Contrôle continu 1

Groupe 16 – DEGEAD1 – Université Paris-Dauphine

24 Février 2017

*Les documents et calculatrices sont interdits. La qualité de rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les quatres exercices sont indépendants. Les * distinguent les questions de difficulté supérieure.*

Exercice 1

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : t \mapsto t^a(1-t)^{1-a}, \quad D_f = [0,1], \tag{1}$$

où $a \in (0,1)$ est un paramètre **fixé**. Il s'agit d'une fonction pouvant décrire le gain d'un Etat en fonction du taux de taxation t qu'il impose. On cherche à étudier la meilleure stratégie de taxation de l'Etat en fonction du taux t.

1) Calculer la valeur de f au bord de son domaine de définition. Quelle interprétation donnez-vous à ces valeurs ?

2) Calculer la dérivée de f. Donner le domaine de définition de cette dérivée, noté $D_{f'}$. En déduire que $D_{f'} \subset D_f$ mais $D_{f'} \neq D_f$.

3) Calculer le ou les points critiques de f. Donnez les extrema de f sur son domaine D_f (on fera un tableau de variation de la fonction et on la tracera). En déduire que l'Etat possède un taux de taxation optimal t^* que l'on exprimera en fonction du paramètre a.

4) Calculer l'élasticité de f, notée $e_f(t)$, et déterminer son domaine de définition D_{e_f} ainsi que sa limite en 0 et en 1.

5) Le paramètre $a \in (0,1)$ représente la préférence des gens pour le travail ou le loisir. Plus a est proche de 0, plus les individus préfèrent le loisir. Si on suppose que $a = 0.3$, exprimer $e_f(t)$. On suppose ensuite que le taux de taxation actuel de l'Etat est $t = 0.5$. Calculer l'élasticité en $t = 0.5$ toujours pour $a = 0.3$. En faisant un calcul approché, quel taux t l'impôt doit-il atteindre pour que l'Etat puisse espérer une augmentation des recettes Δf de 5% à partir de $t = 0.5$? Commenter le signe de cette variation d'impôt.

Exercice 2

On s'intéresse à la fonction g définie par: $\forall\, x > 0,\ g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

1) On introduit la fonction $f(x) = \log(1+x)$. Exprimer g en fonction de f.

2) Montrer que g est une forme indéterminée en 0.

3) Calculer le polynôme de Taylor d'ordre 1 en 0 de f. En remplaçant f par son approximation de Taylor dans l'expression de g, calculer la limite de g quand $x \to 0$.

4)* On introduit la fonction ψ définie par:

$$\psi(x) = -\log(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

Calculer la dérivée de g. L'exprimer en fonction de f et de ψ. En calculant la dérivée de ψ pour $x > 0$, déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que f' est une forme indéterminée en 0.

5)** Calculer un développement limité de ψ à l'ordre 2 et en déduire la limite de f' en 0.

Exercice 3

On définit le polynôme P par $P(x) = x^2 + x + 1$ et l'ensemble $\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq P(x)\}$.

1) Montrer que $P(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ et que $\mathcal{E}$ est un ensemble convexe.

2) On considère les points du plan $A = (0,1)$ et $B = (2,0)$. Calculer l'équation cartésienne de la droite passant par A et B.

3) Représenter sur un même graphique le polynôme P, les points A et B et la droite passant par A et B.

4) On définit l'ensemble $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2y + x - 2 < 0\}$ et $\mathcal{C} = H \cap \mathcal{E}$. Représenter $\mathcal{C}$ sur le même graphe qu'à la question précédente. Cet ensemble est-il convexe ? Borné ? Fermé/ouvert ?

5) Déterminer les points d'intersection entre la droite passant par A et B et le polynôme P.

Exercice 4

On définit l'ensemble $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - 1 + y^2 + 2x = 0\}$.

1) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est un cercle et le tracer.

2) Montrer que $\mathcal{C}$ peut s'exprimer à l'aide de la fonction $f(x) = \sqrt{2 - (x+1)^2}$ sur un domaine que l'on précisera.

3) Calculer l'approximation affine de f en 0. En déduire que le cercle $\mathcal{C}$ admet une tangente en 0, donner son équation et la tracer.

4)* On définit $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. Calculer l'approximation affine de g en 0. En déduire que la courbe représentative de g et le cercle $\mathcal{C}$ possède une tangente commune en 0.

5)* On appelle $\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y < g(x)\}$ et $\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - 1 + y^2 + 2x \leq 0\}$. Les ensembles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ sont ils ouverts, fermés, bornés, convexes ? L'ensemble $\mathcal{E} \cap \mathcal{B}^c$ est-il fermé, ouvert, borné, convexe ? On pourra s'aider d'une représentation graphique.