Perturbations de problèmes de contrôle optimal sous contraintes de contrôle

François Chaplais
9 Mars 2021

Rappel sur la variation seconde (Bryson et Ho, 1969)

Soit un coût à minimiser:

$$J(u) = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} L(x, u, t)dt \quad (1)$$

sous la dynamique:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t),\ x(0) = x_0$$

Introduction du « Lagrangien »

Dans l'expression (1) du coût on introduit un « Lagrangien » adapté à la dynamique:

$$J = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} \{L(x, u, t) + \lambda(t)^T (f(x, u, t) - \frac{dx}{dt})\} dt \,.$$

En introduisant l'Hamiltonien comme d'habitude et

en intégrant $\lambda \frac{dx}{dt}$ par parties, on obtient

$$J = \varphi(x(t_f), t_f) - \lambda^T(t_f) x(t_f) + \lambda^T(0) x(0) + \int_0^{t_f} \{H(x, u, \lambda, t) + \frac{d\lambda}{dt}^T x\} dt$$

Développement de Taylor à l'ordre 2

On introduit des petites variations δx sur l'état et δu sur la commande.
Ces deux variations sont pour l'instant indépendantes.
Un développement de Taylor du coût au second ordre donne

Développement de Taylor à l'ordre 2

$$\delta J = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t_f), t_f) - \lambda^T(t_f)\right] \cdot \delta x(t_f) + \lambda^T(0) \cdot \delta x(0) + \int_0^{t_f} \left[(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{d\lambda}{dt}^T) \cdot \delta x(t) + \frac{\partial H}{\partial u} \cdot \delta u(t) \right] dt$$

$$+\frac{1}{2}\delta x(t_f)^T \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x(t_f), t_f) \cdot \delta x(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left[\delta x(t)^T \;\; \delta u(t)^T\right] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} & \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta u(t) \end{bmatrix} dt\,.$$

Développement de Taylor à l'ordre 2

Condition finale

$$\delta J = \boxed{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t_f), t_f) - \lambda^T(t_f)\right]} \cdot \delta x(t_f) + \lambda^T(0) \cdot \delta x(0) + \int_0^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{d\lambda}{dt}^T\right) \cdot \delta x(t) + \frac{\partial H}{\partial u} \cdot \delta u(t) \right] dt$$

$$+ \frac{1}{2}\delta x(t_f)^T \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x(t_f), t_f) \cdot \delta x(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left[\delta x(t)^T \;\; \delta u(t)^T\right] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} & \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta u(t) \end{bmatrix} dt \,.$$

Développement de Taylor à l'ordre 2

Condition finale

Zéro

$$\delta J = \boxed{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t_f), t_f) - \lambda^T(t_f)\right]} \cdot \delta x(t_f) + \lambda^T(0) \cdot \boxed{\delta x(0)} + \int_0^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{d\lambda^T}{dt}\right) \cdot \delta x(t) + \frac{\partial H}{\partial u} \cdot \delta u(t) \right] dt$$

$$+\frac{1}{2}\delta x(t_f)^T \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x(t_f), t_f) \cdot \delta x(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left[\delta x(t)^T \;\; \delta u(t)^T\right] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial u^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta u(t) \end{bmatrix} dt\,.$$

Développement de Taylor à l'ordre 2

Condition finale

Zéro

Équation adjointe

$$\delta J = \boxed{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t_f), t_f) - \lambda^T(t_f)\right]} \cdot \delta x(t_f) + \lambda^T(0) \cdot \boxed{\delta x(0)} + \int_0^{t_f} \left[\boxed{\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{d\lambda^T}{dt}\right)} \cdot \delta x(t) + \frac{\partial H}{\partial u} \cdot \delta u(t) \right] dt$$

$$+ \frac{1}{2} \delta x(t_f)^T \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x(t_f), t_f) \cdot \delta x(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[\delta x(t)^T \;\; \delta u(t)^T\right] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial u^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta u(t) \end{bmatrix} dt \, .$$

Développement de Taylor à l'ordre 2

Condition finale

Zéro

Équation adjointe

$$\delta J = \boxed{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t_f), t_f) - \lambda^T(t_f)\right]} \cdot \delta x(t_f) + \lambda^T(0) \cdot \boxed{\delta x(0)} + \int_0^{t_f} \left[\boxed{\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{d\lambda}{dt}^T\right)} \cdot \delta x(t) + \boxed{\frac{\partial H}{\partial u} \cdot \delta u(t)}\right] dt$$

$$+\frac{1}{2}\delta x(t_f)^T \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x(t_f), t_f) \cdot \delta x(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left[\delta x(t)^T \ \delta u(t)^T\right] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} & \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta u(t) \end{bmatrix} dt\,.$$

Si δu est libre, alors l'annulation du premier ordre implique $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$

Nouvelle formulation de δJ

$$\frac{1}{2}\delta x(t_f)^T \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x(t_f), t_f) \cdot \delta x(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \begin{bmatrix}\delta x(t)^T & \delta u(t)^T\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial u^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\delta x(t) \\ \delta u(t)\end{bmatrix} dt \quad (2)$$

pour <u>toute</u> variation $\delta x(t)$ et $\delta u(t)$
telles que les variations des termes du premier ordre restent nulles.

Formulation de l'analyse post-optimale

On suppose qu'on varie la condition initiale $x(t_0)$ par un δx_0
sur la trajectoire optimale,
tout en maintenant les variations premières nulles.

Variation de la condition de stationnarité

En prenant des notations transparentes pour les dérivées partielles, on doit avoir

$$H_{ux}\delta x + H_{uu}\delta u + H_{u,\lambda}\delta\lambda = 0$$

soit

$$H_{ux}\delta x + H_{uu}\delta u + f_u^T\delta\lambda = 0$$

Si H_{uu} est inversible, on en déduit le feedback

$$\boxed{\delta u^* = -H_{uu}^{-1}\left(H_{ux}\cdot\delta x + f_u^T\cdot\delta\lambda\right)} \quad (3)$$

Variation de la dynamique

Au premier ordre on a

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = f_x \delta x + f_u \delta u$$

Compte tenu du feedback (3) on obtient

$$\boxed{\frac{d(\delta x)}{dt} = (f_x - f_u H_{uu}^{-1} H_{xu}) \cdot \delta x - f_u H_{uu}^{-1} f_u^T \cdot \delta \lambda} \quad (4)$$

Variation de l'équation adjointe

De même pour $\delta\lambda$ on obtient

$$\boxed{\frac{d(\delta\lambda)}{dt} = (-H_{xx} + H_{xu}H_{uu}^{-1}H_{ux})\delta x + (-f_x^T + H_{xu}H_{uu}^{-1}f_u^T)\delta\lambda} \quad (5)$$

avec la condition finale

$$\boxed{\delta\lambda^T(t_f) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x(t_f), t_f) \cdot \delta x(t_f)} \quad (6)$$

Résumé

Pour simplifier, on pose

$$A(t) = f_x - f_u H_{uu}^{-1} H_{xu}$$
$$B(t) = f_u H_{uu}^{-1} f_u^T$$
$$C(t) = H_{xx} - H_{xu} H_{uu}^{-1} H_{ux}$$

Résumé

Les équations (4) (5) (6) s'écrivent

$$\begin{aligned}\frac{d(\delta x)}{dt} &= A(t)\delta x - B(t)\delta\lambda \\ \frac{d(\delta\lambda)}{dt} &= -C(t)\delta x - A^T(t)\delta\lambda\end{aligned}$$

avec la condition initiale

$$\delta x(0) = \delta x_0$$

et la condition finale mixte

$$\delta\lambda^T(t_f) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x(t_f), t_f)\delta x(t_f)$$

Remarque

Les conditions précédentes garantissent l'annulation des termes du premier ordre dans le coût δJ.
Ce sont les conditions d'optimalité en *boucle ouverte* d'un problème linéaire quadratique.

Remarque

On va le résoudre en *boucle fermée*!

Résolution en boucle fermée

On sait que l'état adjoint est proportionnel à l'état primal, soit $\delta\lambda(t) = S(t)\delta x(t)$.
En différentiant cette équation et en utilisant les deux dynamiques,
on obtient

$$\frac{dS}{dt}(t) + S(t)A(t) + A(t)^T S(t) + C(t) - S(t)B(t)S(t) = 0$$

avec la condition finale

$$S(t_f) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x(t_f), t_f)$$

Résolution en boucle fermée

En posant $R = S^{-1}$ on obtient l'équation de Riccati

$$\frac{dR}{dt}(t) - R(t)A^T(t) - A(t)R(t) + B(t) - R(t)C(t)R(t) = 0$$

avec la condition finale

$$R(t_f) = {\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}}^{-1} (x(t_f), t_f)\,.$$

Pilotage autour du guidage

On sait que δu est en feedback linéaire sur δx et $\delta\lambda$:

$$\delta u^* = -H_{uu}^{-1}\left(H_{ux}\cdot\delta x + f_u^T\cdot\delta\lambda\right) \quad (3)$$

On peut éliminer $\delta\lambda$ en utilisant S

ou éliminer δx en utilisant R

après avoir résolu l'équation de Riccati correspondante.

On obtient un pilotage en boucle fermée

autour du guidage solution du problème d'origine.

Contrainte de contrôle

En pratique, le contrôle est contraint, par exemple
entre un minimum et un maximum.
Ceci peut se gérer en allouant une partie de la ressource en contrôle au guidage,
et le reste au pilotage.

Contrainte de contrôle

Problème: on ne sait pas résoudre le problème LQ
sous contrainte de contrôle
par une simple équation de Riccati,
car le contrôle n'est plus linéaire en l'état.

Dans la seconde partie de l'exposé, on s'intéressera à l'influence
de perturbations sur un problème sous contrainte de contrôle.

Condition suffisante d'optimalité

La perspective sera ici différente:
comment garantir, sans résoudre aucune équation différentielle
que δJ est positif?
Pour ce faire, on reste sur l'expression du contrôle (3) :

$$\delta u^* = -H_{uu}^{-1}\left(H_{ux}\delta x + f_u^T \delta\lambda\right)$$

Condition suffisante d'optimalité

Dans ces conditions, δJ se réécrit:

$$\delta J = \frac{1}{2}\delta x(t_f)^T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x(t_f), t_f)\delta x(t_f)$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[\delta x(t)^T (H_{xx} - H_{xu}H_{uu}^{-1}H_{ux})\delta x(t) + \delta\lambda(t)^T f_u H_{uu}^{-1} f_u^T \delta\lambda(t)\right] dt\,.$$

La variation du coût est donc positive pour tout δx, $\delta\lambda$ si la matrice de coût final est positive et si

$$\boxed{\begin{array}{c} H_{xx} - H_{xu}H_{uu}^{-1}H_{ux} \geq 0 \\ H_{uu} > 0 \end{array}}$$

(H_{uu} doit être inversible)

Ces conditions sont dites conditions fortes de Legendre-Clebsch.

Problème sous contrainte de contrôle

On reprend le problème présenté en diapositive 2,
et on exige de plus $u \in U^{ad}$
où U^{ad} est un convexe compact d'intérieur non vide.

Principe du minimum de Pontryaguine

Aux bords de U^{ad}, on ne peut faire varier δu dans toutes les directions. Par conséquent la condition de stationnarité de l'Hamiltonien H n'est plus nécessaire.

Principe du minimum de Pontryaguine

A la place, on a une condition de minimum:

$$\boxed{u(t) \text{ minimise en } u \; H(\lambda(t), x(t), u, t) \text{ sur } U^{ad}.}$$

Il n'est plus possible d'utiliser les calculs de variation précédents.

Fonction jauge

On suppose que 0 appartient à l'intérieur de U^{ad}.

La *fonction jauge* $G_{U^{ad}}$ de U^{ad} est définie par

$$G_{U^{ad}}(u) = \inf \left\{ \lambda \geq 0 \text{ t.q. } u \in \lambda U^{ad} \right\}$$

Cette jauge est une norme si et seulement si U^{ad} est symétrique par rapport à 0.

u est un point resp. intérieur, frontière ou extérieur de U^{ad} si et seulement si $G_{U^{ad}}(u) < 1$, $G_{U^{ad}}(u) = 1$ ou $G_{U^{ad}}(u) > 1$.

Si U^{ad} est défini par $c(u) \leq 0$, c convexe, la jauge est définie par

$$G_{U^{ad}}(u) = \inf \left\{ \lambda \geq 0 \text{ t.q. } c\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 0 \ , \ \forall i \right\}.$$

Pénalité

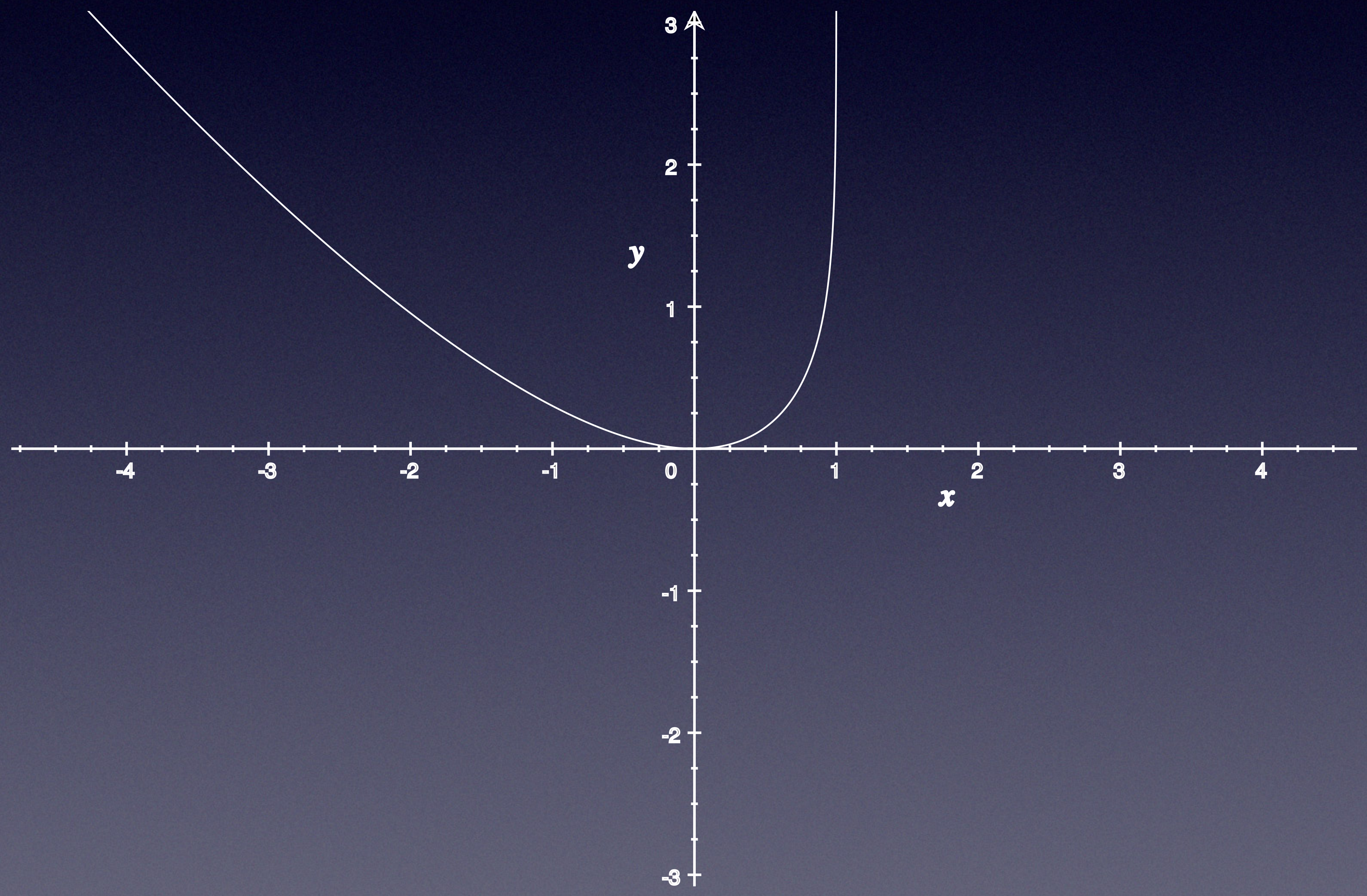
On se donne une fonction γ_u de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$ telle que

- γ_u est continument différentiable, strictement convexe et croissante
- $\lim_{u \uparrow 1} \gamma_u(u) = +\infty$
- $\gamma_u(0) = 0$; γ_u est continument différentiable en 0 avec $\gamma_u'(0) = 0$
- $\gamma_u'(u)$ est localement Lipschitz en $u = 0$

Pénalité

Exemple

$$\gamma_u(u) = -u\log(1-u)$$



Pénalité

La pénalité associée à la contrainte $u(t) \in U^{ad}$ est définie par

$$P_u(u) = \int_0^T \gamma_u \circ G_{U^{ad}}(u(t))dt$$

Méthode de points intérieurs (Bonnans et al 2003, Malisani et al 2014)

Au problème original (1) et à $\epsilon > 0$ on associe le problème pénalisé

$$\min_{u \in U^{ad}} K(u, \epsilon) = J(u) + \epsilon P_u(u)$$

Théorème 1: on suppose qu'on peut se ramener au cas où $x(t)$ reste dans un compact.
On suppose aussi que $\lim_{\alpha \uparrow 1} \gamma_u'(\alpha) = +\infty$.
Alors, si le problème pénalisé admet un optimum, celui-ci est intérieur à U^{ad}.

Méthode de points intérieurs (Bonnans et al 2003, Malisani et al 2014)

Remarque 1: pourquoi conserver la contrainte $u(t) \in U^{ad}$?
Parce que la pénalité est ineffective en dehors de U^{ad} !

Mais, une fois que l'on s'est ramené à un problème intérieur,
on peut, par un changement de variable, transformer le problème sous contrainte

$$u(t) \in \text{intérieur}(U^{ad})$$

à un problème sans contrainte, donc sur un *ouvert*.

Remarque 2: la pénalité γ_u donnée en exemple convient.

Méthode de points intérieurs (Bonnans et al 2003, Malisani et al 2014)

Théorème 2: on suppose que pour ϵ voisin de 0, le problème pénalisé a une solution $u^*(\epsilon)$. Alors

- $\lim_{\epsilon \downarrow 0} J(u^*(\epsilon)) = \inf_{u \in^{ad}} J(u)$
- $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon P_u(u^*(\epsilon) = 0$

La méthode de points intérieur converge donc vers la solution du problème nominal.
Sous des hypothèses de convexité classiques, on a convergence du contrôle et de l'état.

Perturbations régulières en contrôle optimal (Bensoussan 1988)

On *perturbe* le problème (1) (donc sans contrainte) en

$$\min_u \left[J_\varepsilon(u) = \int_0^T \left[L_0(x,u) + \varepsilon L_1(x,u) \right] dt \right] \quad (4.1)$$

avec la dynamique

$$\frac{dx}{dt} = f_0(x,u) + \varepsilon f_1(x,u),\ x(0) = X_0 \quad (4.2)$$

Il s'agit de perturbations en *amplitude*, ce qui signifie que toutes les fonctions mentionnées ici, ainsi que leur éventuelles dérivées, sont bornées.

Pour simplifier on supposera que, pour $0 \le \varepsilon < \varepsilon_1$, ces problèmes ont une solution unique $u^*(\varepsilon)$.

Perturbations régulières en contrôle optimal (Bensoussan 1988)

Point de vue

On ne peut (ou ne veut) pas résoudre le problème pour $\varepsilon > 0$.
Par contre on connaît $u^*(0)$.

Question:
la valeur de $J_\varepsilon(u^*(0))$ pour $\varepsilon > 0$ est elle proche de l'optimum?

C'est -à-dire: peut-on se contenter de résoudre le problème nominal pour contrôler le problème perturbé?

Perturbations régulières en contrôle optimal (Bensoussan 1988)

Théorème 3: sous les conditions fortes de Legendre-Clebsch, il existe $K \geq 0$ tel que, pour ε proche de 0, on ait

$$0 \leq J_\varepsilon(u^*(0)) - \inf_u J_\varepsilon(u) \leq K\varepsilon^{\boxed{2}}$$

Les conditions de Legendre-Clebsch sont uniformes en (x, u) et prises pour l'état adjoint optimal de J_0.
Il s'ensuit la convergence du contrôle et de l'état.

Perturbations régulières en contrôle optimal avec contrainte de commande (Maamria et al 2020)

On reconsidère le problème perturbé, mais avec une contrainte de commande

$$u(t) \in U^{ad}$$

A priori, la théorie de Bensoussan ne s'applique pas.

En fait, elle repose sur la condition de stationnarité $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$,

qui est satisfaite si l'optimum est intérieur.

D'où l'idée d'utiliser les méthodes de points intérieurs pour les perturbations sous contrainte de contrôle.

La famille de problèmes

On considère la famille de problèmes

$$\min_{u \in U^{ad}} J^r_\varepsilon(u) = \int_0^T [L_0(\sigma) + \varepsilon L_1(\sigma) + rP(u)]dt, \ r > 0 \quad (5)$$

sous la dynamique (4.2) et où

σ désigne le couple (x, u), ε le paramètre de perturbation et r le poids de la pénalité.

On désignera par la lettre p les divers états adjoints.

Position du problème

On sait (Bensoussan) que, pour $r > 0$, il existe K_r
tel que la perte d'optimalité soit bornée par $K_r\, \varepsilon^2$.

Si K_r est borné pour $r > 0$, on a gagné.

Considérations sur ε

En pratique on ne connaît pas bien les perturbations,
et *a fortiori* la famille, indexée par ε, des problèmes perturbés.

Mathématiquement, cela revient à dire qu'on prend $\varepsilon = 1$,
et la sous-optimalité est alors bornée par K_r.

Il convient donc de bien estimer K_r en fonction
des bornes que l'on connaît sur les perturbations.

Autrement dit, on fait du calcul d'*erreur*,
et non du calcul asymptotique.

Notations

Pour $\varepsilon = 0$, on note l'Hamiltonien $H_0^r(\sigma, p) = H_0(\sigma, p) + rP(u)$.

Pour $\varepsilon > 0$, on note l'Hamiltonien

$$H_\varepsilon^r(\sigma, p) = L_0(\sigma) + \varepsilon L_1(\sigma) + p^T \left[f_0(\sigma) + \varepsilon f_1(\sigma) \right] + rP(u) = H_0^r(\sigma, p) + \varepsilon H_1(\sigma, p).$$

On note u_ε^r, x_ε^r et p_ε^r le contrôle, état et état adjoint optimal.

Pour x et u quelconques, on note

$$\delta x^r = x - x_0^r \quad , \quad \delta u^r = u - u_0^r \quad , \quad \delta \sigma^r = \sigma - \sigma_0^r$$

et, pour les variables optimales,

$$\delta x_\varepsilon^r = x_\varepsilon^r - x_0^r \quad , \quad \delta u_\varepsilon^r = u_\varepsilon^r - u_0^r \quad , \quad \delta \sigma_\varepsilon^r = \sigma_\varepsilon^r - \sigma_0^r \quad .$$

Développement au second ordre avec reste intégral

Pour u quelconque on a, en développant selon
$\delta\sigma^r = \sigma - \sigma_0^r$ (écart à l'optimum non perturbé, mais pénalisé) :

$$J_\varepsilon^r(u) = \int_0^T \left[H_\varepsilon^r(\sigma_0^r, p_0^r) - p_0^{rT}\dot{x}_0^r\right] dt + \varepsilon \int_0^T \left[N^0(t)\cdot\delta u^r + N^1(t)\cdot\delta x^r\right] dt$$
$$+ \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 [\delta\sigma^r]\partial_{\sigma\sigma}H_\varepsilon^r(\sigma_0^r + \lambda\mu\delta\sigma^r, p_0^r)[\delta\sigma^r]^T \lambda \, d\lambda \, d\mu \, dt$$

avec

$$N^0(t) = \partial_u H_1(\sigma_0^r, p_0^r) \ , \ N^1(t) = \partial_x H_1(\sigma_0^r, p_0^r)$$

Écart sur les trajectoires pilotées par u_0^r

Dans ce qui précède, le terme d'ordre 0 fait intervenir x_0^r, trajectoire pilotée par u_0^r sur une dynamique non perturbée ($\varepsilon = 0$), et l'Hamiltonien H_ε^r .

Considérons maintenant X_0^r la trajectoire pilotée par le même contrôle mais avec une dynamique perturbée. Alors

$$\left\| X_0^r(t) - x_0^r(t) \right\| \leq \varepsilon F_1 q(t)$$

$$\text{avec } F_1 = \sup_{t \in [0,T]} \left\| f_1(\sigma_0^r(t)) \right\|, \; q(t) = \frac{1}{\Gamma}(e^{\Gamma t} - 1)$$

Écart sur le terme d'ordre 0

À r donné, on s'intéresse à la performance du contrôle u_0^r par rapport à u_ε^r.

À l'ordre 0, cela donne une erreur

$$M_0 \triangleq J_\varepsilon^r(u_0^r) - \int_0^T \left[H_\varepsilon^r(\sigma_0^r, p_0^r) - p_0^{rT}\dot{x}_0^r\right] dt \text{ . On a}$$

$$\boxed{|M_0| \leq \left(c_0 F_1^2 + c_1 \|N_1\|_\infty^2\right)\ \varepsilon^2}$$

où c_0 est proportionnel à l'intégrale de $q^2(t)$ (stabilité BIBO du système nominal), et au sup de $\partial_{xx}H_0^r = \partial_{xx}H_0$ et de $\partial_{xx}H_1$ le long de (σ_0^r, p_0^r).

On notera N_1 la norme $\|N_1\|_\infty$.

Pour $\varepsilon = 1$, on a une borne proportionnelle au carré des termes perturbatifs.

Remarque

Toutes ces quantités ne dépendent formellement pas de la pénalité, car ce sont toutes des dérivées en x des divers Hamiltoniens.

Quant à (σ_0^r, p_0^r), on peut en estimer une borne indépendante de la pénalité. En effet

- le contrôle est dans U^{ad} borné, donc l'état est aussi borné
- l'équation adjointe ne dépend pas de la pénalité

On a donc une borne indépendante de r.

Tout ceci serait faux si on avait une pénalisation sur l'état!

De plus, cette borne ne requiert que la solution du problème non perturbé.

Comparaison avec le coût optimal

Du fait que $J_\varepsilon^r(u_\varepsilon^r) \leq J_\varepsilon^r(u_0^r)$, on en déduit que

$$J_\varepsilon^r(u_\varepsilon^r) - \int_0^T \left[H_\varepsilon^r(\sigma_0^r, p_0^r) - p_0^{rT} \dot{x}_0^r\right] dt \leq M_0 \leq \left(c_0 F_1^2 + c_1 N_1^2\right) \varepsilon^2.$$

En utilisant le développement (exact) au second ordre de $J_\varepsilon^r(u_\varepsilon^r)$, on en déduit

$$\left(c_0 F_1^2 + c_1 N_1^2\right) \varepsilon^2 \geq \varepsilon \int_0^T \left[N^0 \delta u_\varepsilon^r + N^1 \delta x_\varepsilon^r\right] dt + \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \partial_{\sigma\sigma} H_\varepsilon^r(\sigma_0^r + \mu \delta\sigma_\varepsilon^r, p_0^r)(\delta\sigma_\varepsilon^r)^2 \lambda \, d\lambda \, d\mu \, dt \,. \quad (6)$$

avec

$$\partial_{\sigma\sigma} H_\varepsilon^r = \boxed{\partial_{\sigma\sigma} H_0^r} + \varepsilon \partial_{\sigma\sigma} H_1$$

Étude du terme quadratique en $\boxed{\partial_{\sigma\sigma} H_0^r}$

On pose

$$z(\lambda, \mu, t) \triangleq \delta u_\varepsilon^r + \left[\partial_{uu} H_0^r \left(\sigma_0^r + \lambda\mu\delta\sigma^r, p_0^r\right)\right]^{-1} \partial_{ux} H_0^r \left(\sigma_0^r + \lambda\mu\delta\sigma^r, p_0^r\right) \delta x_\varepsilon^r$$

En développant selon δx et δu le terme du second ordre et en utilisant z, on obtient

$$\partial_{\sigma\sigma} H_0^r(\,.\,)(\delta\sigma_\varepsilon^r)^2 = z^T \partial_{uu} H_0^r(\,.\,) z + \delta x_\varepsilon^{rT} \left[\partial_{xx} H_0^r - \partial_{xu} H_0^r [\partial_{uu} H_0^r]^{-1} \partial_{ux} H_0^r\right](\,.\,) \delta x_\varepsilon^r \,.$$

Hypothèses de type Legendre-Clebsch

On fait les hypothèses

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bullet\ \partial_{uu}H_0(\sigma, p_0^*) \geq \beta I \text{ uniformément en } \sigma & \text{(h1)} \\ \bullet\ (\partial_{xx}H_0 - \partial_{xu}H_0[\partial_{uu}H_0]^{-1}\partial_{ux}H_0)(\sigma, p_0^*) \geq 0 \text{ uniformément en } \sigma & \text{(h2)} \end{array}}$$

Remarques

- H_0^r est la somme de H_0 et d'une pénalité convexe, donc (h1) est valable pour H_0^r
- Les dérivées en x de H_0^r ne dépendent par de r, donc (h2) est valable pour H_0^r

On en déduit

$$\boxed{\partial_{\sigma\sigma}H_0^r(\,.\,)(\delta\sigma_\varepsilon^r)^2 \geq \beta \left\| z(\lambda, \mu, t) \right\|^2} \quad (7)$$

Récapitulation

De (6) et (7), et du fait que $H^r_\varepsilon = H^r_0 + \varepsilon H_1$, on déduit que

$$\left(c_0 F_1^2 + c_1 N_1^2\right)\varepsilon^2 \geq \varepsilon \int_0^T \left[N^0 \delta u^r_\varepsilon + N^1 \delta x^r_\varepsilon\right] dt + \beta R$$

$$+\varepsilon \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \partial_{\sigma\sigma} H_1 \left(\sigma^r_0 + \mu \delta\sigma^r_\varepsilon, p^r_0\right)(\delta\sigma^r_\varepsilon)^2 \, \lambda \, d\lambda \, d\mu \, dt \, . \, (8)$$

où

$$R = \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \left\| \, z(\lambda, \mu, t) \, \right\|^2 \lambda \, d\lambda \, d\mu \, dt.$$

Estimations intermédiaires sur δu et δx

De la définition de z on déduit $\boxed{\delta u_\varepsilon^r = z - [\partial_{uu} H_0^r(\,.\,)]^{-1} \partial_{ux} H_0^r(\,.\,) \delta x_\varepsilon^r.}$

On a (h1): $\partial_{uu} H_0^r \geq \beta I$ d'où $[\partial_{uu} H_0^r(\,.\,)]^{-1} \leq (1/\beta) I$.

D'autre part $\partial_{ux} H_0^r$ ne dépend pas de r.

On a donc une constante γ_1 telle que

$$\| \delta u_\varepsilon^r \| \leq \| z(\lambda, \mu, t) \| + \gamma_1 \| \delta x_\varepsilon^r \| \quad (9)$$

D'autre part on montre facilement que

$$\| \delta x_\varepsilon^r(t) \| \leq \Gamma \int_0^t \Big[\| \delta x_\varepsilon^r(t) \| + \| \delta u_\varepsilon^r(t) \| \Big] dt + \varepsilon F_1 t \quad (10)$$

On en déduit de (10) et (9) que

$$\| \delta x_\varepsilon^r(t) \| \leq \Gamma(1+\gamma_1) \int_0^t \| \delta x_\varepsilon^r(t) \| \, dt + \Gamma \int_0^t \| z(\lambda, \mu, s) \| \, ds + \varepsilon F_1 t \quad (11)$$

Estimations sur δx_ε^r et δu_ε^r

En utilisant le lemme de Grönwall et une inégalité de Cauchy-Schwarz on en déduit l'existence de $\alpha_1(t)$ et $\alpha_2(t)$, indépendants de ε et r, tels que

$$\boxed{\| \delta x_\varepsilon^r(t) \|^2 \leq \alpha_1(t)R + \alpha_2(t)F_1^2\varepsilon^2} \quad (12).$$

De (9) on déduit

$$\| \delta u_\varepsilon^r \|^2 \leq 2 \| z(\lambda, \mu, t) \|^2 + 2\gamma_1^2 \| \delta x_\varepsilon^r \|^2$$

d'où, avec (12), l'existence de α_3 et α_4, indépendants de ε et r, tels que

$$\boxed{\| \delta u_\varepsilon^r(t) \|_{L^2}^2 dt \leq \alpha_3 R + \alpha_4 F_1^2 \varepsilon^2} \quad (13)$$

Remarque

Les termes α_i ne dépendent que de γ_1,
de la constante de Lipschitz Γ de f_0
et de l'horizon T.

Il reste à borner R !

Estimation du terme d'ordre 1

Pour tout $m > 0$ on a

$$\varepsilon \int_0^T \left[N^0 \delta u_\varepsilon^r + N^1 \delta x_\varepsilon^r\right] dt \geq - \int_0^T \left[\frac{\varepsilon^2}{2m} \left\{ (N^0(t))^2 + (N^1(t))^2 \right\} + \frac{m}{2} \left\{ \parallel \delta x_\varepsilon^r \parallel^2 + \parallel \delta u_\varepsilon^r \parallel^2 \right\} \right] dt$$

qu'on peut minorer par

$$-\alpha_5 \, \frac{\varepsilon^2}{2m} - \alpha_6 F_1^2 \frac{m}{2} \varepsilon^2 - \alpha_7 \frac{m}{2} R \; .$$

Estimation de R

En utilisant (8) on en déduit

$$\left(c_0 F_1^2 + c_1 N_1^2\right) \varepsilon^2 \geq -\varepsilon^2 \left[\frac{1}{2m}\alpha_5 + \frac{m}{2}F_1^2\alpha_6\right] + R\left[\beta - \frac{m}{2}\alpha_7\right]$$

$$+\varepsilon \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \partial_{\sigma\sigma} H_1\left(\sigma_0^r + \lambda\mu\delta\sigma_\varepsilon^r, p_0^r\right)(\delta\sigma_\varepsilon^r)^2 \,\lambda\, d\lambda\, d\mu\, dt \quad (14)$$

où α_5, α_6 et α_7 ont les mêmes propriétés que les α_i précédents.

Comme on a majoré δx_ε^r en (13) et δu_ε^r en (12),

on peut minorer le terme quadratique par

$-\frac{1}{2}\inf_\sigma \left\| \partial_{\sigma\sigma} H_1(\sigma, P_0^r) \right\| \left[F_1^2 \alpha_8 \varepsilon^2 + \varepsilon\alpha_9 R\right]$. On note $\bar{H} = \inf_\sigma \left\| \partial_{\sigma\sigma} H_1(\sigma, P_0^r) \right\|$. Alors

$$\boxed{R\left[\beta - \frac{m}{2}\alpha_7 - \varepsilon\frac{\alpha_9}{2}\bar{H}\right] \leq F_1^2\varepsilon^2\left[c_0 + \alpha_6\frac{m}{2} + \frac{\alpha_8}{2}\bar{H}\right] + \varepsilon^2\left[c_1 + \alpha_5\frac{1}{2m}\right]} \quad (15)$$

Estimation de R

On pose

$$\gamma = \beta - \frac{m}{2}\alpha_7 - \varepsilon\frac{\alpha_9}{2}\bar{H}.$$

qui est le coefficient de R. On veut $\gamma > 0$.

Pour cela on prend $m = \dfrac{\beta}{\alpha_7}$. Alors $\gamma = \dfrac{\beta}{2} - \varepsilon\dfrac{\alpha_9}{2}\bar{H}$.

On a $\gamma > 0$ pour tout $\varepsilon \in [0,1]$ si et seulement si l'hypothèse suivante est vérifiée:

$$\boxed{\bar{H} < \frac{\beta}{\alpha_9} \qquad \text{(h3)}}$$

Soit $\rho = \dfrac{\alpha_9\bar{H}}{\beta} < 1$. Alors

$$\gamma = (1-\rho)\frac{\beta}{2}.$$

Remarque sur (h3)

- α_9 ne dépend que des bornes sur la dynamique f_0 et de sa dérivée pour $u \in U^{ad}$
- la dynamique de p_0^r ne dépend pas de r, et on peut borner p_0^r pour r borné
- $\bar{H}$ est une borne sur le Hessien de l'Hamiltonien perturbant H_1

On veut essentiellement que le Hessien de H_1
(terme *perturbateur* indépendant de r)
soit raisonnablement plus petit que
la constante β de forte convexité en u
de l'Hamiltonien *nominal* H_0 (non pénalisé, non perturbé).

Estimation de R

On revient sur (15). On a

$$R(1-\rho)\frac{\beta}{2} \leq F_1^2\varepsilon^2\left[c_0+\alpha_6\frac{m}{2}+\frac{\alpha_8}{2}\bar{H}\right]+\varepsilon^2\left[c_1N_1^2+\alpha_5\frac{1}{2m}\right] \text{ avec } m=\frac{\beta}{\alpha_7}.$$

D'où

$$\boxed{R \leq \varepsilon^2\frac{2}{(1-\rho)\beta}\left[F_1^2\left(c_0+\frac{\alpha_6}{2}\frac{\beta}{\alpha_7}+\rho\frac{\alpha_8}{2}\frac{\beta}{\alpha_9}\right)+\left(c_1N_1^2+\frac{a_5}{2}\frac{\alpha_7}{\beta}\right)\right]}$$

qui est conservatif mais met bien l'accent sur l'importance de β et de $\rho=\dfrac{\alpha_9\bar{H}}{\beta}$.

Si β est grand dans (h1), on peut se ramener à β d'ordre 1 dans (h1).

Le vrai problème se situe lorsque β ne peut être que petit. De plus ρ doit être petit.

Estimation sur δx_ε^r et δu_ε^r

On pose $s_{2a} = c_0 + \frac{\alpha_6}{2}\frac{\beta}{\alpha_7} + \rho\frac{\alpha_8}{2}\frac{\beta}{\alpha_9}$ et $s_{2b} = c_1 N_1^2 + \frac{a_5}{2}\frac{\alpha_7}{\beta}$, soit

$$R \leq \varepsilon^2 \frac{2}{(1-\rho)\beta}\left[s_{2a}F_1^2 + s_{2b}\right]$$

De (12) et (13) on déduit

$$\boxed{\begin{gathered} \| \; \delta x_\varepsilon^r(t) \; \|^{\,2} \leq \varepsilon^2 \left[F_1^2 \left(\alpha_2(t) + \frac{2}{(1-\rho)\beta}\alpha_1(t) s_{2a} \right) + \frac{2}{(1-\rho)\beta}\alpha_1(t) s_{2b} \right] \\ \text{et} \\ \int_0^T \| \; \delta u_\varepsilon^r(t) \; \|^{\,2} dt \leq \varepsilon^2 \left[F_1^2 \left(\alpha_4 + \frac{2}{(1-\rho)\beta}\alpha_3 s_{2a} \right) + \frac{2}{(1-\rho)\beta}\alpha_3 s_{2b} \right] \end{gathered}}$$

Sous optimalité

On a

$$0 \leq J^r_\varepsilon(u^r_0) - J^r_\varepsilon(u^r_\varepsilon) \leq |M_0| - M_1,$$

où l'on a déjà étudié M_0:

$$|M_0| \leq \left(c_0 F_1^2 + c_1 N_1^2\right)\ \varepsilon^2$$

et M_1 est défini par

$$M_1 = J^r_\varepsilon\left(u^r_\varepsilon\right) - \int_0^T \left[H^r_\varepsilon\left(\sigma^r_0, p^r_0\right) - p_0^{rT}\dot{x}^r_0\right] dt$$

Développement au second ordre

Le terme M_1 est important seulement s'il est négatif. On a

$$-M_1 = -\varepsilon \int_0^T \left[N^0 \delta u_\varepsilon^r + N^1 \delta x_\varepsilon^r\right] dt - \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \partial_{\sigma\sigma} H_0^r(\sigma_0^r + \lambda\mu\delta\sigma_\varepsilon^r, p_0^r)(\delta\sigma_\varepsilon^r)^2 \,\lambda\, d\lambda\, d\mu\, dt$$

$$-\varepsilon \int_0^T \int_0^1 \int_0^1 \partial_{\sigma\sigma} H_1(\sigma_0^r + \lambda\mu\delta\sigma_\varepsilon^r, p_0^r)(\delta\sigma_\varepsilon^r)^2 \,\lambda\, d\lambda\, d\mu\, dt$$

Comme la pénalité est convexe, on a

$$\partial H_{\sigma\sigma} H_0 \leq \partial H_{\sigma\sigma} H_0^r$$

d'où

$$\boxed{-\partial H_{\sigma\sigma} H_0^r \leq -\, \partial H_{\sigma\sigma} H_0}$$

Estimation des termes d'ordre 2

Sur les arguments de la forme quadratique on a

$$\|\delta\sigma_\varepsilon^r\|^2 \leq \varepsilon^2 \left[F_1^2 \left(\alpha_{10} + \frac{2}{(1-\rho)\beta}\alpha_{11}s_{2a} \right) + \frac{2}{(1-\rho)\beta}\alpha_{11}s_{2b} \right].$$

En bornant la forme quadratique par $\bar{H}_{\sigma,\sigma} = \max\limits_{i=1,2 \ et \ t\in[0,T]} \|\partial_{\sigma\sigma}H_i\|$

le terme du second ordre est borné par

$$\boxed{2\varepsilon^2\bar{H}_{\sigma,\sigma} \left[F_1^2 \left(\alpha_{10} + \frac{2}{(1-\rho)\beta}\alpha_{11}s_{2a} \right) + \frac{2}{(1-\rho)\beta}\alpha_{11}s_{2b} \right].}$$

Estimation du terme d’ordre 1

On a également

$$-\varepsilon \int_0^T \left[N^0 \delta u_\varepsilon^r + N^1 \delta x_\varepsilon^r\right] dt \leq \int_0^T \left[\frac{\varepsilon^2}{2m_1}\left\{\left(N^0(t)\right)^2 + \left(N^1(t)\right)^2\right\} + \frac{m_1}{2}\left\{\|\delta x_\varepsilon^r\|^2 + \|\delta u_\varepsilon^r\|^2\right\}\right] dt$$

En posant

$$\bar{N}^2 = T \max_\sigma \|\partial H_\sigma(\sigma_0^r, p_0^r)\|^2,$$

Le terme d’ordre 1 est majoré par

$$\boxed{\varepsilon^2 \left[\frac{\bar{N}^2}{2m_1} + m_1\left(F_1^2\left(\alpha_{10} + \frac{2}{(1-\rho)\beta}\alpha_{11}s_{2a}\right) + \frac{2}{(1-\rho)\beta}\alpha_{11}s_{2b}\right)\right]}$$

Récapitulation sur M_1

On a

$$-M_1 \leq \varepsilon^2 \left[\frac{\bar{N}^2}{2m_1} + \left(m_1 + 2\bar{H}_{\sigma,\sigma}\right) \left(F_1^2 \left(\alpha_{10} + \frac{2}{(1-\rho)\beta} \alpha_{11} s_{2a} \right) + \frac{2}{(1-\rho)\beta} \alpha_{11} s_{2b} \right) \right]$$

où m_1 est un paramètre libre.

Sous-optimalité

En récapitulant les bornes sur M_0 et M_1 on obtient

$$\boxed{0 \leq J_\varepsilon^r(u_0^r) - J_\varepsilon^r(u_\varepsilon^r) \leq K_r \varepsilon^2 \quad (15)}$$

avec

$$K_r = \left(c_0 F_1^2 + c_1 \|N_1\|_\infty^2\right) + \frac{\bar{N}^2}{2m_1}$$
$$+ \left(m_1 + 2\bar{H}_{\sigma,\sigma}\right)\left(F_1^2\left(\alpha_{10} + \frac{2}{(1-\rho)\beta}\alpha_{11}s_{2a}\right) + \frac{2}{(1-\rho)\beta}\alpha_{11}s_{2b}\right)$$

qui est est indépendant de ε, borné pour r borné.

Résultat principal

En passant à la limite dans (15), on voit qu'il existe $K_0 \geq 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in [0,1]$, on ait la majoration

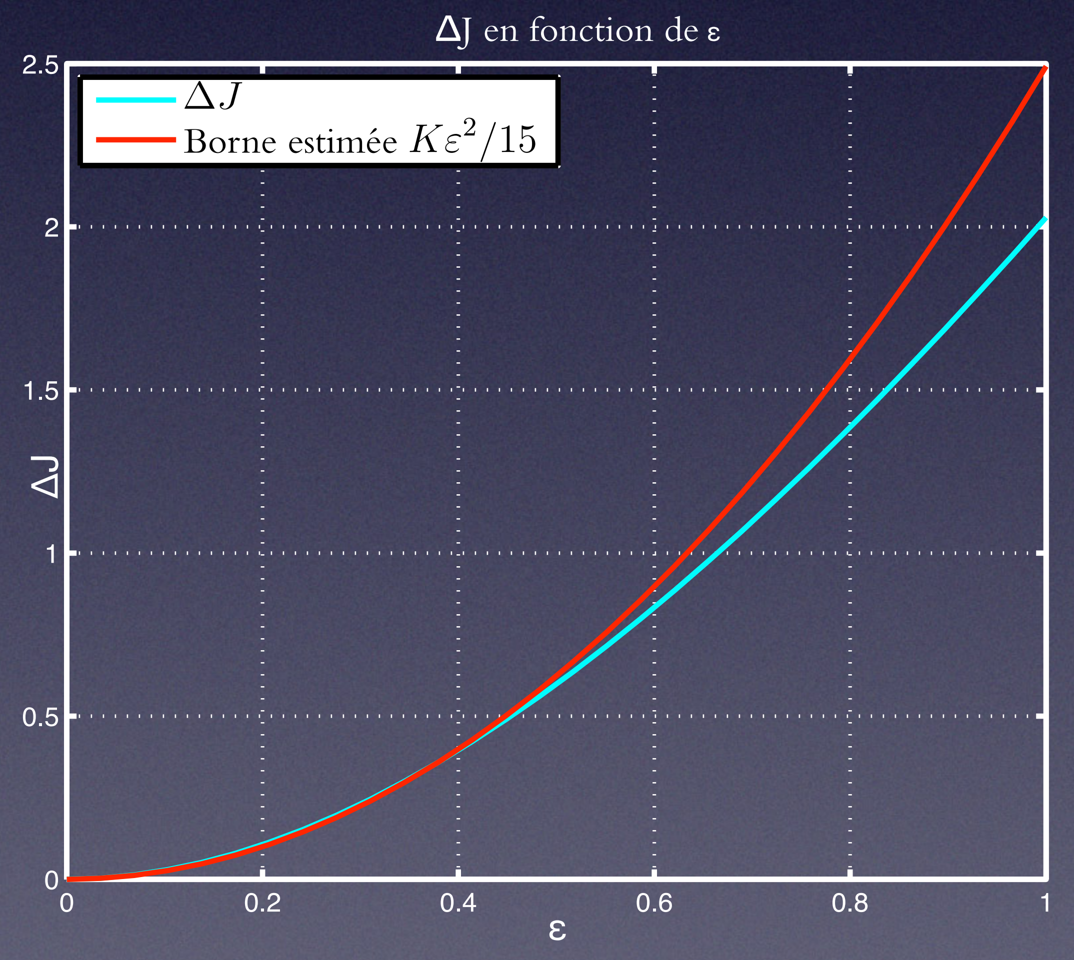
$$\boxed{0 \leq J_\varepsilon(u^*(0)) - \inf_{u \in U^{ad}} J_\varepsilon(u) \leq K_0 \varepsilon^2}$$

Remarques

Les fonctions présentes dans K_r ne dépendent pas de r;
leurs arguments si, mais ils ont une limite quand r tend vers 0.

Remarques

A titre d'exemple numérique, on a refait tous les calculs d'estimations sur un problème LQ en tenant compte des valeurs numériques et du fait que le système a été choisi stable.
On obtient la figure suivante:



On y constate donc un rapport 15 entre l'estimée conservative et le ratio effectif.

Conclusion

On a étendu au cas de problèmes sous contraintes de contrôle
la sous optimalité de la solution du problème non perturbé.

C'est aussi un résultat de robustesse.
Si des *incertitudes* peuvent être bornées
(selon des mesures assez générales utilisées ici),
alors l'optimalité du contrôle du problème nominal
sera robuste à ces incertitudes (avec une erreur au carré!)

Bibliographie

Bryson A-E, Ho Y-C. *Applied Optimal Control*. Waltham, MA: Ginn and Company; 1969.

Bensoussan A. *Perturbation Methods in Optimal Control*. Hoboken, NJ: Wiley; 1988.

Bonnans JF., Guilbaud T. *Using logarithmic penalties in the shooting algorithm for optimal control problems*. Optim. Control Appl. Methods, 2003; 24:257-278.

Malisani P., Chaplais F., Petit N. *An interior method for penalty optimal control problems with state and input constraints of non-linear systems*. Optim. Control Appl. Methods. 2016;37(1):3-33.

Maamria D., Chaplais F., Sciarretta A., Petit N. *Impact of regular perturbations in input constrained optimal control problems* Optim. Control Appl. Methods. 2020;41(4):1321-1351

sans oublier les notes de cours de l'orateur sur le cours d'Alain Bensoussan.