Transport optimal sur les structures sous-Riemanniennes de rang 2 en dimension 4

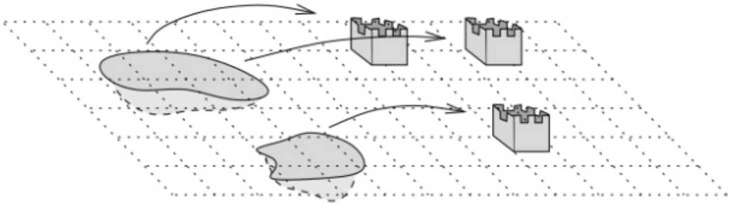
Zeinab BADREDDINE

IMB, INRIA Sophia Antipolis

Journées MokaTao
4 avril 2016

Transport de Monge

1781,MONGE, *"Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais"*.

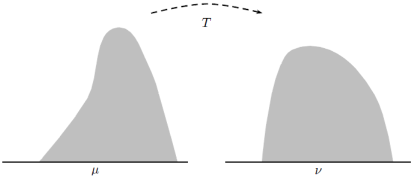


Soit M une variété différentielle de dimension $n \geq 2$. Soit μ et ν deux mesures de probabilité à support compact dans M.

Definition (Application de transport)

On appelle application de transport entre μ et ν, toute application mesurable $T : M \to M$ telle que $T_\sharp \mu = \nu$, c-à-d

$$\nu(B) = \mu(T^{-1}(B)), \forall B \subset M \ \textit{mesurable}.$$



On considère le coût de transport

$$c : \begin{array}{ccc} M \times M & \to & [0, +\infty[\\ (x, y) & \mapsto & c(x, y) \end{array}.$$

Problème de Monge: Étude des applications de transport $T : M \to M$ qui minimisent le coût de transport

$$\int_M c(x, T(x)) \mathrm{d}\mu(x).$$

Problème de Kantorovitch

1942-L.KANTOROVITCH, *"On the translocation of masses"*.

Définition (Plan de transport)

On appelle plan de transport toute mesure de probabilité α sur le produit $M \times M$ satisfaisant

$$\alpha(A \times M) = \mu(A), \quad \alpha(M \times A) = \nu(A), \ \forall A \subset M.$$

$\Pi(\mu, \nu)$ l'ensemble des plans de transport de μ à ν.

Problème de Kantorovitch: Étude des plans de transport α sur $M \times M$ qui minimisent le coût de transport

$$\int_{M \times M} c(x, y) \mathrm{d}\alpha(x, y).$$

Si $T : M \to M$ est une application de transport entre μ et ν alors la mesure α donnée par

$$\alpha := (id \times T)_\sharp \mu$$

est un plan de transport entre μ et ν.

Théorème (Existence de plans de transport)

Soit μ et ν deux mesures de probabilité à support compact sur M. Supposons que c est continue sur $M \times M$.
Alors, il existe au moins un plan de transport optimal, solution du problème de Kantorovitch.

Problème dual

Problème dual : Étude du couple de fonctions $(\varphi, \psi) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu)$ vérifiant

$$\sup_{\psi(y)-\varphi(x)\leq c(x,y)} \left\{ \int_M \psi(y)\mathrm{d}\nu(y) - \int_M \varphi(x)\mathrm{d}\mu(x) \right\}$$

$\forall y \in M, \psi(y)$ est l'infinimum de $\varphi(x)+c(x,y)$ parmi tous les x.

$\forall x \in M, \varphi(x)$ est le supremum de $\psi(y)-c(x,y)$ parmi tous les y.

Supposons que φ est une fonction c-concave et $\psi = \varphi^c$, soit

$$\varphi(x) = \sup_{y\in M}\{\psi(y) - c(x,y)\}, \ \forall x \in M$$

$$\psi(y) = \varphi^c(y) = \inf_{x\in M}\{\varphi(x) + c(x,y)\}, \ \forall y \in M$$

Théorème (Dualité)

$$\inf_{\alpha\in\Pi(\mu,\nu)} \int_{M\times M} c(x,y)\mathrm{d}\alpha(x,y)$$
$$= \sup_{\psi(y)-\varphi(x)\leq c(x,y)} \left\{ \int_M \varphi^c(y)\mathrm{d}\nu(y) - \int_M \varphi(x)\mathrm{d}\mu(x) \right\}. \quad (1)$$

(φ, φ^c) sont appelées les potentiels de Kantorovitch.

$$\Gamma := \{(x,y) \in M \times M |\ \varphi^c(y) - \varphi(x) = c(x,y)\}$$

Théorème

Un plan de transport $\alpha \in \Pi(\mu,\nu)$ *est optimal* $\Leftrightarrow \alpha(\Gamma) = 1$.

Les structures sous-Riemanniennes

Définition (structure sous-Riemannienne)

On appelle structure sous-Riemannienne sur la variété M la donnée d'un couple (Δ, g) où

- Δ est une distribution de rang m ($m < n$) totalement nonholonome sur M
  i.e. $\forall x \in M$, $\exists$ un ouvert $\mathcal{V}_x$ voisinage de x et $\{X_x^1, \ldots, X_x^m\}$ un repère local de Δ sur $\mathcal{V}_x$ tq

$$Lie\{X_x^1, \ldots, X_x^m\}(y) = T_y M, \forall y \in \mathcal{V}_x.$$

- $g(.,.)$ est une métrique sous-Riemannienne sur Δ,
  ie. $\forall x \in M$, g est un produit scalaire sur Δ_x.

Géodésiques minimisantes

- un chemin absolument continue $\gamma : [0,1] \to M$ est dit horizontal si
$$\dot{\gamma}(t) \in \Delta_{\gamma(t)}, pp\ t \in [0,1].$$
- **Théorème (Chow):** $\forall x, y \in M$, il existe un chemin horizontal joignant x et y.
- Distance sous-Riemannienne: $\forall x, y \in M$,
$$d_{SR}(x,y) = \inf\{longueur(\gamma) |\ \gamma : [0,1] \to M \text{ courbe horizontale joignant } x, y\}\ .$$
- une géodésique minimisante est un chemin horizontal minimisant de vitesse constante.
- **Théorème (Hopf - Rinow):** Supposons que (M, d_{SR}) est complet. Alors, $\forall x, y \in M$, il existe au moins une géodésique minimisante joignant x et y.

Problème de Monge quadratique sous-Riemannien

Soit M une variété de dimension n et (Δ, g) une structure sous-Riemannienne complète sur M de rang m ($m < n$).

Étude des applications de transport $T : M \to M$ minimisant

$$\int_M c(x, T(x)) \mathrm{d}\mu(x)$$

où $\begin{array}{rccl} c: & M \times M & \to & [0, +\infty[\\ & (x, y) & \mapsto & c(x, y) := d_{SR}^2(x, y) \end{array}$

Résultats précédents

Des résultats de [AR'04], [AL'09] et [FR'10] prouvent l'existence et l'unicité de solutions du problème de Monge sur les structures sous-Riemanniennes **n'admettant pas de courbes minimisantes singulières.**

Existence et unicité de solutions

Théorème

Soit M une variété de dimension 4 et (Δ, g) une structure sous-Riemannienne complète sur M de rang 2 telle que

$$\forall x \in M, \Delta(x) + \left[\Delta, \Delta\right](x) \text{ est de dimension 3.} \tag{2}$$

Soit μ et ν deux mesures de probabilité à support compact sur M tq μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.
Alors, il existe une unique application de transport optimal de μ à ν pour le coût quadratique sous-Riemannien d_{SR}^2.

Application End-point

Soit $\{X^1, X^2\}$ deux champs de vecteurs

$$\forall y \in M, \Delta(y) = Span\{X^1(y), X^2(y)\}.$$

L' application End-point E_x en un point $x \in M$ est donnée par:

$$\begin{array}{rccl} E_x : & L^2([0,1], \mathbb{R}^2) & \rightarrow & M \\ & u & \mapsto & E_x(u) = \gamma_u(1) \end{array}$$

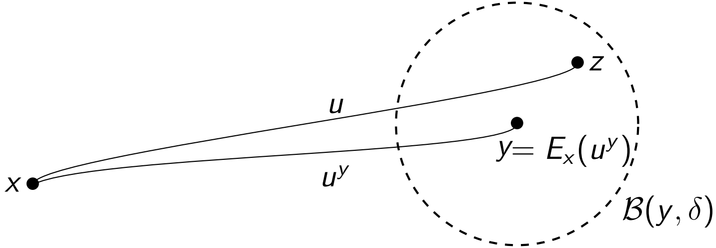
avec $\gamma_u : [0,1] \rightarrow M$ l'unique solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\gamma}_u(t) & = & \sum_{i=1}^{2} u_i(t) X^i(\gamma_u(t)); \\ \gamma_u(0) & = & x. \end{array} \right.$$

Courbes horizontales singulières

Définition

Une courbe horizontale γ_u est dite singulière si le contrôle u associé à γ_u est un point critique de l'application End-point. Sinon, elle est dite régulière.



$$\exists k > 0; \ ||u - u^y||_{L^2} \leq k \ |z - y|$$

Preuve du théorème

On considère $c = d_{SR}^2$ le coût de transport. Soit μ et ν deux mesures de probabilité à support compact sur M.
On considère $\alpha \in \Pi(\mu, \nu)$ un plan de transport optimal et (φ, φ^c) les potentiels de Kantorovitch associés à α tq

$$supp(\alpha) \subset \Gamma := \{(x, y) | \varphi^c(y) - \varphi(x) = c(x, y)\}.$$

$\forall x \in M$, $\Gamma(x) := \{y \in M \mid (x, y) \in \Gamma\}$.

Définition

$$\text{L'ensemble statique est } \mathcal{S} := \{x \in M \mid x \in \Gamma(x)\}.$$

$$\text{L'ensemble mobile est } \mathcal{M} := \{x \in M \mid x \notin \Gamma(x)\},$$

Ensemble statique

Proposition (Figalli-Rifford '10)

μ- pp $x \in \mathcal{S}$, on a $\Gamma(x) = \{x\}$.

Idée de la preuve

- $\{X^1, X^2\}$ un repère orthonormal local de Δ.
- $\forall z \in M$, $\varphi(z) = \sup_{y \in M}\{\varphi^c(y) - d_{SR}^2(z, y)\}$ localement lipschitzienne par rapport à d_{SR}.
- **Théorème de Pansu-Rademacher:** φ est différentiable pp par rapport à X^1, X^2.
- $x \in \Gamma(x) \Rightarrow \forall i = 1, 2,\ X^i\varphi(x) = 0$, pp $x \in M$.

Ensemble mobile

Soit $x \in \mathcal{M}$ et $y \in \Gamma(x)$, on a des géodésiques minimisantes régulières et singulières joignant x et y.

Définition

$$\mathcal{M}^R := \{x \in \mathcal{M}; \exists y \in \Gamma(x) \text{ tq toute géodésique minimisante} \\ \text{de } x \text{ à } y \text{ est régulière}\}$$

$$\mathcal{M}^S := \{x \in \mathcal{M}; \forall y \in \Gamma(x), \text{au moins une géodésique} \\ \text{minimisante de } x \text{ à } y \text{ est singulière}\}.$$

Régularité de d_{SR} sur $\mathcal{M}^R$

Proposition

Supposons que Δ n' admet pas de courbes singulières minimisantes non triviales. Alors, d_{SR} est localement Lipschitzienne hors de la diagonale.

Théorème (Figalli- Rifford '10)

Soit μ, ν deux mesures de probabilité à support compact sur M. On suppose que μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue . Si d_{SR} est localement Lipschitzienne hors de la diagonale alors il existe une unique application de transport optimal pour le coût d_{SR}^2.

Preuve du théorème

- $x \in \mathcal{M}^R, y \in \Gamma(x) \Leftrightarrow c(x,y) = \varphi^c(y) - \varphi(x)$
  $\Leftrightarrow \varphi^c(y) = \varphi(x) + c(x,y) \leq \varphi(z) + c(z,y)$,
  $\forall z \in M$
- Soit $\begin{array}{rccl} \psi : & M & \to & \mathbb{R} \\ & z & \mapsto & \psi(z) = c(x,y) + \varphi(z) - \varphi(x) \end{array}$
  telle que $\psi(z) \leq c(z,y), \forall z \in M$, et $\psi(x) = c(x,y)$.
- **Lemme:** Soit x, y deux points distincts sur M et $\psi : M \to \mathbb{R}$ différentielle en x tq

  $$\psi(z) \leq c(z,y), \forall z \in M,\ \ \psi(x) = c(x,y).$$

  Alors, il existe une unique géodésique minimisante $\gamma : [0,1] \to M$ entre x et y. De plus, $y = E_x(-d_x\psi)$.

Courbes horizontales singulières sur les distributions de rang 2 en dimension 4

On considère $M = \mathbb{R}^4$.

$$\forall x \in M, \ \Delta(x) + [\Delta, \Delta](x) \text{ est de dimension 3.} \qquad (3)$$

lemme1

Il existe un ouvert $\mathcal{H}$ de mesure pleine sur M tel que:
$\forall x \in \mathcal{H}, \ T_x M = \Delta(x) + [\Delta, \Delta](x) + [\Delta, [\Delta, \Delta]](x)$.

lemme2

Sur $\mathcal{H}$, il existe un champ de vecteurs horizontal X telles que les courbes horizontales singulières sont exactement les trajectoires des courbes intégrales de X. De plus, pour tout compact K de M, $\exists C > 0$; $div_x X \geq -C|X(x)|, \ \forall x \in K$.

Construction de X?

- $\forall z \in M, \Delta(z) = Span\{X^1(z), X^2(z)\}$.
- $X^1 = \partial_{x_1}, \quad X^2 = \partial_{x_2} + A(.)\partial_{x_3} + B(.)\partial_{x_4}$ où $A, B : M \to \mathbb{R}$ fonctions lisses.
- $[X^1, X^2] = A_{x_1}\partial_{x_3} + B_{x_1}\partial_{x_4}$

Comme $\forall x \in M,\ \Delta(x) + [\Delta, \Delta](x)$ est de dimension 3 alors

$$A_{x_1}(x) \neq 0, \forall x \in M$$

- $[X^1, [X^1, X^2]] = A_{x_1x_1}\partial_{x_3} + B_{x_1x_1}\partial_{x_4}$
- $[X^2, [X^1, X^2]] = E\partial_{x_3} + F\partial_{x_4}$ avec

avec $E = A_{x_2x_1} + AA_{x_3x_1} + BA_{x_1x_4} - A_{x_1}A_{x_3} - B_{x_1}A_{x_4}$,
$F = B_{x_2x_1} + AB_{x_3x_1} + BB_{x_1x_4} - A_{x_1}B_{x_3} - B_{x_1}B_{x_4}$.

Caractérisation des courbes singulières: Soit $\gamma_u : [0,1] \to M$ une courbe horizontale singulière associée à un contrôle $u \in L^2([0,1], \mathbb{R}^2)$. En coordonnées locales, il existe un arc absolument continue $p : [0,1] \to (\mathbb{R}^4)^* \backslash \{0\}$ satisfaisant $\forall i = 1, 2$:

$$\dot{p}(t) = -\sum_{i=1}^{m} u_i(t) p(t).D_{\gamma_u(t)} X^i, \ \ ppt \in [0,1]$$

$$p(t).X^1(\gamma_u(t)) = p(t).X^2(\gamma_u(t)) = 0, \ \forall t \in [0,1]$$

$$\forall t \in [0,1], \ \ p(t).[X^1, X^2](\gamma_u(t)) = 0$$

$$u_1(t) p(t).[X^1, [X^1, X^2]](\gamma_u(t)) + u_2(t) p(t).[X^2, [X^1, X^2]](\gamma_u(t)) = 0$$

$X = \alpha_1 X^1 + \alpha_2 X^2$ avec $\alpha_1 = E \ B_{x_1} - F \ A_{x_1}$

$$\alpha_2 = B_{x_1 x_1} \ A_{x_1} - A_{x_1 x_1} \ B_{x_1}$$

divergence de X ?

$$div_x X = \alpha_1(x)\ div_x X^1 + \alpha_2(x)\ div_x X^2 + X^1(\alpha_1) + X^2(\alpha_2)$$

$$= 2\alpha_2\ (\frac{E}{A_{x_1}} + div_x X^2) + 2\ \alpha_1 \frac{A_{x_1 x_1}}{A_{x_1}}$$

Sur tout compact K de M, $\exists\ k, k' > 0$;

$$div_x X \geq -k|\alpha_1| - k'|\alpha_2|$$

$$\exists C > 0; div_x X \geq -C|X(x)|,\ \forall x \in K$$

Propriété de contraction

Soit $T > 0$, et (φ_t^X) flot de X. Pour tout $K \subset M$ compact,

$$K_t = \varphi_t^X(K), \ \forall t \in [0, T] \text{ et } K_0 = K.$$

$$\mathcal{L}^4(\varphi_t^X(K)) = \int_K exp\Big(\int_0^t div\ X(\varphi_s^X(x))\ \mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{L}^4(K_t) = \mathcal{L}^4(\varphi_t^X(K)) \ \geq \ \int_K exp\Big(-C\int_0^t |X(\varphi_s^X(x))|\ \mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}x$$

Proposition

Soit $T > 0$. Pour tout compact K de M, supposons qu'il existe une constante $L > 0$ telle que pour tout $x \in K$,

$$longueur(\varphi_t^X(x)) = \int_0^t |X(\varphi_s^X(x))| \mathrm{d}s \leq L, \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors,

$$\mathcal{L}^4(K_t) \geq \; exp\Big(-CL\Big) \; \mathcal{L}^4(K), \; \forall t \in [0, T].$$

Que se passe-t-il sur $\mathcal{H}^c$?

$$\mathcal{H}^c = \{x \in M; \Delta(x) + [\Delta, \Delta](x) + [\Delta, [\Delta, \Delta]](x) \neq T_x M\}.$$

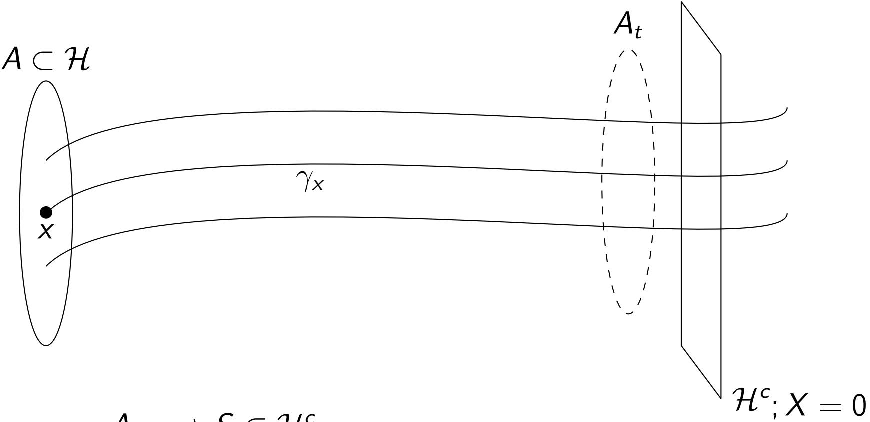
Lemme

Soit A un compact de $\mathcal{H}$ tq $\mathcal{L}^4(A) > 0$.
Soit $T > 0$. Supposons que, $\forall x \in A$, il existe $\gamma_x : [0, T] \to M$ une courbe horizontale singulière de longueur finie avec $\gamma_x(0) = x$. De plus, $\exists L > 0$ tq longueur$(\gamma_x(t)) \leq L$.
Alors, l'ensemble

$$\{x \in A; \exists t \in [0, T]; \gamma_x(t) \in \mathcal{H}^c\}$$

est de mesure de Lebesgue nulle.

Preuve du lemme



$$A_t \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} S \subset \mathcal{H}^c$$

$$\mathcal{L}^4(A_t) \geq \; exp\Big(-CL\Big) \; \mathcal{L}^4(A), \;\; \forall t \in [0,1].$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^4(A) = 0.$$

Existence et unicité de solutions sur $\mathcal{M}^S$

2014-CAVALLETTI et HUESMANN, *Existence and uniqueness of optimal transport maps.*

On considère $\alpha \in \pi(\mu, \nu)$ un plan de transport optimal.

Soit $P^i : M \times M \to M$ la projection de la i-ème composante.

Lemme 3

Soit Λ_1, Λ_2 deux compacts de Γ tq

(i) $P^1(\Lambda_1) = P^1(\Lambda_2) \subset \mathcal{M}^S$

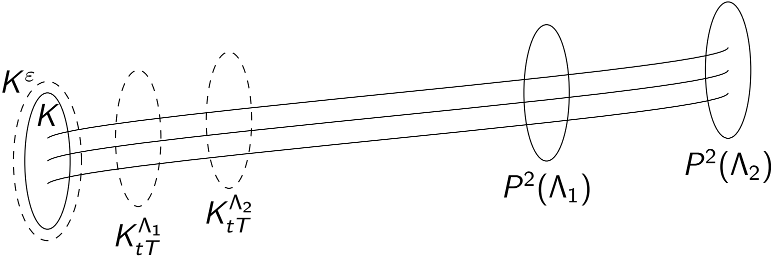
(ii) $P^2(\Lambda_1) \cap P^2(\Lambda_2) = \emptyset$

Alors, $\mathcal{L}^4\Big(P^1(\Lambda_1)\Big) = \mathcal{L}^4\Big(P^1(\Lambda_2)\Big) = 0.$

Preuve du Lemme

Soit $K = P^1(\Lambda_1) = P^1(\Lambda_2)$ et $\forall i = 1, 2$, $\forall t \in [0, 1]$,

$$K_{tT}^{\Lambda_i} := \{\varphi_{tT}^X(x) |\ \varphi_0^X(x) \in K,\ \varphi_T^X(x) \in P^2(\Lambda_i)\}.$$



$$K^\varepsilon := \{x \in M |\ d_{SR}(x, K) < \varepsilon\}.$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^4(K) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{L}^4(K^\varepsilon) &\geq \lim_{t\to 0} \mathcal{L}^4(K_{tT}^{\Lambda_1} \cup K_{tT}^{\Lambda_2}) \\
&= \lim_{t\to 0} \mathcal{L}^4(K_{tT}^{\Lambda_1}) + \mathcal{L}^4(K_{tT}^{\Lambda_2}) \\
&\geq exp(-CL)\mathcal{L}^4(K) + exp(-CL)\mathcal{L}^4(K) \\
&= 2\ exp(-CL)\mathcal{L}^4(K)
\end{aligned}
$$

Choisissons $L > 0$ assez petit, $exp(-CL) > \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^4(K) = 0.$$

Supposons que le plan de transport α n'est pas induit par une application.

- $\exists$ un compact E de $\mathcal{M}^S$; $\mathcal{L}^4(E) > 0$ et une application continue $T : M \to M$ tq $\forall x \in E$
  1. $(x, T(x)) \in \Gamma$
  2. $\exists y \neq T(x)$ tq $(x, y) \in \Gamma$
- Soit
$$\Xi_1 := \{(x, T(x)) \in \Gamma : x \in E\}$$
  et
$$\Xi_2 := \{(x, y) \in \Gamma : \ y \neq T(x); x \in E\}$$

- $P^1(\Xi_1) = P^1(\Xi_2) = E$ avec

$$\mathcal{L}^4(P^1(\Xi_1)) > 0$$

- $P^2(\Xi_1) \cap P^2(\Xi_2) = \emptyset$
- D'après le lemme 3,

$$\mathcal{L}^4(P^1(\Xi_1)) = 0$$

Merci pour votre attention !!