Devoir Maison 1

NB : les questions ont une difficulté croissante.

EXERCICE 1

Partie 1: Approximation affine et quadratique. Soient f et g deux fonctions définies par

$$f : x \to \frac{1}{(1+x^2)^\alpha}, \quad g : x \to \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

pour un réel $\alpha \geq 0$.

1) Préciser le domaine de définition et la régularité des fonctions f et g. Calculer leurs dérivées f' et g' sur leur domaine de définition.

2) Calculer l'approximation affine de f en 0 notée $\hat{f}_0$. Tracer sur un même graphique la fonction f et son approximation affine $\hat{f}_0$ pour $\alpha = 1$. Même question pour g. Commenter.

3) Calculer le polynôme de Taylor de f en 0 à l'ordre 2. Même question pour g. Commenter par rapport à l'approximation affine.

4) On définit la fonction φ par

$$\varphi : x \to \frac{f(x)-1}{g(x)-1}.$$

Donner le domaine de définition de φ. Calculer $\lim_{x\to 0} \varphi(x)$. En déduire que φ admet une limite en 0 et commenter l'approximation de f et g par des polynômes de degré 2 par rapport à une approximation affine.

Partie 2: Polynôme de Hermite. On se concentre maintenant sur la fonction $g : x \to \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. On dit que g est la fonction gaussienne.

1) Calculer g''. Observer que g' et g'' s'écrivent comme le produit d'un polynôme et de la fonction gaussienne.

2) On souhaite préciser cette idée. On note $g^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de g. Montrer par récurrence qu'il existe une famille de polynôme H_n tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = H_n(x)g(x).$$

On donnera la relation de recurrence entre H_n et H_{n-1}.

3) Donner l'ordre de H_n et sa parité. Calculer $g^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer le polynôme de Taylor de g à l'ordre n au point 0. Commenter.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par

$$f : x \to \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}.$$

1) Donner le domaine de définition de f, calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$ et tracer f.

2) Calculer f' et $\lim_{x\to 0} f'(x)$.

3) Pour tout x dans le domaine de f, on note $f^{(n)}(x)$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f en x. On appelle u la fonction définie par

$$u : x \to \frac{1}{x}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $R_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que

$$f^{(n)}(x) = R_n(u(x))\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}},$$

où les polynômes R_n vérifient une relation de récurrence à déterminer.

4) Déduire de la question précédente que:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x\to 0} f_n(x) = 0.$$

En déduire que f ne peut admettre d'expansion de Taylor à tout ordre en 0.