Méthodes de pénalisation intérieure en contrôle optimal

Paul Malisani

Département de mathématiques appliquées IFPEN

20 janvier 2020

Sommaire

Outline

1. Méthodes de pénalisation en contrôle optimal
   - Présentation du problème
   - Construction des fonctions de pénalisation pour garantir l'intériorité
   - Problème de contrôle optimal non-contraint
2. Algorithme de résolution
3. Problème de Godard avec contraintes d'état
4. Conclusion

Outline

1. Méthodes de pénalisation en contrôle optimal
   - Présentation du problème
   - Construction des fonctions de pénalisation pour garantir l'intériorité
   - Problème de contrôle optimal non-contraint
2. Algorithme de résolution
3. Problème de Godard avec contraintes d'état
4. Conclusion

Contrôle optimal sous contraintes

Problème original

$$\min_{u \in \mathcal{U} \cap \mathcal{X}} J(u) = \int_0^T \ell(x^u, u)dt$$

avec

- $\dot{x}^u = f(x^u, u)$
- $x^u \in C_0([0, T], \mathbb{R}^n)$
- $\mathcal{U} \triangleq \{u \in L^\infty \text{ t.q. } u(t) \in \mathcal{C} \text{ ppt } t \in [0, T] \text{ avec } \mathcal{C} \text{ convexe } \}$
- $\mathcal{X} \triangleq \{u \in L^\infty \text{ t.q. } g_i(x^u(t)) \leq 0, i = 1 \ldots q, \forall t \in [0, T]\}$

Travaux précédents

Panorama des travaux précédents

- L. Lasdon, A. Waren, and R. Rice. An interior penalty method for inequality constrained optimal control problems. IEEE Transactions on Automatic Control, 12 :388–395, 1967
- J. F. Bonnans and Th. Guilbaud. Using logarithmic penalties in the shooting algorithm for optimal control problems. Optimal Control Applications and Methods, 24 :257–278, 2003
- K. Graichen and N. Petit. Incorporating a class of constraints into the dynamics of optimal control problems. Optimal Control Applications and Methods, 30 :537–561, 2009

Points intérieurs en contrôle optimal

Problème pénalisé

$$\min_{u \in \mathcal{U}} K(u,\epsilon) = \int_0^T \ell(x^u, u) + \varepsilon \left[\sum_{i=1}^{q} \gamma_x \circ g_i(x^u) + \gamma_u \circ G_{\mathcal{C}}(u) \right] dt$$

avec

- $\dot{x}^u = f(x^u, u)$
- $x^u \in C_0([0,T], \mathbb{R}^n)$
- $\mathcal{U} \triangleq \{u \in L^\infty \text{ t.q. } u(t) \in \mathcal{C} \text{ ppt } t \in [0,T] \text{ avec } \mathcal{C} \text{ convexe } \}$
- $G_{\mathcal{C}}(u) \triangleq \inf \{\lambda \geq 0 \text{ t.q. } u \in \lambda \mathcal{C}\}$ (fonction de gauge)
- $G_{\mathcal{C}}(u) \in [0,1] \Leftrightarrow u \in \mathcal{C}$

Outline

1. Méthodes de pénalisation en contrôle optimal
   - Présentation du problème
   - Construction des fonctions de pénalisation pour garantir l'intériorité
   - Problème de contrôle optimal non-contraint
2. Algorithme de résolution
3. Problème de Godard avec contraintes d'état
4. Conclusion

Objectifs et principales difficultés

Objectifs

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} K(u_\varepsilon^*, \varepsilon) = J(u^*)$$
$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \| u_\varepsilon^* - u^* \|_{L^2} = 0$$
$$(\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \| x^{u_\varepsilon^*} - x^* \|_{L^\infty} = 0)$$

Difficultés

Garantir l'intériorité des solutions du problème pénalisé

$$g_i(x^{u_\varepsilon^*}(t)) < 0$$
$$u_\varepsilon^*(t) \in \mathrm{int}(\mathcal{C})$$

Enoncé des hypothèses

Hypothèses

- f et g sont des fonctions au moins C^1 de leurs arguments
- Il existe $C < +\infty$ tel que $\| f(x,u) \| < C(1+ \| x \|), \forall x, \forall u \in \mathcal{C}$
- L'état initial x_0 est tel que $g_i(x_0) = -\alpha_0 < 0, i = 1 \ldots q$
- L'état initial x_0 est tel que

$$\emptyset \neq \mathcal{U}^{\text{strict}} \cap \mathcal{X}^{\text{strict}}$$

$$\mathcal{U}^{\text{strict}} \triangleq \{u \in L^\infty \text{ t.q. } u(t) \in \text{int}(\mathcal{C}) \text{ ppt } t \in [0,T]\}$$

$$\mathcal{X}^{\text{strict}} \triangleq \{u \in L^\infty \text{ t.q. } g_i(x^u(t)) < 0, i = 1 \ldots q, \forall t \in [0,T]\}$$

Contrainte d'état

Lemme 1

Si la fonction de pénalisation de l'état γ_x est telle que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \alpha \gamma_x(-\alpha) = +\infty$$

Alors toute solution u_ε^* du problème pénalisé est telle que

$$u_\varepsilon^* \in \mathcal{U} \cap \mathcal{X}^{\text{strict}}$$

Contrainte d'état

Principe de la preuve

Soit $u \in \mathcal{U} \cap \mathcal{X}^{\text{strict}}$, pour tout $\alpha > 0$

$$\int_0^T \gamma_x \circ g(x(t))dt = \int_{0>g(x(t))} \gamma_x \circ g(x(t))dt \geq \lim_{\alpha \downarrow 0} \gamma_x(-\alpha)\mu_g(\alpha)$$

où $\mu_g(\alpha) \triangleq \text{mesure}\left(\{t \text{ t.q. } 0 > g(x^u(t)) \geq -\alpha\}\right)$. De plus, il existe $\Gamma > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$

$$\mu_g(\alpha) \geq \frac{\alpha}{\Gamma} \text{dynamique sous-linéaire}$$

Alors

$$\int_0^T \gamma_x \circ g(x(t))dt \geq \lim_{\alpha \downarrow 0} \gamma_x(-\alpha)\frac{\alpha}{\Gamma}$$

Contrainte de commande

Objectif

On considère que la pénalité d'état γ_x est choisie selon le Lemme 1 présenté auparavant, on cherche à trouver des conditions suffisantes sur γ_u garantissant que

$$u_\varepsilon^* \in \mathcal{U}^{\text{strict}} \cap \mathcal{X}^{\text{strict}}$$

i.e. $u_\varepsilon^*(t) \in \text{int}(\mathcal{C})$ p.p.t. $t \in [0, T]$ et $\max_{i=1\dots q} \sup_t g_i(x^{u_\varepsilon^*}(t)) < 0$

Méthodologie (constructive)

Méthode de désaturation

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{X}^{\text{strict}} \ni u_1 \to \text{desaturation} \to u_2 \in \mathcal{U}^{\text{strict}} \cap \mathcal{X}^{\text{strict}}$$

et on cherche des condition sur γ_u telles que

$$K(u_2, \varepsilon) < K(u_1, \varepsilon)$$

Contrainte de commande

Definition

Pour tout $u_1 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{X}^{\text{strict}}$, pour tout $\alpha > 0$, on définit la commande désaturée u_2 comme suit :

$$u_2(t) = \begin{cases} u_1(t) & \text{si } G_{\mathcal{C}}(u_1(t)) < 1 - \alpha \\ (1 - 2\alpha)u_1(t) & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition

Pour tout $u_1 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{X}^{\text{strict}}$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$u_2 \in \mathcal{U}^{\text{strict}} \cap \mathcal{X}^{\text{strict}}$$

Contrainte de commande

Calcul d'une borne supérieure sur $K(u_2, \varepsilon) - K(u_1, \varepsilon)$. Cette borne peut être décomposée comme suit

(i) Variation du coût original

$$\int_0^T \ell(x^{u_2}, u_2) - \ell(x^{u_1}, u_1) dt$$

(ii) Variation des pénalités d'état

$$\varepsilon \int_0^T \sum_{i=1}^{q} \left(\gamma_x \circ g_i(x^{u_2}) - \gamma_x \circ g_i(x^{u_1})\right) dt$$

(iii) Variation des pénalités de commande

$$\varepsilon \int_0^T \gamma_u \circ G_{\mathcal{C}}(u_2) - \gamma_u \circ G_{\mathcal{C}}(u_1) dt$$

Contrainte de commande

Lemme 2

Si une solution du problème pénalisé u^* est dans $\mathcal{U} \cap \mathcal{X}^{\text{strict}}$ et si

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \gamma_u'(1-\alpha) = +\infty$$

alors

$$u^* \in \mathcal{U}^{\text{strict}} \cap \mathcal{X}^{\text{strict}}$$

Résultat principal

Théorème 1

Il existe des fonctions de pénalisations γ_x et γ_u telles que toute solution u_ε^* du problème pénalisé appartient à $\mathcal{U}^{\text{strict}} \cap \mathcal{X}^{\text{strict}}$. Un choix particulier est

$$\begin{aligned} \gamma_x(x) &= -(x)^{-n_g} && \forall x < 0 \\ \gamma_x(x) &= 0 && \forall x \geq 0 \\ \gamma_u(u) &= -u \log(1-u) \end{aligned}$$

avec $n_g > 1$

Outline

1. Méthodes de pénalisation en contrôle optimal
   - Présentation du problème
   - Construction des fonctions de pénalisation pour garantir l'intériorité
   - Problème de contrôle optimal non-contraint
2. Algorithme de résolution
3. Problème de Godard avec contraintes d'état
4. Conclusion

De $\mathbb{R}^m$ dans $\mathcal{C}$

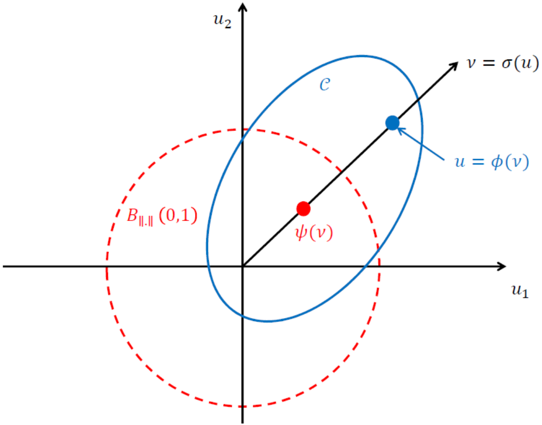

FIGURE – Fonction de saturation

$$\psi : \mathbb{R}^m \mapsto B_{\|.\|}(0,1)\,;\ \phi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathrm{int}(\mathcal{C})\,;\ \sigma : \mathrm{int}(\mathcal{C}) \mapsto \mathbb{R}^m$$

Généralisation des fonctions de saturation

La fonction $\psi : \mathbb{R}^m \mapsto B_{\|.\|}(0,1)$ défini par

$$\psi(\nu) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{si } \nu = 0 \\ \tanh(\| \nu \|) \dfrac{\nu}{\| \nu \|} & \text{sinon} \end{cases}$$

est une bijection de $\mathbb{R}^m$ dans $B_{\|.\|}(0,1)$

Proposition

La fonction $\phi : \mathbb{R}^m \mapsto \text{int}(\mathcal{C})$ définie par

$$\phi(\nu) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{si } \nu = 0 \\ \dfrac{\tanh^2(\| \nu \|)}{G_{\mathcal{C}} \circ \psi(\nu)} \dfrac{\nu}{\| \nu \|} & \text{sinon} \end{cases}$$

est une bijection de $\mathbb{R}^m$ dans $\text{int}(\mathcal{C})$ et est un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^m_*$

Problème de contrôle optimal sans contraintes

Problème pénalisé

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \left[K(u, \varepsilon) \triangleq \int_0^T \ell(x^u, u) + \varepsilon \left[\sum_i \gamma_x(g_i(x^u)) + \gamma_u \circ G_{\mathcal{C}}(u) \right] dt \right]$$

Problème pénalisé non contraint

$$\min_{\nu \in L^\infty} \left[P(\nu, \varepsilon) \triangleq \int_0^T \ell(x^{\phi(\nu)}, \phi(\nu)) + \varepsilon \left[\sum_i \gamma_x(g_i(x^{\phi(\nu)})) + \gamma_u \circ G_{\mathcal{C}}(\phi(\nu)) \right] \right.$$

Théorème 2

Si les pénalités γ_x et γ_u sont choisies selon le théorème 1, les deux problèmes pénalisés sont équivalents

$$\arg\min_{u \in \mathcal{U}} K(u, \varepsilon) = \phi(\arg\min_{\nu \in L^\infty} P(\nu, \varepsilon))$$

Convergence (1/2)

Théorème 3 [Lasdon 1967]

Soit (ε_k) une suite décroissante de paramètres positifs convergents vers 0. Alors, $P(\nu_k, \varepsilon_k)$ converges vers J^* le coût optimal du problème original

$$\lim_{k \to +\infty} P(\nu_k^*, \varepsilon_k) = J^*$$

avec

$$\begin{aligned} \lim_{k \to +\infty} \int_0^T \ell(x^{\phi(\nu_k^*)}, \phi(\nu_k^*)) &= J^* \\ \lim_{k \to +\infty} \varepsilon_k \int_0^T \sum_i \gamma_x(g_i(x^{\phi(\nu_k^*)})) + \gamma_u\left(G_{\mathcal{C}}(\phi(\nu_k^*))\right) &= 0 \end{aligned}$$

Convergence (2/2)

Hypothèse

La fonctionnelle $J(u)$ correspondant au coût du problème original satisfait la propriété de convexité forte

$$D \parallel u - v \parallel_{L^2}^2 \leq J(u) + J(v) - 2J\left(\frac{u+v}{2}\right), \forall u, v \in \mathcal{U} \cap \mathcal{X} \qquad (1)$$

Théorème 4 [Lasdon 1967]

$u_k = \phi(\nu_k)$ et $x^{u_k} = x^{\phi(\nu_k)}$ solutions du problème penalisé non contraint convergent vers la solution optimale (u^*, x^{u^*}) du problème original dans le sens suivant

$$\begin{aligned} \lim_{k \to +\infty} \parallel u_k - u^* \parallel_{L^2} &= 0 \\ \lim_{k \to +\infty} \parallel x^{u_k} - x^{u^*} \parallel_{L^\infty} &= 0 \end{aligned}$$

Outline

Solution pénalisée optimale

On note $(\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u}, x^{\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u}})$ une solution du problème aux deux bouts suivant :

$$
\begin{aligned}
\dot{x}^{\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u}} &= f(x^{\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u}}, \phi(\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u})) \\
\dot{p} &= -\partial_x \ell(x^{\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u}}, \phi(\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u})) - \partial_x f(x^{\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u}}, \phi(\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u}))p \\
&\quad - \sum_i \varepsilon_x^i g_i'(x^{\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u}})\gamma_x'(g_i(x^{\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u}})) \\
0 &= \partial_\nu \ell(x^{\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u}}, \phi(\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u})) + \partial_\nu f(x^{\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u}}, \phi(\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u}))p \\
&\quad + \varepsilon_u G_{\mathcal{C}}'(\phi(\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u}))\gamma_u' \circ G_{\mathcal{C}}(\phi(\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u})) \\
x^{\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u}}(0) &= x_0 \\
p(T) &= 0
\end{aligned}
$$

Algorithme de points intérieurs

Algorithm 1: Algorithme de PI

$\varepsilon_x = \varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_u = \varepsilon_0 > 0$, $\alpha > 1$, $\mathrm{tol} > 0$
$C_x^i \leftarrow \perp$, $i = 1, \dots, q$; $C_u \leftarrow \perp$
while $\neg(C_x^1 \wedge \cdots \wedge C_x^q \wedge C_u)$ **do**
    $\left(\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u}, x^{\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u}}\right)$ solution du PMP
    if $\varepsilon_x^i \int \gamma_x(g_i(x^{\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u}})) < \mathrm{tol} \times J(\phi(\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u}))$ **then**
        $C_x^i \leftarrow \top$
    else
        $\varepsilon_x^i = \varepsilon_x^i / \alpha$
    end if
    if $\varepsilon_u \int \gamma_u(G_{\mathcal{C}}(\phi(\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u})) < \mathrm{tol} \times J(\phi(\nu^*_{\varepsilon_x,\varepsilon_u}))$ **then**
        $C_u \leftarrow \top$
    else
        $\varepsilon_u = \varepsilon_u / \alpha$
    end if
end while

Outline

Présentation du problème

Problème de Godard original

$$\max_u h(T)$$

avec T libre, sous les contraintes

$$\begin{aligned}
\dot{h} &= v \\
\dot{v} &= \frac{u}{m} - \frac{C_D A}{m.m_0 g} q(h,v) - \frac{1}{h^2} \\
\dot{m} &= -\frac{u}{c} \\
q(h,v) &= \frac{1}{2}\rho_0 v^2 e^{\beta(1-h)} \\
q(v,h) &\leq 10 \\
u &\in L^\infty([0,T],[0,3.5])
\end{aligned}$$

Présentation du problème

Problème de Godard à temps fixe

$$\min_u - \int_0^1 Tv dt$$

sous les contraintes

$$\begin{array}{rcl} \dot{h} & = & Tv \\ \dot{v} & = & T\left(\frac{u}{m} - \frac{C_D A}{m.m_0 g} q(h,v) - \frac{1}{h^2}\right) \\ \dot{m} & = & -T\frac{u}{c} \\ \dot{T} & = & 0 \\ q(h,v) & = & \frac{1}{2}\rho_0 v^2 e^{\beta(1-h)} \\ q(v,h) & \leq & 10 \\ u & \in & L^\infty([0,T],[0,3.5]) \end{array}$$

Présentation du problème

Problème de Godard à temps fixe pénalisé

$$\min_{u} \int_0^1 -Tv + \varepsilon_x \gamma_x (q(h,v) - 10) + \varepsilon_u \gamma_u \circ \phi(\nu) dt$$

sous les contraintes

$$\begin{array}{rcl}
\dot{h} & = & Tv \\
\dot{v} & = & T\left(\dfrac{\phi(\nu)}{m} - \dfrac{C_D A}{m.m_0 g} q(h,v) - \dfrac{1}{h^2}\right) \\
\dot{m} & = & -T\phi(\nu)/c \\
\dot{T} & = & 0 \\
q(h,v) & = & 0.5\rho_0 v^2 e^{\beta(1-h)} \\
q(v,h) & \leq & 10 \\
\phi(\nu) & = & 3.5(1-(1+e^{\nu})^{-1}) \\
\gamma_u' \circ \phi(\nu) & = & \sinh(\nu)
\end{array}$$

Initialisation et paramétrage

Initialisation du problème

$$\begin{aligned} h(t); v(t); m(t); T(t) &= 1; 0.2; 1; 0.3 \ \forall t \\ p_h(t); p_v(t); p_m(t); p_T(t) &= 0; 1; 0; 0 \ \forall t \\ \nu(t) &= 0 \ \forall t \end{aligned}$$

Paramétrage du solveur

- Méthode d'intégration : Hermite-Simpson
- Tolérance résidus : 10^{-6}

Outline

Conclusion

- Garantie d'intériorité des solutions, notamment de l'Etat
- Méthode efficace et simple à utiliser.