Contrôle continu 2

Groupe 16 – DEGEAD1 – Université Paris-Dauphine

18 avril 2017

Le corrigé détaillé suivant doit vous servir d'exemple de rédaction pour les exercices et examens à venir. En particulier il est important de justifier de façon concise ce que vous affirmez, de préférence en vous référant de façon précise au cours.

Exercice 1

1) Les deux fonctions de coût marginales sont définies par :

$$\forall (p,q) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \frac{\partial f}{\partial p}(p,q) = \frac{-8\mathrm{e}^{1-q}}{p^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial f}{\partial q}(p,q) = \frac{-16\mathrm{e}^{1-q}}{\sqrt{p}},$$
$$\frac{\partial g}{\partial p}(p,q) = \frac{-\mathrm{e}^{4-p}}{q^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial q}(p,q) = \frac{-2\mathrm{e}^{4-p}}{q^3}.$$

Les deux élasticités marginales peuvent pas exemple être calculées en utilisant la formule du logarithme. On calcule :

$$\forall (p,q) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, (\ln f)(p,q) = \ln(16) + 1 - q - \frac{1}{2}\ln p \quad \text{et} \quad (\ln g)(p,q) = 4 - p - 2\ln q, \tag{1}$$

et on en déduit que

$$\forall (p,q) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, e_{f/p}(p,q) = p\frac{\partial}{\partial p}(\ln f)(p,q) = -\frac{1}{2}, \quad e_{f/q}(p,q) = q\frac{\partial}{\partial q}(\ln f)(p,q) = -q,$$
$$e_{g/p}(p,q) = p\frac{\partial}{\partial p}(\ln g)(p,q) = -p \quad \text{et} \quad e_{g/q}(p,q) = q\frac{\partial}{\partial q}(\ln g)(p,q) = -2.$$

2) La variation absolue correspondant à des variations Δp et Δq des prix valant initialement p et q peut être approximée par :

$$\mathrm{d}f_{(p,q)}(\Delta p, \Delta q) = \frac{\partial f}{\partial p}(p,q)\Delta p + \frac{\partial f}{\partial q}(p,q)\Delta q.$$

Ici $p = 4$, $q = 1$, $\Delta p = -0.2$ et $\Delta q = 0.1$, or les marginales en ces points valent :

$$\frac{\partial f}{\partial p}(4,1) = -1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial q}(4,1) = -8,$$

donc la variation absolue approchée est $\mathrm{d}C_{(4,1)}(-0.2, 0.1) = -1 \times (-0.2) - 8 \times 0.1 = -0.6$.

3) La variation relative de $f(p,q)$ correspondant à des variations relatives $\frac{\Delta p}{p}$ et $\frac{\Delta q}{q}$ des prix valant initialement p et q peut être approximée par :

$$\frac{\mathrm{d}f_{(p,q)}(\Delta p, \Delta q)}{f(p,q)} = e_{f/p}(p,q)\frac{\Delta p}{p} + e_{f/q}(p,q)\frac{\Delta q}{q}, \tag{2}$$

et de même pour g. Ici $p = 4$, $q = 1$, $\frac{\Delta p}{p} = 2\%$ et $\frac{\Delta q}{q} = -3\%$, or les élasticités en ces points valent :

$$e_{f/p}(4,1) = -\frac{1}{2}, \quad e_{f/q}(4,1) = -1, \quad e_{g/p}(4,1) = -4, \quad \text{et} \quad e_{g/q}(4,1) = -2,$$

donc les variations relatives approchées sont

$$\frac{\mathrm{d}f_{(4,1)}(\Delta p, \Delta q)}{f(4,1)} = -\frac{1}{2} \times 2\% - 1 \times (-3\%) = 2\%,$$
$$\frac{\mathrm{d}g_{(4,1)}(\Delta p, \Delta q)}{g(4,1)} = -4 \times 2\% - 2 \times (-3\%) = -2\%.$$

4) En remplaçant les élasticités par leurs valeurs en $(4,1)$ dans l'équation(2) on obtient :

$$3\% = \frac{\mathrm{d}f_{(p,q)}(\Delta p, \Delta q)}{f(p,q)} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta p}{p} - \frac{\Delta q}{q}, \tag{3}$$

et en procédant de même pour le bien Y on a

$$-6\% = \frac{\mathrm{d}g_{(p,q)}(\Delta p, \Delta q)}{g(p,q)} = -4\frac{\Delta p}{p} - 2\frac{\Delta q}{q}. \tag{4}$$

Il s'agit donc de résoudre le système

$$\begin{cases} 3\% = -\frac{1}{2}\frac{\Delta p}{p} - \frac{\Delta q}{q}, \\ -6\% = -4\frac{\Delta p}{p} - 2\frac{\Delta q}{q}. \end{cases} \tag{5}$$

Après résolution on obtient une variation relative $\frac{\Delta p}{p} = 4\%$ du prix du bien X et $\frac{\Delta q}{q} = -5\%$ pour le bien Y.

5) Le coût total de production est $C(x,y)$ où les quantités x et y produites sont égales aux demandes correspondantes aux prix p et q : $x = f(p,q)$ et $y = g(p,q)$. On a donc

$$\widetilde{C}(p,q) = C\big(f(p,q), g(p,q)\big) = \left(1 + \frac{4\mathrm{e}^{2-2q}}{p}\right)\left(2 + \frac{\mathrm{e}^{2-\frac{p}{2}}}{q}\right). \tag{6}$$

Les deux fonctions partielles s'écrivent comme le produit de deux fonctions positives décroissantes, pour tout $p, q > 0$, donc elles sont bien décroissante. Cela semble naturel car plus les produits sont cher, plus la demande est faible et donc moins il y a à produire.

6) Si les prix des deux biens sont p et q alors l'entreprise vend $f(p,q)$ unités du bien X au prix unitaire p et $g(p,q)$ unités du bien Y au prix unitaire q. Le chiffre d'affaire est donc $p\,f(p,q) + q\,g(p,q)$. Pour calculer le bénéfice il faut retrancher les coûts de production donc

$$\forall (p,q) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ B(p,q) = p\,f(p,q) + q\,g(p,q) - \widetilde{C}(p,q). \tag{7}$$

7) On calcule la première dérivée partielle :

$$\forall (p,q) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \frac{\partial B}{\partial p}(p,q) = f(p,q) + p\frac{\partial f}{\partial p}(p,q) + q\frac{\partial g}{\partial p}(p,q) - \frac{\partial \widetilde{C}}{\partial p}(p,q). \tag{8}$$

Précisons les dérivées partielles du coût par rapport aux prix :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{C}}{\partial p}(p,q) &= -\frac{4\mathrm{e}^{2-2q}}{p^2}\left(2 + \frac{\mathrm{e}^{2-\frac{p}{2}}}{q}\right) - \left(1 + \frac{4\mathrm{e}^{2-2q}}{p}\right)\frac{\mathrm{e}^{2-\frac{p}{2}}}{2q} < 0, \\ \frac{\partial \widetilde{C}}{\partial q}(p,q) &= -\frac{8\mathrm{e}^{2-2q}}{p}\left(2 + \frac{\mathrm{e}^{2-\frac{p}{2}}}{q}\right) - \left(1 + \frac{4\mathrm{e}^{2-2q}}{p}\right)\frac{\mathrm{e}^{2-\frac{p}{2}}}{q^2} < 0. \end{aligned} \tag{9}$$

On a vu précédemment que les trois dérivées partielles du terme de droite dans (8) sont négatives. Le terme $f(p,q) > 0$ traduit le fait que si l'on vend x unités du bien X un centime plus cher alors on gagne x centimes. Le terme $p\frac{\partial f}{\partial p}(p,q) + q\frac{\partial g}{\partial p}(p,q)$ traduit que si l'on vend Δx unités de moins du bien X et Δy unités de moins du bien Y alors on perd le profit $p\Delta x + q\Delta y$. Enfin le dernier terme est négatif, car comme dit à la question 5 des prix plus élevés impliquent moins de coûts de production. La formule et le commentaire sont analogue concernant le prix q.

8) Il s'agit ici de calculer l'approximation affine de la fonction B au point $(4,1)$. Pour cela on calcule ses dérivées partielles en ce point :

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial p}(4,1) &= f(4,1)+4\frac{\partial f}{\partial p}(4,1)+1\times\frac{\partial g}{\partial p}(4,1)-\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial p}(4,1)\\ &= 8+4\times(-1)-8+\frac{4}{16}(2+1)+(1+1)\frac{1}{2}=\frac{19}{4}>0,\\ \frac{\partial B}{\partial q}(4,1) &= 4\frac{\partial f}{\partial q}(4,1)+g(4,1)+1\times\frac{\partial g}{\partial q}(4,1)-\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial q}(4,1)\\ &= 4\times(-8)+1-1+\frac{1}{4}(2+1)+(1+1)\times 1=-\frac{127}{4}<0.\end{aligned} \tag{10}$$

On a donc

$$B(4+\Delta p, 1+\Delta q)\approx B(4,1)+\frac{19}{4}\Delta p-\frac{127}{4}\Delta q, \tag{11}$$

pour des petites variations de p et q, ce qui signifie que le bénéfice augmentera si l'on augmente légèrement le prix du bien X et que l'on diminue légèrement celui du bien Y.

Exercice 2

1) La fonction $(x,y)\to x^2+y^2$ est un polynôme, donc C^∞, et l'exponentielle est aussi C^∞. Par conséquent, g est C^∞ comme composée de deux fonctions C^∞.

2) La ligne de niveau k pour $k\in\mathbb{R}$ est donnée par l'ensemble

$$C_k=\{(x,y)\in\in^2 |g(x,y)=k\}.$$

Il est clair que $\forall\,(x,y)$, $g(x,y)>0$ et $g(x,y)\leq 1$, donc C_k est vide pour $k\leq 0$ et $k>1$. Pour $k\in(0,1]$, on cherche les points $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que

$$\exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right)=k,$$

c'est-à-dire

$$x^2+y^2=-2\log(k).$$

La ligne de niveau k est donc un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{-2\log(k)}$ (attention, $\log(k)$ est négatif quand $k\in(0,1]$!). On peut aussi chercher directement des lignes de niveau pour $k\in\mathbb{R}$ et observer qu'il n'y a pas de solution quand k n'est pas dans $(0,1]$.

3) . La fonction g est régulière sur $\mathbb{R}^2$. Ses dérivées premières sont données par, $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-x\times\exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right),\quad \frac{\partial g}{\partial x}=-y\times\exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right),$$

et ses dérivées secondes sont

$$r=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=(x^2-1)\times\exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right),\quad t=\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(y^2-1)\times\exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right),\quad s=\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}=xy\times\exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right)$$

4) On cherche les points $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $rt-s^2\geq 0$, c'est-à-dire

$$\left((x^2-1)\times(y^2-1)-x^2y^2\right)\times\exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right)\geq 0.$$

Comme $\exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right)\geq 0$, cela correspond aux points $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que

$$(x^2-1)\times(y^2-1)-x^2y^2\geq 0,$$

ce qui se réécrit

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Autrement dit, $rt - s^2$ est positif ou nul dans le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1. D'après la question précédente, on a $r \leq 0$ et $t \leq 0$ dans ce disque. Enfin, ce disque est **convexe**, donc g est bien concave sur ce disque.

5) D'après la question 3, on trouve facilement que le seul point critique est $(0,0)$. Or, d'après la question précédente, g est concave sur le disque de centre $(0,0)$, et atteint donc un maximum local. De plus, on a $g(0,0) = 1$ et il est clair que $g(x,y) < 1$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, donc ce maximum est en fait global.

6) On définit la fonction marginal sous la contrainte $y = \sqrt{1-x}$ par $\bar{g}(x) = g(x, \sqrt{1-x})$ pour $x \leq 1$. On a alors

$$\bar{g}(x) = \exp\left(-\frac{(x^2 + 1 - x)}{2}\right)$$

et la dérivée s'écrit

$$\bar{g}'(x) = (-x + \frac{1}{2}) \times \exp\left(-\frac{(x^2 + 1 - x)}{2}\right).$$

On voit que le seul point critique de la fonction est $x^* = 1/2$ et on vérifie aisément qu'il s'agit d'un maximum global pour $x \leq 1$. Par la contrainte, on obtient le y correspondant $y^* = 1/\sqrt{2}$. On voit que le maximum n'est plus atteint en $(0,0)$ et que $g(0,0) > g(x^*, y^*)$, la contrainte empêche donc d'atteindre le point optimal.

Exercice 3

1) La fonction $x \to x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$, donc $(x,y) \to x^2 + y^2$ est convexe comme somme de deux fonctions convexes d'une variable. On note $h(x,y) = 4\sqrt{xy}$, qui est régulière sur $\mathcal{D}$. Il ne semble pas qu'un théorème du cours permette de conclure quant à la concavité de h, on calcule donc ses dérives premières

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 2\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}},$$

et ses dérivées secondes

$$r = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -\frac{\sqrt{y}}{x^{3/2}}, \quad t = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -\frac{\sqrt{x}}{y^{3/2}}, \quad s = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\sqrt{xy}},$$

On calcule donc que pour $(x,y) \in \mathcal{D}$, $rt - s^2 = 0$. De plus, sur $\mathcal{D}$, on a $r \neq 0$, et $\mathcal{D}$ est convexe, donc h est concave sur $\mathcal{D}$.

Finalement, comme $a > 0$, la fonction $-ah$ est convexe. Par conséquent, f est la somme de deux fonctions convexes sur un domaine convexe, donc elle est convexe. NB: on peut aussi calculer directement r, t, s pour f, mais il est toujours bon de décomposer.

2) Les dérivées de f découlent directement de la question précédente. On a pour les dérivées premières:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2a\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2a\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}},$$

et ses dérivées secondes

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + a\frac{\sqrt{y}}{x^{3/2}}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + a\frac{\sqrt{x}}{y^{3/2}}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{a}{\sqrt{xy}},$$

3) La fonction f est convexe donc a au plus un point critique. On le trouve en cherchant les points $(x,y) \in \mathcal{D}$ tels que

$$\begin{cases} x - a\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = 0, \\ y - a\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = 0. \end{cases}$$

On peut résoudre ce système par substitution. On peut également remarquer (par symétrie) que $M_a = (a, a) \in \mathcal{D}$ est solution du sytème et qu'on sait qu'il a au plus une solution, donc c'est la seule. Comme f est convexe et que M_a est un point critique, f atteint son minimum global en M_a, qui a pour valeur $f(a, a) = -2a^2$.

4) Au point M_a, les dérivées premières sont nulles (point critique). On calcule donc les valeurs de r, t et s en ce point, ce qui donne

$$r = 3, \quad t = 3, \quad s = -1.$$

Par conséquent, le DL à l'ordre 2 s'écrit, pour $h \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$ assez petits,

$$f(a+h, a+k) = -2a^2 + \frac{1}{2}\left(3h^2 - kh + 3k^2\right) + \varepsilon(h^2 + k^2),$$

où ε est un reste négligeable devant les termes précédents.

5) On remarque que $f(ax, ay) = a^2 \times (x^2 + y^2 - 4\sqrt{xy})$, on aurait donc pu étudier la fonction pour le paramètre $a = 1$ puis travailler par homogénéïté (en multipliant par a^2. Cette homogénéïté de degré 2 explique le fait que les coefficients r, t et s ne dépedent par de a, car ce sont des dérivées d'ordre 2.

6) On remarque que M_a appartient à la droite d'équation $y = x$. La fonction est symétrique car $f(x, y) = f(y, x)$, et est donc symétrique par rapport à la droite $y = x$. Si la fonction possédait un minimum en dehors de cette droite, elle possèderait également son symétrique par rapport à $y = x$. Or, elle ne peut posséder qu'un minimum au plus car elle est convexe, donc ce minimum (s'il existe) se trouve forcément sur cette droite. On aurait donc pu résoudre le problème en posant $y = x$ et en minimisant une fonction d'une variable, ce qui est bien plus simple (d'où l'intérêt des raisonnements par symétrie !).