Corrigé du devoir Maison 1

NB : s'entrainer à faire le devoir chez soi avant de regarder la correction.

EXERCICE 1

Partie 1: Approximation affine et quadratique.
1) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : x \to \frac{1}{(1+x^2)^\alpha},$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction C^∞ *qui ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$. Le cas $\alpha = 0$ est trivial donc on considère par la suite que $\alpha > 0$. La fonction g définie par

$$g : x \to \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

est C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme composée des fonctions $x \to \mathrm{e}^x$ et $x \to -x^2/2$ qui sont régulières sur $\mathbb{R}$. On peut donc calculer les dérivées de ces fonctions sur $\mathbb{R}$. En écrivant $f(x) = (1+x^2)^{-\alpha}$ on calcule:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{-2\alpha x}{(1+x^2)^{\alpha+1}}, \quad g'(x) = -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

2) On constate que $f'(0) = 0$ et $g'(0) = 0$. Par conséquent, pour $h \in \mathbb{R}$:

$$\hat{f}_0(h) = f(0) + hf'(0) = 1,$$

et de même

$$\hat{g}_0(h) = g(0) + hg'(0) = 1.$$

On constate que ces approximations sont identiques, mais surtout qu'elles sont *constantes*. Cela revient à approcher la valeur de ces fonctions au voisinage de 0 par la valeur en 0 ce qui est manifestement peu précis.
3) On rappelle la formule du polynôme de Taylor d'ordre deux en un point a d'une fonction f régulière sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P_2(f,a)(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2}. \tag{1}$$

Pour calculer le polynôme de Taylor de f et g à l'ordre 2, on peut donc calculer leurs dérivées secondes et en particulier leurs valeurs en $a = 0$. On a tout d'abord (en utilisant la formule de la dérivée d'un produit de fonctions à la fonction f'):

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \frac{-2\alpha}{(1+x^2)^{\alpha+1}} + \frac{4x^2\alpha(\alpha+1)}{(1+x^2)^{\alpha+2}},$$

d'où $f''(0) = -2\alpha$. Ensuite

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) = (x^2-1)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

d'où $g''(0) = 1$. En appliquant la formule (1), on obtient donc

$$\forall\, h \in \mathbb{R}, \quad P_2(f,0)(h) = 1 - \alpha h^2, \quad P_2(g,0)(h) = 1 - \frac{h^2}{2}. \tag{2}$$

Les approximations affines de f et g étaient des fonctions constantes. Avec un polynôme d'ordre 2 on est capable de dire que ces fonctions se comportent localement comme des paraboles tournées vers le bas, ce qui fournit plus d'information sur ces fonctions. On peut par exemple dire qu'on a dans les deux cas un maximum local en 0.

4) Les fonctions $f-1$ et $g-1$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et régulières. En revanche, la fonction $g-1$ s'annule en 0, donc φ est définie sur $\mathbb{R}^*$. On a $g(x)-1 \to 0$ et $f(x)-1 \to 0$ quand $x \to 0$, donc a priori la valeur de la limite est *indéterminée* en 0. L'étude locale de f et g au voisinage de 0 permet de lever cette indétermination. En effet, on sait (voir cours) qu'il existe deux fonctions ε_f et ε_g nulles en 0 et continues au voisinage de 0 telles que, pour h assez petit,

$$f(h) = 1 - \alpha h^2 + h^2 \varepsilon_f(h), \quad g(h) = 1 - \frac{h^2}{2} + h^2 \varepsilon_g(h),$$

ce qu'on obtient d'après la formule (2). Pour étudier le comportement de φ au voisinage de 0, on écrit donc, pour h assez petit,

$$\varphi(h) = \frac{f(h)-1}{g(h)-1} = \frac{1-\alpha h^2 + h^2\varepsilon_f(h) - 1}{1 - \frac{h^2}{2} + h^2 \varepsilon_g(h) - 1} = \frac{-\alpha + \varepsilon_f(h)}{-\frac{1}{2} + \varepsilon_g(h)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 2\alpha.$$

Par conséquent, la limite de φ en 0 vaut 2α. On voit que l'étude du comportement locale des fonctions f et g au voisinage de 0 permet de lever l'indétermination de la limite. Cette approximation plus précise permet en fait de ramener l'étude du quotient $(f-1)/(g-1)$ au voisinage de 0 à l'étude d'un polynôme au voisinage de 0. On peut alors savoir si on à une limite finie non nulle (et la calculer le cas échéant), une limite nulle, ou si la fonction diverge, comme détaillé dans la fiche sur les fractions rationnelles.

Partie 2: Polynômes de Hermite.

1) Le calcul de g' et g'' a été effectué en première partie. Si g est la fonction gaussienne, on peut constater que $g(x) = H_0(x)g(x)$ avec $H_0(x) = 1$, puis $g'(x) = H_1(x)g(x)$ avec $H_1(x) = -x$, et enfin $g''(x) = H_2(x)g(x)$ avec $H_2(x) = x^2 - 1$. On constate que H_0, H_1 et H_2 sont bien des polynômes, de degrés respectifs 0, 1 et 2.

Preuve de la récurrence. On a montré en question précédente que la propriété est vraie pour $n = 0$ (initialisation, on a aussi vu qu'elle était vraie pour $n = 1, 2$). On suppose que la propriété est vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}$, *i.e.* qu'il existe un polynôme H_n tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = H_n(x)g(x).$$

On cherche à montrer que la propriété est alors vraie au rang $n+1$. Pour cela on calcule pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
g^{(n+1)}(x) &= \left(g^{(n)}(x)\right)' \\
&= (H_n(x)g(x))' && \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= H_n'(x)g(x) + H_n(x)g'(x) \\
&= H_n'(x)g(x) - xH_n(x)g(x) && \text{car } g'(x) = -xg(x) \\
&= (H_n'(x) - xH_n(x))\, g(x).
\end{aligned}$$

Donc la dérivée $(n+1)$ième s'écrit bien comme le produit d'un polynôme et d'une fonction gaussienne. On a montré en particulier que

$$g^{(n+1)}(x) = H_{n+1}(x)g(x), \quad H_{n+1}(x) = H_n'(x) - xH_n(x). \tag{3}$$

Cette dernière relation est appelée *relation de récurrence* entre les différents polynômes. On peut l'utiliser pour calculer les dérivées de g ! Par exemple, on avait $H_0(x) = 1$. La relation précédente donne $H_1(x) = H_0'(x) - xH_0(x) = 0 - x \times 1 = -x$. De même $H_2(x) = H_1'(x) - xH_1(x) = -1 + x^2$, on retrouve les résultats de la première partie. C'est un moyen de s'assurer que l'on n'a pas commis d'erreur en calculant la relation de récurrence.

3) La dernière question consiste à tirer ce que l'on peut de cette relation de récurrence, qui fournit des informations sur les polynômes, donc sur les dérivées de la fonctions g, donc sur la fonction g elle-même. Précisons cela.

On peut d'abord voir par récurrence que l'ordre de H_n est n. En effet, H_0 est de degré 0, H_1 de degré 1 (il est bon de regarder les cas $n = 0, 1, 2$ pour avoir une idée du résultat). Donc si on suppose que H_n est de degré n, on voit à partir de la relation (3) que H_{n+1} est, par la multiplication par x, de degré $n+1$, ce qui prouve le résultat.

La parité suit de même. H_0 est pair, H_1 impair, H_2 pair, etc. Si on regarde la relation (3), on voit que si H_n est pair, H_{n+1} est impair, car la dérivée d'un polynôme pair est impaire, de même par la multiplication par $-x$. Si H_n est impair, on voit que H_{n+1} est pair. Donc, pour $k \in \mathbb{N}$, H_{2k} est pair et H_{2k+1} est impair.

Le calcul de $g^{(n)}(0)$ était plus compliqué, et il fallait pour cela montrer la relation de récurrence à deux termes

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x).$$

Par récurrence à deux termes on entend que H_{n+1} est exprimé comme fonction de H_n et H_{n-1}. Cette relation permet de calculer $g^{(n)}(0)$.

Sans finir le calcul, le point important était le suivant: comme H_{2k+1} est impair, on sait que $H_{2k+1}(0) = 0$ (car une fonction impaire vaut zéro en zéro). En revanche $H_{2k} \neq 0$ en général. Par conséquent, on sait que le développement de Taylor a un terme sur deux de nul: il est toujours pair ! C'est une propriété générale: le développement de Taylor en zéro d'une fonction paire est pair, de même celui d'une fonction impaire donne un polynôme impair.

Remarque. Au-delà de l'aspect calculatoire/entrainement, les polynômes de Hermite sont très intéressants et possèdent des propriétés particulières, comme tout ce qui touche aux fonctions gaussiennes, que vous verrez réapparaitre en économie/probabilités/statistiques/finance. Il est donc toujours bon d'avoir un peu de culture sur le sujet, par exemple en lisant l'article wikipédia (et surtout en n'oubliant pas ce que vous faites en cours dès la copie rendue !).

EXERCICE 2

Cet exercice est sympathique et permet de pratiquer un peu son calcul.

1) La fonction f définie par

$$f : x \to \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}},$$

est définie sur $\mathbb{R}^*$ car $1/x^2$ n'est pas définie en 0. En revanche, on peut voir aisément que $f(x) \to 0$ quand $x \to 0$. En effet, dans ce cas $-1/x^2 \to -\infty$ et $\mathrm{e}^y \to 0$ quand $y \to -\infty$.

Le but de la suite est de préciser le comportement de f au voisinage de 0.

2) On peut calculer pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}.$$

On peut conclure par croissance comparée que $f'(x) \to 0$ quand $x \to 0$. Si on veut détailler un peu plus, on peut par exemple considérer la fonction $g(x) = f'(1/x)$, et étudier la limite de f en 0 revient à étudier la limite de g en $+\infty$. On a

$$g(x) = 2x^3\mathrm{e}^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par croissance comparées habituelles.

3) Comme pour l'exercice précédent, on fait un preuve par récurrence. On a montré la propriété au rang 0 avec $R_0(u) = 1$ et au rang 1 avec $R_1(u) = 2u^3$. On suppose donc la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$, *i.e.* $f^{(n)} = R_n(u(x))\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$, et on calcule au rang $n+1$, pour $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(u(x))\right)' \\ &= \left(R_n(u(x))\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\right)' \\ &= \left(u'(x)R_n'(u(x)) + \frac{2}{x^3}R_n(u(x))\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= R_{n+1}(u(x))\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, \end{aligned}$$

avec, comme $u'(x) = -1/x^2$,

$$R_{n+1}(u(x)) = -\frac{1}{x^2}R_n'(u(x)) + \frac{2}{x^3}R_n(u(x)).$$

4) On voit alors par croissance comparée (voir fiche sur les polynômes, l'exponentielle et le logarithme) que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x\to 0} f_n(x) = 0.$$

Par conséquent, si f admettait un polynôme de Taylor à tout ordre en zéro, on aurait l'existence d'une fonction ε nulle en zéro et continue au voisinage de 0 telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = P_n(f, 0)(x) + x^n\varepsilon(x).$$

Or, d'après ce qui précède et le fait que

$$P_n(f, 0)(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots + x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, $P_n(f,0)(x) = 0$. C'est absurde car cela signifierait que la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}$! Or cette fonction est différente de la fonction nulle, donc elle ne peut admettre d'expansion de Taylor à tout ordre en 0.

Remarque. Les fonctions «régulières» peuvent s'écrire comme une série infinie de la forme

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k.$$

Pour une fonction s'exprimant sous cette forme, on dit que f est *analytique* au point x_0. La fonction f étudiée dans l'exercice 2 n'est pas analytique en 0 car elle ne peut s'écrire sous cette forme avec $x_0 = 0$. Il est pourtant intéressant de voir que l'on a montré que cette fonction est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, car toutes les dérivées admettent une limite en 0 ! C'est un point subtile d'analyse (qui ne sera pas demandé en devoir sur table !!!) qui permet de pratiquer ses calculs sur une fonction aux propriétés originales. Encore une fois, l'article wikipédia sur les fonctions analytiques est très instructeurs.