Problème de Zermelo et problème de temps minimal en micromagnétisme

Modèle EDP Landau-Lipshitz

micromagnétisme $\longmapsto$ Echantillon

$m(t)$: moment magnétique $\in S^2$

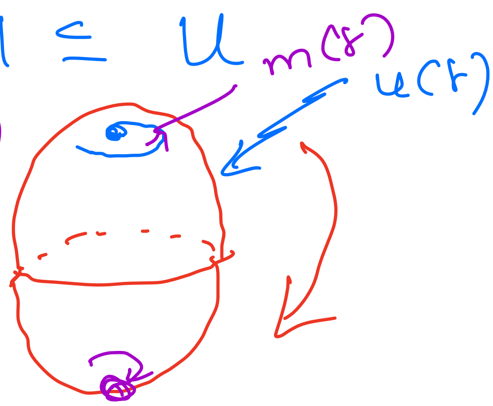
paramètre

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \wedge h(m) - \alpha\, m \wedge (m \wedge h(m))$$

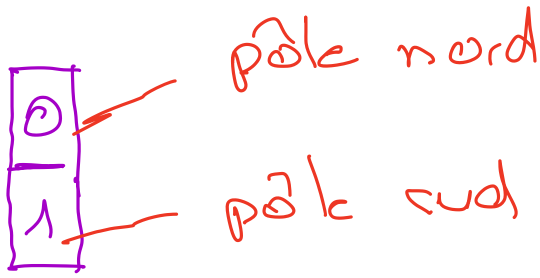
avec $h(m) = -Dm + \boxed{h_{ext} = u(t)}$

- D : $\mathrm{diag}(d_1, d_2, d_3)$ $\quad 0 \leq d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq 1$
- $|u| \leq U$

stable



stable



- <u>Renverser la magnétisation</u> $\quad$ pôle N $\to$ pôle S

Problème d'accessibilité $N \longrightarrow S$ en temps minimal

Après renormalisation des paramètres :

$$0 \leq d_1 \leq d_2 \leq d_3 \qquad |u| \leq 1$$

Le système de Landau-Lipshitz s'écrit :

$$\frac{dq}{dt} = F_0(q) + \sum_{i=1}^{2} u_i F_i(q) \qquad u_1^2 + u_2^2 \le 1$$

• $F_1 = \dfrac{\partial}{\partial r}$ $\qquad F_2 = \dfrac{1}{m(r)} \dfrac{\partial}{\partial \theta}$

Coordonnées polaires sur S^2

$g = dr^2 + \sin^2 r \, d\theta^2$ $\qquad q = (r, \theta)$

métrique : courbure constante

• $F_0(q)$ = dérive

$$F_0(q) = \mu_1(q) \frac{\partial}{\partial r} + \mu_2(q) \frac{\partial}{\partial \theta}$$

μ_1 : vertical

μ_2 : horizontal

Problème de navigation Carathéodory-Zermelo 1931

PMP $\qquad H = \underbrace{p \cdot F_0}_{H_0} + u_1 \underbrace{p \cdot F_1}_{H_1} + u_2 \underbrace{p \cdot F_2}_{H_2}$

u doit maximiser H avec la contrainte $|u| \le 1$

Soit $\qquad u_i = \dfrac{H_i}{(H_1^2 + H_2^2)^{1/2}}$

$$H = H_0 + \sqrt{H_1^2 + H_2^2} + p^0$$

variable duale du temps

- Temps minimal $p^0 = -1$ hyperbolique
- Temps maximal $p^0 = +1$ elliptique

$p^0 = 0$: cas anormal ou exceptionnel

Travaux précédents

- Alouges, Beauchard

$L^\infty \longrightarrow L^2$ $\quad H = H_0 + \frac{1}{2} \sum H_i^2$

Gap

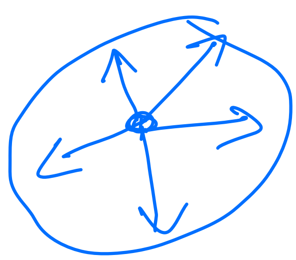
Classification

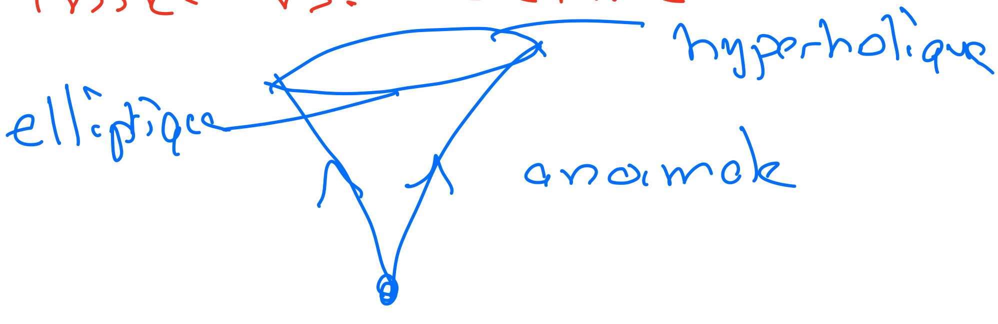
- $\|F_0\|_g < 1$: courant faible
  Finsler
- $\|F_0\|_g > 1$: courant fort Zermelo
- $\|F_0\|_g = 1$: courant modéré

Calculs $\quad \|F_0\|_g^2 = (\mu_1 \ \mu_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$

Soit $\quad \|F_0\|_g = 1 \iff \mu_1^2 + \sin^2 r \, \mu_2^2 = 1$

Géométrie : Finsler vs. Zermelo





Résultat accessibilité

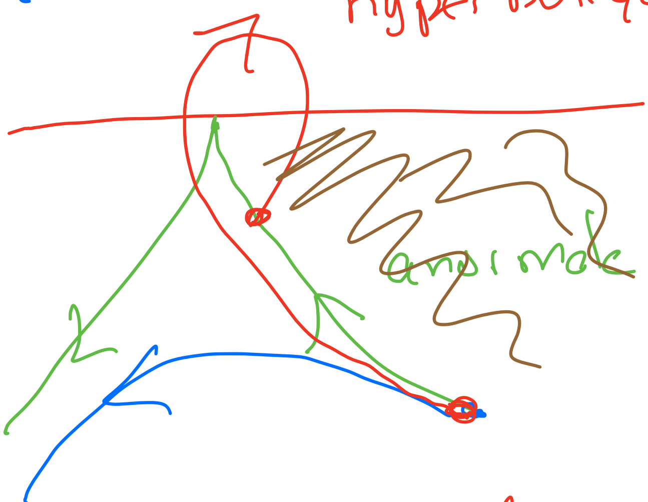
- Cas Finsler : O.K.
- Cas Zermelo :

  Complexe : étudier la barrière $\|F_0\|_g = 1$

Résultat de classification des géodésiques qui généralise les observations de Zermelo-Carathéodory dans le problème historique

hyperbolique

Courant faible



$\|F_0\|_g = 1$

Courant fort

Génériquement : Les anormales se réfléchissent sur la barrière : point d'inflexion cusp

- Les elliptiques ne franchissent pas la barrière.
- Les hyperboliques peuvent traverser et faire une boucle.

L'optimalité est perdue avec la seconde $\cap$ avec l'anormale et la fonction valeur temps minimale est discontinue.

- Cela correspond à une nouvelle notion de point conjugué le long de l'anormale.

Remarque C'est la situation générique que nous avons détectée

Mais il y a des singularités plus complexes que nous avons classifiées BB-JR.

Explication : intersection entre les 2 directions anormales au voisinage de $\|F_0\|_g = 1$

Symétrie et Intégrabilité

- Cas de révolution

$\mu_1(r)$, $\mu_2(r)$: courant indépendant de θ

Les barrières sont des cercles de révolution sur S^2

C'est le cas $\boxed{\lambda_2 = \lambda_3}$

c'est à dire l'ellipsoïde de l'échantillon est de révolution

Résultats fins

- Etude générale très complexe car F_0 s'interprète comme une perturbation de la métrique "plate"

1979 Annals of Maths Glück

et d'après un résultat de Glück on peut déjà dans le cas Riemannien C^∞ obtenir un cas avec un nombre infini de branches en perturbant un peu la métrique sur l'équateur.

Scattering of geodesics fields

Ici on peut calculer cette complexité en calculant $\|F_0\|_g = 1$

$$(\alpha'^2+1)\sin^2 r\Big[(\gamma_2-\gamma_3)^2\cos^2\theta\sin^2\theta + \cos^2 r\big(\gamma_1-\gamma_3-(\gamma_2-\gamma_3)\cos^2\theta\big)^2\Big] = 1$$

Polynôme trigonométrique en

$$\begin{cases} X = \sin^2 r \\ Y = \sin^2\theta \end{cases} \qquad \boxed{P(X,Y)=1}$$

Theorem

- $\gamma_2 < \gamma_3$: a solution exist if

$$\frac{4}{(\alpha'^2+1)(\gamma_1-\gamma_3)^2} \leq 1 \qquad (*)$$

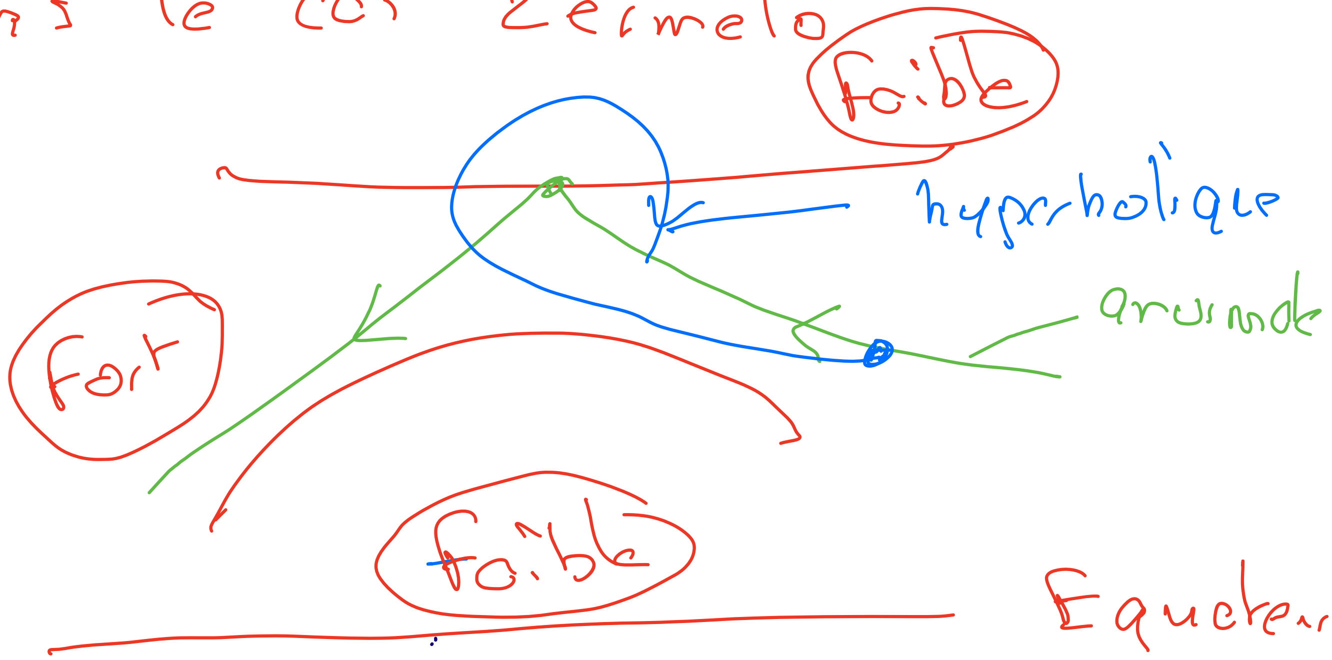
- $\gamma_2 = \gamma_3$ $(*)$ C.N.S. existence de solutions

Simulations numériques

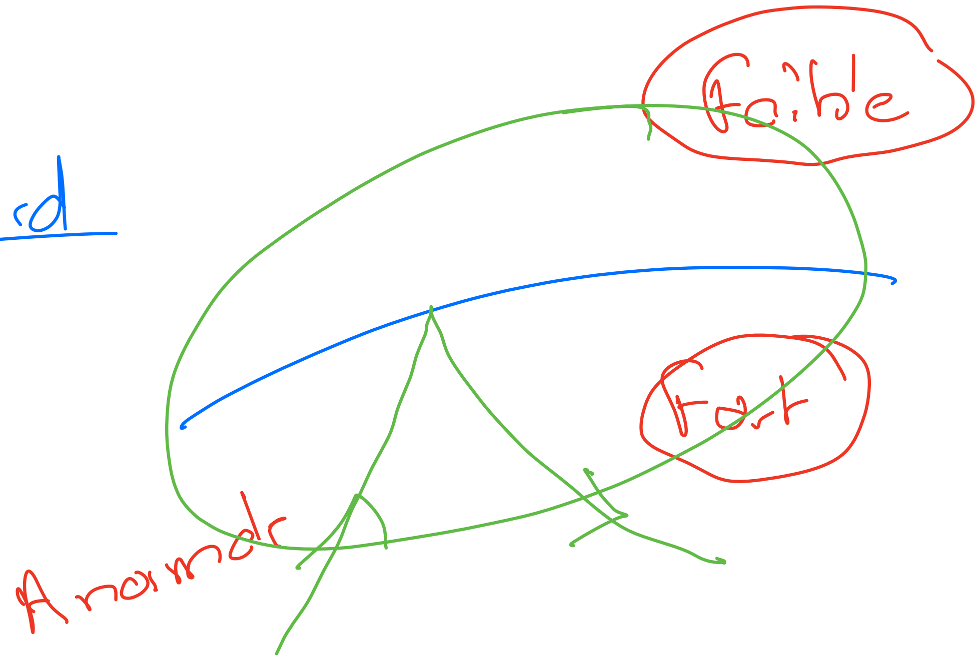
- Cut et conjugate loci
  Cas Finsler.
- Bifurcations $\|F_0\|_g = 1$

dans le cas Zermelo

ex.



Avec le billard



Détails

- B.B., Cots, Privat Trélat AIMS 24
- B.B., Cots, Privat : préprint