Correction du CC 1

Groupe 21 – DEGEAD1 – Université Paris-Dauphine

24 Février 2017

Le corrigé détaillé suivant doit vous servir d'exemple de rédaction pour les exercices et examens à venir. En particulier il est important de justifier de façon concise ce que vous affirmez, de préférence en vous référant de façon précise au cours. Les calculs sont ici volontairement très détaillés, vous pouvez les enchaîner plus rapidement si vous le souhaitez.

Exercice 1

1) Le bord du domaine de définition est constitué des points $t = 1$ et $t = 1$. On calcule aisément $f(0) = f(1) = 0$. Le fait que $f(0) = 0$ est clair : si l'Etat ne taxe pas, il n'a pas de recette. Le résultat $f(1) = 0$ représente le fait que si l'Etat taxe à 100%, les gens n'ont pas intérêt à travailler, donc personne ne travaille et l'Etat ne gagne rien non plus.

2) En utilisant le fait que pour deux fonctions u et v définies sur le même domaine, on a $(uv)' = u'v + uv'$ et $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$ on obtient avec le choix $u(t) = t^a$, $v(t) = (1-t)^{1-a}$:

$$\forall\, t \in]0,1[, \quad f'(t) = at^{a-1}(1-t)^{1-a} - (1-a)t^a(1-t)^{-a}.$$

On remarque que u n'est pas dérivable en 0, et v n'est pas dérivable en 1, et on vérifie bien que f' n'est pas définie en 0 et en 1 (attention, $a \in]0,1[$, donc $-a < 0$ et $a - 1 < 0$). Par conséquent, $D_{f'} =]0,1[\subset D_f = [0,1]$.

3) Pour trouver le point critique de f, on peut factoriser par les plus grandes puissances dans l'expression de f'. Cela donne $f'(t) = t^{a-1}(1-t)^{-a}\,(a(1-t) - t(1-a)) = t^{a-1}(1-t)^{-a}(a-t)$. On a donc un point critique en $t^* = a$, f est croissante sur $]0,a[$, décroissante sur $]a,0[$ et $f(0) = f(1) = 0$. D'après la remarque à la question précédente, on voit aussi que $f'(t) \to +\infty$ quand $t \to 0^+$ et $f'(t) \to -\infty$ quand $t \to 1^-$.

4) Pour le calcul de l'élasticité, on peut par exemple utiliser la formule

$$e_f(t) = t\,(\log(f(t)))'.$$

Ici, on a simplement $\log(f(t)) = a\log(t) + (1-a)\log(1-t)$. On a alors immédiatement:

$$e_f(t) = t\left(\frac{1}{t} - \frac{1-a}{1-t}\right) = \frac{a-t}{1-t}.$$

On voit que $e_f(t) \to a$ quand $t \to 0$, mais e_f n'a pas de limite finie en $t = 1$. On peut s'étonner de ce résultat alors que la dérivée n'est définie n'est en 0, ni en 1. Une explication est que l'élasticité ne concerne que des variations *relatives*, donc parler de l'élasticité en 0 n'a pas vraiment de sens.

5) Pour $a = 0,3$, on a

$$e_f(t) = \frac{0,3-t}{1-t}.$$

En appliquant à $t = 0,5$, on obtient $e_f(0,5) = (0,3 - 0,5) \times 2 = -0,4$. Enfin, en notant Δf et Δt les variations *relatives* de f et t respectivement, on a d'après le cours $\Delta f = e_f \Delta t$ et donc la variation de taux correspondante est

$$\Delta t = \frac{0,05}{-0,4} = -12,5\%.$$

Ce qui fait que le taux approché est $0,5 - 0,5 \times 12,5\% \approx 0,44$. L'Etat doit donc diminuer son taux d'imposition pour augmenter ses recettes ! Cela vient du fait que si les taxes baissent, plus de gens acceptent de travailler (ou déclarent leurs revenus !). C'est ce que traduit l'expression «trop d'impôt tue l'impôt».

Exercice 2

1) On rappelle que $\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$ donc ici $\forall x > 0,\ g(x) = \exp\left(\frac{f(x)}{x}\right)$.

2) On remarque que $f(0) = 0$ donc la fraction dans l'exponentielle est une forme indéterminée en 0.

3) Le développement limité de f au point $a = 0$ à l'ordre 1 s'écrit :

$$f(h) = f(0) + f'(0) \times h + h\varepsilon(h) \tag{1}$$

où h est suffisemment petit, et où $\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$. On calcule d'abord $f(0) = \ln(1) = 0$ et $f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$. Ainsi le développement limité recherché est :

$$\boxed{f(h) = h + h\varepsilon(h)}, \tag{2}$$

où h est suffisemment petit. On a donc

$$g(h) = \exp\left(\frac{h + h\varepsilon(h)}{h}\right) = \exp(1 + \varepsilon(h)) \xrightarrow[h \to 0]{} \mathrm{e}. \tag{3}$$

4) La dérivée de la fonction g est

$$\begin{aligned} \forall x > 0,\ g'(x) &= \left(\frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}\right) \exp\left(\frac{f(x)}{x}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}\right) \exp\left(\frac{f(x)}{x}\right) \\ &= \frac{\psi(x)}{x^2} g(x), \end{aligned} \tag{4}$$

et la dérivée de la fonction ψ est

$$\forall x > 0,\ \psi'(x) = -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{-x}{(1+x)^2} < 0. \tag{5}$$

La fonction ψ est donc strictement décroissante. Notant que $\psi(0) = 0$, on en déduit que $\psi < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On sait de plus que $\forall x > 0,\ g(x) = (1+x)^x > 0$, donc d'après (4) on a $g' < 0$. La fonction g est donc strictement décroissante.

On sait que $\psi(0) = 0$ et que $g(0) \xrightarrow[x \to 0]{} e$ donc $g'(x) = \frac{\psi(x)}{x^2} g(x)$ est une forme indéterminée en 0.

5) On effectue le développement limité de ψ à l'ordre 2 en 0 :

$$\forall h \geq 0,\, \psi(h) = \psi(0) + \psi'(0)h + \psi''(0)\frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h), \tag{6}$$

où $\psi(0) = 0$ et $\psi'(0) = 0$. De plus

$$\forall x > 0,\, \psi''(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2}{(1+x)^3}, \tag{7}$$

donc $\psi''(0) = -1$. Ainsi

$$\forall h \geq 0,\, \psi(h) = -\frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h), \tag{8}$$

donc

$$\forall h > 0,\, g'(h) = \frac{\psi(h)}{h^2}g(h) = \frac{-\frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)}{h^2}g(h) = \left(-\frac{1}{2} + \varepsilon(h)\right)g(h). \tag{9}$$

Ainsi on en déduit $\lim_{h\to 0} g'(h) = -\frac{1}{2}\lim_{h\to 0} g(h) = -\frac{\mathrm{e}}{2}$.

Exercice 3

1) Le coefficient discriminant de P est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc P est de signe constant. De plus son coefficient dominant est $1 > 0$ donc $P > 0$.

2) La droite admet le vecteur $\vec{AB} = (2, -1)$ comme vecteur directeur donc pour tout $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} M \text{ appartient à la droite} &\Leftrightarrow \vec{AM} \parallel \vec{AB} \\ &\Leftrightarrow \det\left(\vec{AM}, \vec{AB}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-0)\times(-1) - (y-1)\times 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

3) L'ensemble H est situé sous la droite, $\mathcal{E}$ est sité au-dessus de la parabole donc l'ensemble $\mathcal{C}$ est compris entre le polynôme et la droite.

4) On remarque d'abord que H est un demi-plan donc qu'il est convexe. De plus la fonction P est convexe car $P'' = 2 > 0$ donc son épigraphe $\mathcal{E}$ est un ensemble convexe. L'ensemble $\mathcal{C}$ est donc convexe comme intersection de ces deux convexes.

   L'ensemble $\mathcal{C}$ est borné car il est inclus dans une boule (cf schéma). Cependant il n'est pas fermé car il ne contient pas la partie de sa frontière délimitée la droite (inégalité stricte $<$), et il n'est pas ouvert car il contient la partie de sa frontière délimitée par la parabole (inégalité large $\geq$).

5) Soit $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ à l'intersection de la droite et du polynôme, alors ses coordonnées vérifient les deux équation cartésienne :

$$\begin{cases} 2y + x - 2 = 0 \\ y = x^2 + x + 1 \end{cases} \tag{11}$$

   donc en substituant la seconde équation dans la première on trouve $0 = 2(x^2+x+1)+x-2 = 2x^2 + 3x = x(2x+3)$, donc $x \in \{0, -\frac{3}{2}\}$. Pour $x = 0$ on obtient $y = 1$ et pour $x = -\frac{3}{2}$ on obtient $y = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{4}$ donc les deux points d'intersection ont pour coordonnées $A = (0, 1)$ et $C = (-\frac{3}{2}, \frac{7}{4})$.

Exercice 4

1) L'équation caractérisant $\mathcal{C}$ se réécrit aisément $(x+1)^2 + y^2 = 2$, ce qui est l'équation d'un cercle de centre $(-1, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$

2) On voit que l'équation précédente peut se réécrire $y^2 = 2-(x+1)^2$, soit $y = \pm\sqrt{2-(x+1)^2}$. L'équation du cercle peut donc s'écrire à l'aide de l'union de deux courbes, l'une d'équation $y = f(x)$ (partie du cercle au-dessus de l'axe des abscisses), l'autre $y = -f(x)$, partie sous l'axe des abscisses. La fonction f est définie sur $[-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$. Pour le voir, on peut écrire que f est définie pour les x tels que $2-(x+1)^2 \geq 0$ et chercher les racines du polynôme $x \to 2-(x+1)^2$, ou bien en voyant que cette condition est équivalente (en passant $(x+1)^2$ à droite et en prenant la racine carrée) à $|x+1| \leq \sqrt{2}$.

3) En utilisant que pour une fonction u bien définie, $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$ et en appliquant ce résultat à $f(x) = u(x)^\alpha$ pour $u(x) = 2-(x+1)^2$ et $\alpha = 1/2$, on obtient:

$$\forall\, x \in]-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}[f'(x) = \frac{-2(x+1)}{2\sqrt{2-(x+1)^2}}.$$

Notez que, comme pour le premier exercice, f n'est pas dérivable au bord du domaine. On obtient alors $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$, soit l'approximation affine $\hat{f}_0(x) = 1 - x$ au point 0. Comme f représente la partie supérieure du cercle, la droite $y = 1 - x$ est donc tangente au cercle au point $(0, 1)$.

4) La fonction g est régulière sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $g'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$. Donc $g(0) = 1$, $g'(0) = -1$, et la courbe représentative de g admet l'approximation affine $\hat{g}_0(x) = 1 - x$ au point $x = 0$. Comme $g(0) = 1$, on en déduite que la courbe représentative de g est tangente au cercle de centre $(-1, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$ (*i.e.* elles ont une tangente commune, la droite d'équation $y = 1 - x$).

5) Concernant l'ensemble $\mathcal{E}$: il est ouvert (inégalité stricte), non-borné (il contient le demi-plan $y < 0$ qui est clairement non borné par exemple), et non-convexe (car il est situé **sous** la courbe d'une fonction convexe. L'ensemble $\mathcal{B}$ est simplement la boule fermée de centre $(-1, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$ (voir question 1). C'est donc un ensemble fermé, borné et convexe. Comme il est fermé, son complémentaire et ouvert, et l'intersection de deux ouverts est un ouvert, donc $\mathcal{E} \cap \mathcal{B}^c$ est ouvert. Il est non-bornée (contient par exemple la demi-droite $y = 0$, $x \geq 1$) et non convexe. Pour ce dernier point, on peut par exemple prendre les points $(-3, 0)$ et $(1, 0)$, et remarquer que leur milieu $(-1, 0)$ est dans la boule $\mathcal{B}$, donc n'est pas dans $\mathcal{E} \cap \mathcal{B}^c$.