Contrôle continu 2

Groupe 16 – DEGEAD1 – Université Paris-Dauphine

18 avril 2017

*Les documents et calculatrices sont interdits. La qualité de rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les trois exercices sont indépendants. Les * distinguent les questions de difficulté supérieure.*

Exercice 1

Les questions 5 à 8 sont indépendantes des questions 2 à 4.

Soient $f(p,q)$ et $g(p,q)$ les quantités demandées de deux biens X et Y en fonction de leurs prix unitaires p et q. On suppose que :

$$\forall (p,q) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ f(p,q) = \frac{16\mathrm{e}^{1-q}}{\sqrt{p}} \quad \text{and} \quad g(p,q) = \frac{\mathrm{e}^{4-p}}{q^2}.$$

1) Calculer les demandes marginales partielles et les élasticités partielles des fonctions de demande f et g en fonction des prix p et q. Commenter sur le signe des quantités obtenues.

Dans ce qui suit on se place à une situation de référence où les prix sont $p = 4$ et $q = 1$. On demande uniquement des calculs approchés.

2) Quelle est la variation absolue de la demande du bien X si p passe à 3.8 et q passe à 1.1 ?

3) On suppose que p augmente de 2% à partir de $p = 4$ et q diminue de 3% à partir de $q = 1$. Quelle sont alors les variations relatives des demandes en bien X et Y ?

4) On observe une augmentation de la demande en bien X de 3% et une diminution de la demande en bien Y de 6%. Quelles variations relatives des prix ont provoqué ce changement ?

Notons à présent x la quantité produite de bien X et y la quantité produite de bien Y. Le coût total de production associé est :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ C(x,y) = \left(1 + \left(\frac{x}{8}\right)^2\right)(2 + \sqrt{y}).$$

5) On suppose que la production des biens X et Y est égale à leur demande. Écrire la fonction de coût total en fonction des prix p et q des biens X et Y, on note $\widetilde{C}(p,q)$ ce coût. Vérifier sans calcul que les fonctions partielles de $\widetilde{C}^1_{(p,q)}$ (q fixé) et $\widetilde{C}^2_{(p,q)}$ (p fixé) sont décroissante pour tout prix $p, q > 0$ et commenter.

6) * Écrire le bénéfice réalisé $B(p,q)$ en fonction des prix p et q, en utilisant les fonctions f, g et $\widetilde{C}$.

7) * Calculer les deux dérivées partielles de la fonction de profit (bénéfice) par rapport aux variables prix p et q. Commenter le signe des différents termes qui apparaissent.

8) * Les prix sont actuellement $p = 4$ et $q = 1$, quelles sont vos préconisations pour augmenter le profit de l'entreprise ?

Question de cours

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe C^2 sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$. Donner la définition de la matrice hessienne de f en tout point de $\mathcal{U}$ en utilisant les dérivées partielles et les coefficients r, s, t vus en cours.

Exercice 2

On définit la fonction gaussienne en deux dimensions par:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = \exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right).$$

1) Justifier rapidement que g est régulière (de classe C^∞) sur $\mathbb{R}^2$.

2) Donner l'équation des lignes de niveau de hauteur k de g pour $k \in \mathbb{R}$. On distinguera trois cas et on tracera quelques lignes de niveaux dans le plan.

3) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de g en tout point.

4) Trouver le plus grand ensemble (au sens de l'inclusion) sur lequel $rt - s^2 \geq 0$. Montrer que cet ensemble est convexe et étudier la convexité/concavité de g sur cet ensemble.

5) Trouver le point critique de g et montrer qu'il s'agit d'un extremum local (on précisera de quel type). Montrer par un argument simple que cet extremum est global.

6) * On impose la contrainte $y = \sqrt{1-x}$. Trouver le maximum de g sous cette contrainte, qu'on représentera sur la même graphique que celui de la question 2. Commenter.

Exercice 3

On définit la fonction f sur $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0,\, y > 0\}$ par

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4a\sqrt{xy},$$

où $a > 0$ est un paramètre fixé.

1) Montrer que $(x,y) \to x^2 + y^2$ est une fonction convexe. Montrer que $(x,y) \to 4\sqrt{xy}$ est concave. L'ensemble $\mathcal{D}$ est-il ouvert, fermé, convexe ? En déduire la convexité ou concavité de f sur $\mathcal{D}$.

2) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f sur $\mathcal{D}$.

3) Trouver le point critique de f sur $\mathcal{D}$ en fonction du paramètre a que l'on notera M_a, et étudier sa nature. Calculer la valeur de la fonction en ce point.

4) Calculer le développement limité à l'ordre 2 de f au point a. Les coefficients d'ordre 2 (r, t, s) dépendent-ils du paramètres a ?

5) * Calculer $f(ax, ay)$ en fonction de la fonction $(x,y) \to x^2 + y^2 - 4\sqrt{xy}$. Commenter par rapport à la question précédente.

6) * Montrer que M_a appartient à une droite du plan et justifier ce résultat par un argument de symétrie de la fonction f. Commenter.