Cela supposerait:

- un cadre théorique commun au sens des EDPs stochastiques,
- une notion de front d'onde de type BV pour les EDPs stochastiques.

K. Bredies, D.V., *A perfect reconstruction property for PDE-constrained total-variation minimization with application in Quantitative Susceptibility Mapping.*
<http://imsc.uni-graz.at/mobis/publications/SFB-Report-2017-001.pdf>

Merci de votre attention!