Quelques connaissances de base

Pour la vie quotidienne du mathématicien

AUTOUR DES POLYNÔMES

On formalise ici la traitement des limites des fractions rationnelles en zéro et l'infini. L'idée est toujours que, pour un polynôme, les termes dominants à l'infini sont les termes de plus haut degré, alors que les termes dominants au voisinage de zéro sont ceux de plus bas degré. Pour prendre un exemple, on peut calculer en l'infini:

$$\frac{7x^8+4x^3+x}{3x^8-7x^5+2x^4+5x} = \frac{7+4x^{-5}+x^{-7}}{3-7x^{-3}+2x^{-4}+5x^{-7}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{7}{3},$$

et en zéro:

$$\frac{7x^8+4x^3+x}{3x^8-7x^5+2x^4+5x} = \frac{7x^7+4x^2+1}{3x^7-7x^4+2x^3+5} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{5}.$$

On fait donc naturellement apparaître la limite en **factorisant par le terme dominant** (ici x^8 en l'infini et x au voisinage de zéro). Néanmoins, si les polynômes au numérateur et au dénominateur ont des degrés différents, ces limites peuvent diverger. Ce qui suit détaille les comportements possibles.

Si un polynôme P s'écrit $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ pour des réels $a_1, \ldots, a_n$ et tel que $a_n \neq 0$, on dit que P est d'ordre n (on suppose par la suite que les polynômes considérés sont au moins d'ordre 1, *i.e.* ne sont pas des constantes). A l'infini, ce polynôme se comporte comme $a_n x^n$. Au contraire, pour x au voisinage de 0, P se comporte comme le plus petit coefficient non-nul, ce qui peut se traduire de plusieurs façons. Donnons l'exemple des fractions rationnelles pour clarifier les cas possibles. Soit Q un autre polynôme s'écrivant $Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_p x^p$ pour des réels $b_0, \ldots, b_n$. Une fraction rationelle est le quotient de deux tels polynômes,

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_p x^p},$$

défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $Q(x) \neq 0$.

Comportement à l'infini

Deux cas peuvent se produire pour le comportement à l'infini.

Cas 1 $(p = n)$

Dans ce cas, les deux polynômes sont de même degré et on peut écrire

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + a_n}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a_n}{b_n}.$$

Donc quand les polynômes sont de même degré, la fraction rationnelle R tend vers le rapport des termes dominants.

Cas 2 $(p \neq n)$

Dans ce cas, ou voit facilement (avec le même type de normalisation) que si $n > p$, alors $R(x) \to \pm\infty$. La divergence se fait vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe du rapport a_n/b_p.

D'un autre côté, si $n < p$, on montre de la même façon que $R(x) \to 0$ par valeurs positives ou négatives selon le signe du rapport a_n/b_p.

Retenir que, à l'infini, le comportement d'un polynôme est dicté par son terme de plus haut degré

Comportement au voisinage de 0

Quand on regarde le comporte d'un polynôme pour x au voisinage de 0, la règle est inversée: c'est le terme d'ordre le plus faible qui domine. Notons maintenant k et m les plus petits indices tels que $a_k \neq 0$ et $b_m \neq 0$. On a de la même façon deux cas.

Cas 1 $(k = m)$

Dans ce cas, les polynômes ont le même comportement au voisinage de 0. En effet:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_k + a_{k+1}x + \ldots + a_n x^{n-k}}{b_k + b_{k+1}x + \ldots + b_p x^{p-k}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{a_k}{b_k}.$$

Cas 2 $(k \neq m)$

Comme pour le comportement à l'infini, on peut factoriser R et déduire la limite quand $x \to 0$. On montre ainsi que pour $k > m$, $R(x) \to 0$ quand $x \to 0$, alors que pour $k < m$, $R(x) \to \pm\infty$ quand $x \to 0$ avec le signe donné par le rapport a_k/b_m (le faire en exercice).

Retenir que, au voisinage de zéro, le comportement d'un polynôme est dicté par son terme de plus bas degré

POLYNÔMES, EXPONENTIELLE ET LOGARITHME

Il est essentiel de comprendre le comportement d'un polynôme P (non constant) par rapport à l'exponentielle et au logarithme. On a notament les formules suivantes (en reprenant les notations précédentes):

$$\begin{aligned}
P(x) \times \mathrm{e}^{-x} &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\\
\frac{\mathrm{e}^x}{P(x)} &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty \ \text{ (selon signe de } a_n),\\
P(x) \times \log(x) &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0, \ \text{ si } a_0 = 0,\\
P(x) \times \log(x) &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} \pm\infty, \ \text{ si } a_0 \neq 0,\\
\frac{\log(x)}{P(x)} &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Ce qu'il faut retenir est que **l'exponentielle bat le polynôme** et que **le polynôme bat le logarithme**. On rappelle aussi que pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b$, pour tous $a, b > 0$, $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ et $\forall\, \alpha \in]0, +\infty[$ $\forall\, a > 0$, $\log(a^\alpha) = \alpha \log(a)$.

DÉRIVATION

A savoir impérativement pour être à l'aise en exercice. Soient u et v deux fonctions telles qu'on puisse calculer les quantités d'intérêt. Alors:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2}, & \left(\frac{1}{v}\right)' &= \frac{-v'}{v^2},\\
(\log(u))' &= \frac{u'}{u}, & (\mathrm{e}^u)' &= u'\mathrm{e}^u,\\
(v(u))' &= u' \times v'(u) & (uv)' &= u'v + uv',
\end{aligned}$$

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)x^{\alpha-n}, \ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On rappelle à toute fin utile que pour u une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$ et $x \in [a, b]$,

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(y)dy.$$

En particulier, u **est une primitive de** u'. Il est aussi bon de connaître quelques développements limités usuels (à l'ordre un ou deux). On pourra en trouver une liste sur wikipédia (article développement limité, section formulaire).