Corrigé de l'exercice 1.41

A faire seul avant de regarder la correction. Merci de me signaler par mail ce qui vous semblerait une erreur. Bon courage !

(i) L'ensemble $\mathcal{A}$ est constitué de trois points. On peut les représenter sur le plan $\mathbb{R}^2$. C'est un ensemble fermé (on ne peut pas prendre une boule autour d'un point qui n'intersecte que le point !) et borné (on peut inclure les points dans une boule).

(ii) On remarque tout d'abord en factorisant que $x^2+y^2-2x+4y+5=(x-1)^2-1+(y+2)^2-4+5=(x-1)^2+(y+2)^2$. On voit ensuite que $\mathcal{B}$ s'écrit comme l'intersection de deux ensembles, car ses points vérifient deux contraintes simultanément. Cela se traduit par:

$$\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2,$$

avec

$$\mathcal{B}_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|(x-1)^2+(y+2)^2\geq 2^2\},\quad \mathcal{B}_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|(x-1)^2+(y+2)^2\leq 5^2\}.$$

On reconnait les équations de deux cercles. On note $A=(1,-2)$, on voit alors que $\mathcal{B}_1$ s'écrit comme les points à distance plus grande que 2 du point A. L'ensemble $\mathcal{B}_2$ correspond quant à lui aux points à distance plus petite que 5 du point A.

Comme on est à l'intersection de ces deux ensembles, l'ensemble $\mathcal{B}$ est le disque (fermé) de centre A est de rayon 5 privé du disque (ouvert, car le complémentaire d'un fermé est un ouvert) de centre A et de rayon 2. On a ce qu'on appelle un *tore*. Vous pouvez montrer que cet ensemble n'est pas convexe (il a un trou !). C'est un ensemble fermé car il contient son bord (inégalités larges).

(iii) Cette fois-ci, le «ou» traduit l'union de deux ensembles:

$$\mathcal{C}=\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2,$$

avec

$$\mathcal{C}_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2-2x-3<0\},\quad \mathcal{C}_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2-2y-3<0\}.$$

Quand on voit $x^2+y^2+\dots$ on se dit que ces ensembles ressemblent à des disques. En effet, on calcule $x^2+y^2-2x-3=(x-1)^2+y^2-4$ et $x^2+y^2-2y-3=x^2+(y-1)^2-4$. En insérant ces calculs dans les expressions de $\mathcal{C}_1$ $\mathcal{C}_2$, on voit que $\mathcal{C}$ est l'union de deux disques ouverts (inégalités strictes) de rayon 2, et de centres respectifs $(1,0)$ et $(0,1)$. L'ensemble $\mathcal{C}$ est lui-même ouvert comme union de deux ouverts.

(iv) L'ensemble $\mathcal{D}=\mathbb{R}^2-\{0,0\}$ est le plan entier privé de son origine. Le singleton $\{0,0\}$ est fermé. Comme $\mathcal{D}$ est le complémentaire de $\{0,0\}$ dans $\mathbb{R}^2$, c'est un ouvert. Intuitivement, le seul «bord» de $\mathcal{D}$ est le point $\{0,0\}$, et ce point n'est pas dans $\mathcal{D}$, donc l'ensemble est ouvert.

(v) L'ensemble $\mathcal{E}$ est le produit cartésien de deux intervalles bornés, il est donc borné. Plus pragmatiquement, si un point appartient à $\mathcal{E}$, ses coordonnées sont bornées (par définition de $\mathcal{E}$, donc $\mathcal{E}$ est borné. Le dessin de $\mathcal{E}$ est un rectangle. On peut observer à partir de la définition que certains côtés appartiennent (inégalités larges) ou non (inégalités strictes) à l'ensemble, qui n'est donc ni fermé ni borné.