Internship proposal. **Optimal shape of non homogeneous bioreactors.**

Proposition de stage. **Optimisation de forme de bioréacteurs non homogènes.**

Mots-clés. Commande optimale, modèle du chémostat.

Dates. mars-septembre 2015 (3 à 6 mois).

Lieu. Équipe projet commune Inria-INRA MODEMIC, campus de la Gaillarde, Montpellier.

Présentation du sujet.
On considère un réacteur (enceinte à volume constant) dans laquelle se produit une réaction entre un substrat et une biomasse :

$$X + S \to X$$

On suppose que le problème admet une symétrie cylindrique selon l'axe des z. On note L la longueur du réacteur. $S(t,z)$ et $X(t,z)$ désignent les concentrations, respectivement en substrat et biomasse, à l'instant t et à la position $z \in [0,L]$. La fonction $z \to a(z)$, supposée régulière, donne l'aire d'une tranche du réacteur entre z et $z+dz$. Ainsi, le volume total du réacteur est

$$V[a()] = \int_{z=0}^{z=L} a(z)dz.$$

Le réacteur est alimenté en entrée en permanence par un flux de débit Q, chargé en substrat uniquement, à la concentration S_{in}. Le flux en sortie est identique, ce qui permet de garder le volume de la solution à l'intérieur du réacteur constant égal à V. Le bilan matière permet d'écrire les équations suivantes à l'intérieur du réacteur :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} = -\dfrac{\mu(S)}{k}X - \dfrac{Q}{a(z)}\dfrac{\partial S}{\partial z} + d\dfrac{\partial^2 S}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial X}{\partial t} = \mu(S)X - \dfrac{Q}{a(z)}\dfrac{\partial X}{\partial z} + d\dfrac{\partial^2 X}{\partial z^2} \end{cases}$$

où $s \to \mu(S)$ est une fonction de croissance, supposée régulière, positive, bornée et telle que $\mu(0) = 0$. $k > 0$ est un coefficient stoechiométrique. Les conditions aux bords $\{z = 0\}$ et $\{z = L\}$ sont déterminées par les interfaces de type membrane semi-perméable infiniment mince, ce qui donne lieu à des conditions aux bords de type Robin:

$$\begin{cases} \dfrac{Q}{a(0)}(S(t,0) - S_{in}) = d\dfrac{\partial S}{\partial z}(t,0) \\ \dfrac{Q}{a(0)}X(t,0) = d\dfrac{\partial X}{\partial z}(t,0) \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = d\dfrac{\partial S}{\partial z}(t,L) \\ 0 = d\dfrac{\partial X}{\partial z}(t,L) \end{cases}$$

On s'intéresse aux solutions stationnaires $z \to (\bar{S}(z), \bar{X}(z))$. Le dimensionnement d'un réacteur consiste à trouver une "forme" i.e. une fonction $z \to a(z)$ telle que $\bar{S}(L) = S_{ref}$, où $S_{ref} << S_{in}$ est fixé.

Objectifs du stage.
Le dimensionnement optimal pour un critère d'encombrement minimal, consiste à chercher, parmi toutes les solutions $a(\cdot)$ admissibles, celle(s) qui minimise(nt) le volume total $V[a()]$.

On utilisera les outils de la théorie de la commande optimale (Principe du Maximum de Pontryagin, Équation d'Hamilton-Jacobi-Belleman) pour caractériser les formes optimales selon différentes fonctions $\mu(\cdot)$, à l'aide de développements analytiques et numériques.

Des extensions au cas des réacteurs avec recirculation de la biomasse et au cas particulier d'une diffusion négligeable pourront être envisagées.

Profil recherché. M1, M2 ou diplôme d'ingénieur en mathématiques appliquées. Pré-requis en systèmes dynamiques (équations différentielles) et en optimisation. Goût pour la simulation numérique (Matlab, Scilab, Maple...)

Rémunération. Indemnités de stage selon les règles en vigueur dans les EPST.

Contact. Alain Rapaport, directeur de recherche. E-mail : `rapaport@supagro.inra.fr`

Références.

D. Dochain and P. Van Rolleghem. *Dynamical Modelling and Estimation in Wastewater Treatment Processes.* IWA Publishing, 2001.

D. Lieberzon. *Calculus of variations and optimal control theory: a concise introduction.* Princeton University Press, 2011.

H. Smith and P. Waltman. *The theory of the chemostat.* Cambridge 1995.