

## Table des matières

Chapitre 1. Introduction aux développements asymptotiques singuliers	1
1. Deux problèmes dépendant d'un petit paramètre	1
2. Développement à double-échelle	6
3. Développements asymptotiques raccordés	9
4. Commentaires bibliographiques	13
Chapitre 2. Diffraction par une surface fortement oscillante	15
1. Motivation et problème modèle	15
2. Existence-unicité du problème de diffraction	21
3. Développement asymptotique	29
4. Convergence du développement asymptotique	40
5. Homogénéisation	45
6. Commentaires bibliographiques	47
Chapitre 3. Propagation d'une onde dans un domaine comportant une fente	49
1. Le problème aux limites	49
2. Développements asymptotiques raccordés	53
3. Estimations d'erreur	72
4. Commentaires bibliographiques	84
Bibliographie	87



## Introduction aux développements asymptotiques singuliers

Nous commençons par présenter deux problèmes aux limites à deux points, dépendant d'un petit paramètre, dont la solution peut être obtenue explicitement. Cela nous permettra, dans un premier temps, de distinguer les développements asymptotiques usuels de ceux qui sont singuliers et, ensuite, d'introduire les méthodes d'analyse asymptotique que nous utiliserons dans les chapitres suivants.

### 1. Deux problèmes dépendant d'un petit paramètre

**1.1. Les problèmes à deux points.** Dans tout ce cours,  $\delta$  désigne un nombre réel, strictement positif, destiné à tendre vers 0, qui joue le rôle du "petit paramètre". Nous nous écartons ainsi, pour des raisons de commodité, de la notation  $\varepsilon > 0$  traditionnellement utilisée dans ce contexte.

Les deux problèmes considérés dans ce chapitre s'énoncent respectivement

$$(1.1) \quad \begin{cases} \delta u''_{\delta}(x) + u'_{\delta}(x) = -\sin x & (0 < x < \pi) \\ u_{\delta}(0) = u_{\delta}(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$(1.2) \quad \begin{cases} v''_{\delta}(x) + \delta v'_{\delta}(x) = -\sin x & (0 < x < \pi) \\ v_{\delta}(0) = v_{\delta}(\pi) = 0 \end{cases}$$

On devine aisément que la nature des deux problèmes précédents est très différente. L'équation du premier change de type, passant d'une équation d'ordre 2 dont la solution dépend de deux constantes, à une équation d'ordre 1, dont la solution ne dépend plus que d'une seule constante. Il n'y a pas de changement de type pour l'équation différentielle du second problème dont la solution pour  $\delta = 0$  continue à dépendre de 2 constantes.

**1.2. Mise en évidence d'une couche limite.** On peut intégrer exactement les deux problèmes précédents. On obtient par un calcul élémentaire

$$(1.3) \quad u_\delta(x) = \frac{1}{1 + \delta^2} \left( 1 + \cos x + \delta \sin x - \frac{2(e^{-x/\delta} - e^{-\pi/\delta})}{1 - e^{-\pi/\delta}} \right)$$

$$(1.4) \quad v_\delta(x) = \frac{1}{1 + \delta^2} \left( \sin x + \delta \left( \cos x + 1 - \frac{2(e^{-\delta x} - e^{-\delta\pi})}{1 - e^{-\delta\pi}} \right) \right)$$

On a de façon immédiate

$$(1.5) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} u_\delta(x) = u_0(x) = 1 + \cos x \quad (0 < x < \pi)$$

$$(1.6) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} v_\delta(x) = v_0(x) = \sin x$$

La limite (1.6) s'obtient simplement en passant formellement à la limite sur l'équation du problème (1.2) lorsque  $\delta \rightarrow 0$  et en résolvant le problème obtenu. Cette situation est typique d'un développement asymptotique régulier. Si on essaye de suivre la même procédure pour le problème (1.1), on se retrouve avec l'équation

$$(1.7) \quad u'_0(x) = -\sin x \quad (0 < x < \pi)$$

dont la solution

$$(1.8) \quad u_0(x) = \cos x + c$$

ne dépend que d'une constante comme cela est indiqué plus haut. On voit que seule la condition aux limites en  $x = \pi$  est conservée tandis que celle en  $x = 0$  est perdue. Si on observe le graphe de la solution, pour  $\delta = 0.05$  par exemple (FIG. 1.1), on voit que  $u_\delta(x)$  converge vers  $u_0(x)$  sauf sur un petit voisinage de  $x = 0$  où cette expression est "obligée" de revenir à 0 pour satisfaire la condition aux limites. Cette zone, où  $u_\delta$  a une variation rapide pour satisfaire la condition aux limites, est appelée **couche limite**. Ce type de comportement est caractéristique d'un développement asymptotique singulier.

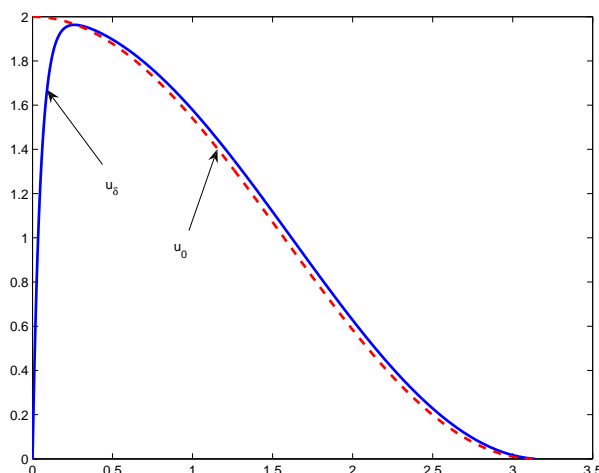


FIG. 1.1. Graphe de  $u_\delta$ , en trait plein, pour  $\delta = 0.1$ , et de  $u_0(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} u_\delta(x)$  pour  $x > 0$ , en trait discontinu.

**1.3. Développement asymptotique régulier.** A partir de l'expression (1.4) de  $v_\delta(x)$ , on obtient un développement asymptotique usuel en  $\delta$  globalement valable sur l'intervalle  $[0, \pi]$  extrémités comprises. On l'écrit ici jusqu'à l'ordre 2 pour simplifier

$$(1.9) \quad v_\delta(x) = \sin x + \delta \left( \cos x - \frac{2}{\pi} (\pi - x) + 1 \right) + \delta^2 \left( x - \pi - \sin x + \frac{1}{\pi} (\pi^2 - x^2) \right) + O(\delta^3)$$

La figure FIG. 1.2 illustre la précision qui peut être atteinte par le développement asymptotique même pour des valeurs de  $\delta$  relativement élevées.

On aurait pu obtenir ce développement sans connaître l'expression explicite de  $v_\delta(x)$  en procédant de la façon suivante. On cherche  $v_\delta(x)$  sous la forme

$$(1.10) \quad v_\delta(x) = v_0(x) + \delta v_1(x) + \delta^2 v_2(x) + O(\delta^3)$$

On injecte alors le développement (1.10) dans l'équation et les conditions aux limites du problème (1.2) en négligeant tous les termes en  $\delta^3$

$$(1.11) \quad \begin{cases} v_0''(x) + \delta(v_0' + v_1'')(x) + \delta^2(v_1' + v_2'')(x) = -\sin x & (0 < x < \pi) \\ (v_0 + \delta v_1 + \delta^2 v_2)(0) = (v_0 + \delta v_1 + \delta^2 v_2)(\pi) = 0 \end{cases}$$

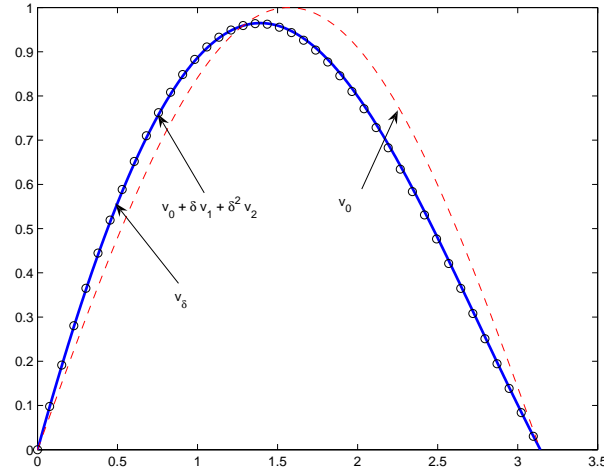


FIG. 1.2. Développement à l'ordre 0 et à l'ordre 2 de  $v_\delta$  pour  $\delta = 0.5$

On identifie alors les coefficients des mêmes puissances de  $\delta$  dans les deux membres de l'équation et des conditions aux limites. Il vient d'abord

$$(1.12) \quad \begin{cases} v_0''(x) = -\sin x & (0 < x < \pi) \\ v_0(0) = v_0(\pi) = 0 \end{cases}$$

qui donne

$$(1.13) \quad v_0(x) = \sin x$$

On a ensuite

$$(1.14) \quad \begin{cases} v_1''(x) = -v_0'(x) = -\cos x & (0 < x < \pi) \\ v_1(0) = v_1(\pi) = 0 \end{cases}$$

dont on obtient facilement la solution par

$$(1.15) \quad v_1(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}(\pi - x) + 1$$

On a enfin

$$(1.16) \quad \begin{cases} v_2''(x) = -v_1'(x) = -\sin x - \frac{2}{\pi}x & (0 < x < \pi) \\ v_2(0) = v_2(\pi) = 0 \end{cases}$$

qui a pour solution

$$(1.17) \quad v_2(x) = x - \pi - \sin x + \frac{1}{\pi}(\pi^2 - x^2)$$

On retrouve ainsi exactement le développement (1.9).

**1.4. Développement asymptotique singulier.** L'expression (1.3) de  $u_\delta(x)$  peut se mettre sous la forme

$$(1.18) \quad u_\delta(x) = u_\delta^e(x) + \Pi_\delta(x/\delta) + \omega_\delta$$

avec

$$(1.19) \quad u_\delta^e(x) = \frac{1}{1 + \delta^2} (1 + \cos x + \delta \sin x)$$

$$(1.20) \quad \Pi_\delta(X) = -\frac{2}{1 + \delta^2} \frac{e^{-X}}{1 - e^{-\pi/\delta}}$$

$$(1.21) \quad \omega_\delta = \frac{2}{1 + \delta^2} \frac{e^{-\pi/\delta}}{1 - e^{-\pi/\delta}}$$

Le terme  $\omega_\delta$  tend vers 0 avec  $\delta$  plus vite que n'importe quelle puissance de  $\delta$ . Il ne participe pas donc au développement asymptotique. On notera un tel comportement par

$$(1.22) \quad \omega_\delta = o(\delta^\infty)$$

L'exposant de  $u_\delta^e$  est utilisé pour distinguer les développements dits externes de  $u_\delta$  qui sont "à l'extérieur" de la couche limite.

L'expression (1.18) montre que  $u_\delta$  est "d'une façon naturelle" fonction de  $x$  et de  $X = x/\delta$ . Pour distinguer ces deux variables, on les désigne respectivement par **variable lente** et **variable rapide**.

Pour  $x > 0$ , la fonction de la variable rapide  $\Pi_\delta(x/\delta) = o(\delta^\infty)$  décroît plus vite que toute puissance de  $\delta$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . Le développement asymptotique de  $u_\delta(x)$  est celui de  $u_\delta^e(x)$  qui s'obtient sans difficulté

$$(1.23) \quad u_\delta^e(x) = (1 + \cos x) + \delta \sin x - \delta^2(1 + \cos x) + O(\delta^3)$$

On peut aussi développer  $\Pi_\delta(X)$  et écrire

$$(1.24) \quad \Pi_\delta(X) = -2e^{-X} + \delta^2(2e^{-X}) + O(\delta^3)$$

Ceci permettra, par exemple, de définir

$$(1.25) \quad \begin{cases} u_0(x, \delta) = 1 + \cos x - 2e^{-x/\delta} \\ u_1(x, \delta) = \sin x \\ u_2(x, \delta) = 1 + \cos x - 2e^{-x/\delta} \end{cases}$$

qui permettront d'obtenir des expressions

$$u_0(x, \delta), u_0(x, \delta) + \delta u_1(x, \delta) \text{ et } u_0(x, \delta) + \delta u_1(x, \delta) + \delta^2 u_2(x, \delta)$$

qui approchent uniformément  $u_\delta(x)$  sur  $[0, \pi]$ , extrémités comprises, avec des erreurs respectivement en  $O(\delta)$ ,  $O(\delta^2)$  et  $O(\delta^3)$ . La figure FIG. 1.3, qui reporte les graphes de  $u_\delta(x)$ ,  $u_0^e(x)$  et  $u_0(x, \delta)$  pour  $\delta = 0.1$ , donne une idée de l'amélioration qui résulte de la prise en compte de la couche limite sur l'approximation de la solution.

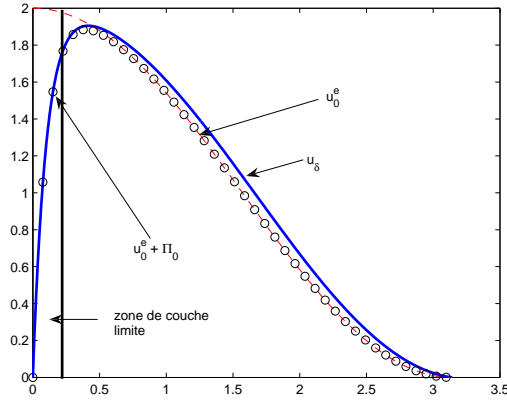


FIG. 1.3. Graphe de  $u_\delta(x)$ , de  $u_0^e$  et de  $u_0(x, \delta)$  pour  $\delta = 0.1$

Nous allons dans la suite décrire deux classes de techniques qui permettent d'obtenir les termes  $u_m(x, \delta)$  sans connaître explicitement la solution. Ces deux techniques sont le développement à double-échelle et les développements asymptotiques raccordés.

## 2. Développement à double-échelle

**2.1. Principe.** On cherche un développement asymptotique de  $u_\delta(x)$  sous la forme

$$(1.26) \quad \begin{cases} u_\delta(x) = u_\delta^e(x) + \Pi_\delta(X)|_{X=x/\delta} \\ u_\delta^e(x) = u_0^e(x) + \delta u_1^e + \delta^2 u_2^e + \dots \\ \Pi_\delta(X) = \Pi_0(X) + \delta \Pi_1(X) + \delta^2 \Pi_2(X) + \dots \end{cases}$$

avec la condition suivante sur chaque  $\Pi_m = \Pi_m^{(0)}$  et ses dérivées  $\Pi_m^{(j)}$

$$(1.27) \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} \Pi_m^{(j)}(X) = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots \text{ et } m = 0, 1, 2, \dots)$$



**2.2. Equations du développement asymptotique.** On injecte d'abord la décomposition de  $u_\delta(x)$ , donnée en (1.26), dans (1.1). On obtient

$$(1.28) \quad \delta (u_\delta^e)''(x) + (u_\delta^e)'(x) + \frac{1}{\delta} \Pi_\delta''(X)|_{X=x/\delta} + \frac{1}{\delta} \Pi_\delta'(X)|_{X=x/\delta} = -\sin(x) \quad (0 < x < \pi)$$

$$(1.29) \quad u_\delta^e(0) + \Pi_\delta(0) = 0$$

$$(1.30) \quad u_\delta^e(\pi) + \Pi_\delta(\pi/\delta) = 0$$

En utilisant les développements introduits en (1.26) et en identifiant les coefficients des mêmes puissances de  $\delta$  qui apparaissent dans chaque membre, on arrive à

$$(1.31) \quad \Pi_0''(X)|_{X=x/\delta} + \Pi_0'(X)|_{X=x/\delta} = 0$$

$$(1.32) \quad (u_0^e)'(x) + \Pi_1''(X)|_{X=x/\delta} + \Pi_1'(X)|_{X=x/\delta} = -\sin(x) \quad (0 < x < \pi)$$

$$(1.33) \quad \begin{aligned} (u_{m-1}^e)''(x) + (u_m^e)'(x) + \Pi_{m+1}''(X)|_{X=x/\delta} \\ + \Pi_{m+1}'(X)|_{X=x/\delta} = 0 \quad (0 < x < \pi) \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

$$(1.34) \quad u_m^e(0) + \Pi_m(0) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(1.35) \quad u_m^e(\pi) + \Pi_m(\pi/\delta) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

On découple les équations en variable lente et rapide en faisant tendre  $\delta$  vers 0 dans (1.32) et dans (1.35). On aboutit aux équations suivantes

$$(1.36) \quad \begin{cases} \Pi_m''(X) + \Pi_m'(X) = 0 & (X > 0) \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \Pi_m(X) = 0 \end{cases} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(1.37) \quad \left. \begin{cases} (u_0^e)'(x) = -\sin x \\ (u_m^e)'(x) = - (u_{m-1}^e)''(x) \quad (m = 1, 2, \dots) \\ u_m^e(\pi) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \right\} \quad (0 < x < \pi)$$

les systèmes (1.36) et (1.37) étant couplés par la condition

$$(1.38) \quad u_m^e(0) + \Pi_m(0) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

Le système (1.36), (1.37) et (1.38) est typique d'un problème de type couche limite : la solution hors couche limite  $u_m^e$  "ne voit pas" la condition aux limites en  $x = 0$  tandis que la solution à l'intérieur de la couche limite  $\Pi_m$  "ne voit pas" la condition aux limites en  $x = \pi$ .

Nous allons voir maintenant que les équations (1.36), (1.37) et (1.38) suffisent à déterminer le développement dont les coefficients sont donnés en (1.25).

**2.3. Détermination du développement asymptotique.** On part des remarques suivantes. Les équations (1.36) ramènent la détermination de  $\Pi_m$  à celle d'une constante  $\alpha_m$ . En effet, un système fondamental de solutions de l'équation différentielle vérifiée par  $\Pi_m$  est  $e^{-X}$  et 1. Il s'ensuit que

$$(1.39) \quad \Pi_m(X) = \alpha_m e^{-X} + \beta_m$$

La condition à la limite pour  $X \rightarrow +\infty$  sur  $\Pi_m$  donne alors  $\beta_m = 0$ . Les solutions hors couche limite peuvent être déterminées de façon récursive à partir de (1.37) par

$$(1.40) \quad u_0^e(x) = \cos x + 1, \quad u_1^e(x) = \sin x, \quad u_2^e(x) = -(\cos x + 1), \dots$$

Pour ce problème simple, les solutions hors couche limite peuvent être déterminées sans la résolution à l'intérieur de la couche limite. Ce n'est pas le cas en général.

Les conditions (1.38) permettent alors d'effectuer la résolution à l'intérieur de la couche limite

$$(1.41) \quad \Pi_0(X) = -2e^{-X}, \quad \Pi_1(X) = 0, \quad \Pi_2(X) = -2e^{-X}, \dots$$

On arrive ainsi aux coefficients permettant d'approcher la solution  $u_\delta(x)$  uniformément sur  $[0, \pi]$

$$(1.42) \quad u_0(x, \delta) = \cos x + 1 - 2e^{-x/\delta}, \quad u_1(x, \delta) = \sin x, \dots$$

Les termes  $\Pi_m(x/\delta)$  apparaissent comme des corrections aux termes  $u_m^e(x)$  correspondant à la solution hors couche limite. C'est pourquoi la technique de développement double-échelle est présentée parfois comme une technique de construction de **correcteurs de couche limite**.

### 3. Développements asymptotiques raccordés

Nous allons retrouver maintenant les développements asymptotiques précédents par la technique des développements asymptotiques raccordés.

**3.1. Conditions générales.** On exprime maintenant  $u_\delta(x)$  au voisinage de 0 à l'aide de la variable rapide  $X = x/\delta$

$$(1.43) \quad u_\delta^i(X) = u_\delta(\delta X)$$

et on cherche à développer l'expression obtenue en puissances de  $\delta$

$$(1.44) \quad u_\delta^i(X) = \frac{1}{1 + \delta^2} (1 + \cos(\delta X) + \delta \sin(\delta X) - \frac{2(e^{-X} - e^{-\pi/\delta})}{1 - e^{-\pi/\delta}})$$

On a par un développement de Taylor

$$(1.45) \quad \begin{aligned} u_\delta^i(X) &= \frac{1}{1 + \delta^2} (1 + \cos(\delta X) + \delta \sin(\delta X) - 2e^{-X}) + o(\varepsilon^\infty) \\ &= (2 - 2e^{-X}) + \delta^2 \left( -\frac{1}{2}X^2 + X - 2 + 2e^{-X} \right) + O(\delta^3) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(1.46) \quad u_\delta^i(X) = u_0^i(X) + \delta u_1^i(X) + \delta^2 u_2^i(X) + O(\delta^3)$$

avec

$$(1.47) \quad u_0^i(X) = 2 - 2e^{-X}, \quad u_1^i(X) = 0, \quad u_2^i(X) = -\frac{1}{2}X^2 + X - 2 + 2e^{-X}$$

On va essayer de dégager des conditions qui vont nous permettre de retrouver les expressions (1.47) des coefficients du développement de  $u_\delta(\delta X)$  sans recourir à la forme explicite de cette expression. Il semble naturel de commencer par poser l'équation obtenue par changement de variable  $X = x/\delta$

$$(1.48) \quad u_\delta'(x) = \frac{1}{\delta} (u_\delta^i)'(X)$$

d'où

$$(1.49) \quad \frac{1}{\delta} (u_\delta^i)''(X) + \frac{1}{\delta} (u_\delta^i)'(X) = -\sin(\delta X)$$

Il est clair aussi que la condition aux limites en 0 continue à être satisfaite

$$(1.50) \quad u_\delta^i(0) = 0$$

Il est clair aussi que  $u_\delta^i$  “ne voit pas” la condition aux limites en  $x = \pi$  car  $X = x/\delta \rightarrow \infty$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$  pour tout  $x > 0$  fixé. Nous examinerons la condition à mettre lorsque  $X \rightarrow \infty$  plus tard. Pour le moment, nous allons nous contenter d’essayer de trouver les développements asymptotiques (1.51) qui vérifient (1.49) et (1.50). En développant

$$(1.51) \quad \sin(\delta X) = \delta X + O(\delta^3)$$

on trouve que les différents coefficients satisfont

$$(1.52) \quad \begin{cases} (u_0^i)''(X) + (u_0^i)'(X) = 0 \quad (X > 0) \\ u_0^i(0) = 0 \end{cases}$$

$$(1.53) \quad \begin{cases} (u_1^i)''(X) + (u_1^i)'(X) = 0 \quad (X > 0) \\ u_1^i(0) = 0 \end{cases}$$

$$(1.54) \quad \begin{cases} (u_2^i)''(X) + (u_2^i)'(X) = -X \quad (X > 0) \\ u_2^i(0) = 0 \end{cases}$$

Les solutions de ces 3 systèmes dépendent d’une constante indéterminée et sont respectivement données par

$$(1.55) \quad u_m^i(X) = c_m(e^{-X} - 1) \quad (m = 0, 1)$$

$$(1.56) \quad u_2^i(X) = c_2(e^{-X} - 1) - \frac{1}{2}X^2 + X$$

**3.2. Raccordements.** Pour déterminer les différents termes  $u_m^i(X)$ , il faut ajouter aux conditions générales ci-dessus, des conditions de raccordement avec la solution  $u_\delta^e(x)$  extérieure à la couche limite. C’est généralement le point délicat de la méthode car il n’existe pas, mais c’est là une opinion personnelle de l’auteur, une même stratégie valable pour tous les problèmes. Il faut adapter le procédé à chaque problème particulier. Nous allons donner une façon de procéder pour le cas présent mais qui devra être adaptée dans le chapitre 3.

Tout d'abord le raccordement des  $u_m^i(X)$  et des  $u_m^e(x)$  ne se fait pas en un point particulier mais de façon asymptotique. Examinons d'abord les expressions des deux termes exacts  $u_0^e(x) = \cos x + 1$  et  $u_0^i(X) = 2 - 2e^{-X}$  qu'on a obtenu à partir de la formule explicite (1.3) pour  $u_\delta(X)$ . On peut remarquer qu'on peut les lier ensemble de la façon suivante :

– on fait un développement de Taylor de  $u_0^e(\delta X)$  à l'ordre 0

$$(1.57) \quad u_0^e(\delta X) = 1 + \cos(\delta X) = U_0^e(X) + O(\delta)$$

$$(1.58) \quad U_0^e(X) = 2$$

– on trouve que  $U_0^e(X)$  et  $u_0^i(X)$  ont le même comportement asymptotique lorsque  $X \rightarrow +\infty$

$$(1.59) \quad u_0^i(X) - U_0^e(X) = 2 - 2e^{-X} - 2 = -2e^{-X} = o\left(\left(\frac{1}{X}\right)^\infty\right)$$

Il est clair qu'à l'aide de la seule condition  $\lim_{X \rightarrow +\infty} u_0^i(X) - U_0^e(X) = 0$ , on détermine  $c_0 = 2$ .

Pour la condition suivante, il faut reprendre globalement  $u_0^e(\delta X) + \delta u_1^e(\delta X)$  et le développer jusqu'à l'ordre 1 maintenant

$$(1.60) \quad \begin{aligned} u_0^e(\delta X) + \delta u_1^e(\delta X) &= 1 + \cos(\delta X) + \delta \sin(\delta X) = 2 + O(\delta^2) \\ &= U_0^e(X) + \delta U_1^e(X) + O(\delta^2) \end{aligned}$$

avec  $U_1^e(X) = 0$ . On retrouve le résultat  $U_1^e(X) = 0$  obtenu directement en (1.47) par la même règle que ci-dessus

$$(1.61) \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} (u_1^i(X) - U_1^e(X)) = 0$$

Utilisons maintenant la règle trouvée pour déterminer  $c_2$  :

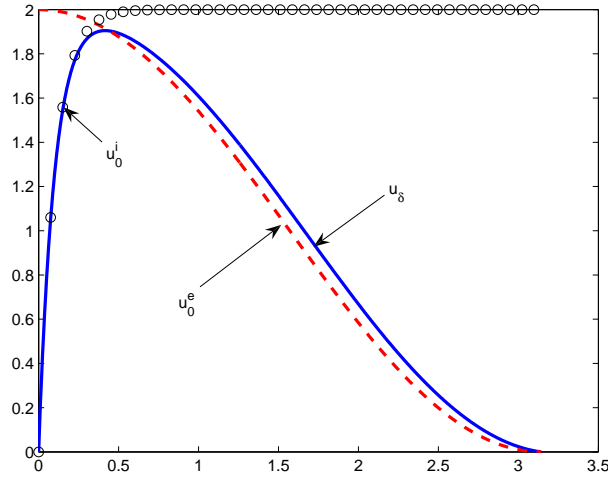


FIG. 1.4. Graphes de  $u_\delta(x)$  (trait plein),  $u_0^e(x)$  (trait discontinu) et  $u_0^i(x/\delta)$  (petits cercles) pour  $\delta = 0.1$

– on fait un développement de Taylor de  $u_0^e(\delta X) + \delta u_1^e(\delta X) + \delta^2 u_2^e(\delta X)$  à l'ordre 2 en  $\delta$

$$\begin{aligned}
 1 + \cos(\delta X) + \delta \sin(\delta X) - \delta^2(1 + \cos(\delta X)) &= \\
 &= 2 + \delta^2 \left( \frac{1}{2} X^2 - X - 2 \right) + O(\delta^3) \\
 (1.62) \quad u_0^e(\delta X) + \delta u_1^e(\delta X) + \delta^2 u_2^e(\delta X) &= \\
 &= U_0^e(X) + \delta U_1^e(X) + \delta^2 U_2^e(X) + O(\delta^3)
 \end{aligned}$$

– on écrit que  $u_2^i(X)$  et  $U_2^e(X)$  ont le même comportement asymptotique lorsque  $X \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 (1.63) \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} (u_2^i(X) - U_2^e(X)) &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \left( \left( c_2(e^{-X} - 1) - \frac{1}{2} X^2 + X \right) - \left( \frac{1}{2} X^2 - X - 2 \right) \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

La condition (1.63) détermine bien la constante  $c_2 = 2$  qui est nécessaire pour retrouver l'expression de  $u_2^i(X)$  obtenue en (1.47) à partir de la solution explicite (1.3).

La figure FIG. 1.4, donnant le graphe de  $u_\delta(x)$ ,  $u_0^e(x)$  et de  $u_0^i(x/\delta)$ , illustre les zones de validité des différents développements asymptotiques.

#### 4. Commentaires bibliographiques

La littérature sur les développements asymptotiques singuliers est énorme. Les mots-clés, sous lesquels on trouvera des études introduisant ou utilisant ces techniques, peuvent être aussi divers que : perturbations singulières, théorie des perturbations, couche limite, etc. Ce cours est une introduction à ce type de problèmes et aux méthodes pour les résoudre. C'est pourquoi la plupart des références, qui sont données, visent plus à indiquer d'autres techniques qu'on n'abordera pas ici, plutôt que de renvoyer à des résultats plus complets sur les problèmes particuliers, considérés aux chapitres suivants, qui servent de support à l'exposé des méthodes introduites.

Ce cours utilise plusieurs sources, en particulier, des résultats d'études qui ne sont pas encore publiés. Néanmoins, nous indiquerons les articles de recherche et les thèses sur lesquels il est basé et qui pourront être utilisés pour en approfondir les éléments. Ils pourront être lus avec profit, mais uniquement à un niveau deux, après une maîtrise suffisante du contenu de ce document. Cette recommandation ne concerne, cependant, que ce qui a trait aux développements asymptotiques. Les références, concernant l'analyse fonctionnelle en général, la théorie des équations aux dérivées partielles, ou l'analyse classique, pourront être consultées avec profit. Il est probable que la nécessité d'appliquer ce type de notions dans ce contexte va renforcer l'acquisition d'une partie du fond de base indispensable à qui veut travailler dans l'un des domaines de la théorie des équations aux dérivées partielles.

Le présent chapitre présentait des généralités sur les développements asymptotiques singuliers. Le livre de Bender et Orszag [3] donne une excellente introduction à ce sujet, essentiellement dans le cadre des équations différentielles. On pourra y acquérir les bases fondamentales en analyse classique indispensables lorsqu'on est amené à travailler sur des problèmes de développements asymptotiques, en particulier la "fameuse" méthode WKB qui se rapproche des développements double-échelle. D'une façon générale, il faut se garder de croire que l'analyse fonctionnelle "high-tech" dispense de connaître l'analyse "artisanale" classique. On pourra voir au chapitres 2 et 3 que c'est l'utilisation combinée d'éléments d'analyse fonctionnelle et classique qui permet de s'attaquer aux problèmes considérés. Sur un autre plan, la monographie de J.-L. Lions [12] constitue une référence

incontournable. Les développements asymptotiques y sont généralement donnés dans un cadre abstrait s'appuyant sur la formulation variationnelle. Les problèmes de couche limite sont abordés à l'aide de techniques de correcteurs qui s'apparentent eux aussi aux développements double-échelle. Les techniques de développements double-échelle utilisées dans ce cours sont empruntées à la référence [25] qui contient un exposé systématique de ce type de méthodes avec plusieurs exemples d'application. Pour une présentation et une utilisation plus formelle des développements asymptotiques raccordés, on pourra consulter les références suivantes [8, 9, 7].



## CHAPITRE 2

### Diffraction par une surface fortement oscillante

Nous commençons par présenter une motivation de l'étude entreprise dans ce chapitre. Cela nous conduira à considérer un problème aux limites relatif à une diffraction d'onde avec une condition aux limites posée sur une frontière fortement oscillante. Nous construirons alors un développement asymptotique de la solution à l'aide des techniques de développement double-échelle. Nous donnerons enfin des estimations d'erreur et concluons l'étude par la construction de conditions aux limites approchées dont la solution peut être obtenue par une résolution numérique effective.

#### 1. Motivation et problème modèle

**1.1. Le problème physique.** Beaucoup de problèmes en diffraction d'onde, comme, par exemple, la conception d'antennes sur les satellites devant assurer une couverture au sol aussi uniforme que possible ou celle des revêtements des murs antibruit, font intervenir des surfaces fortement oscillantes. La figure FIG. 2.1 donne l'exemple d'une antenne de type cornet corrugué entrant dans un dispositif permettant à un satellite d'émettre vers le sol.

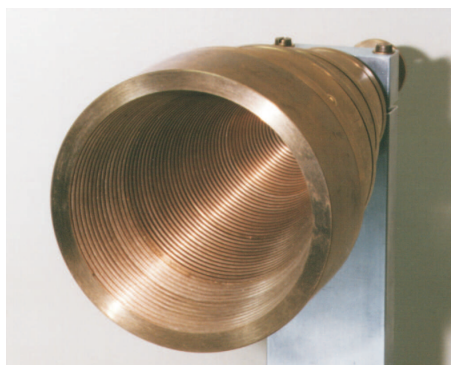


FIG. 2.1. Surface interne d'une antenne de type cornet corrugué

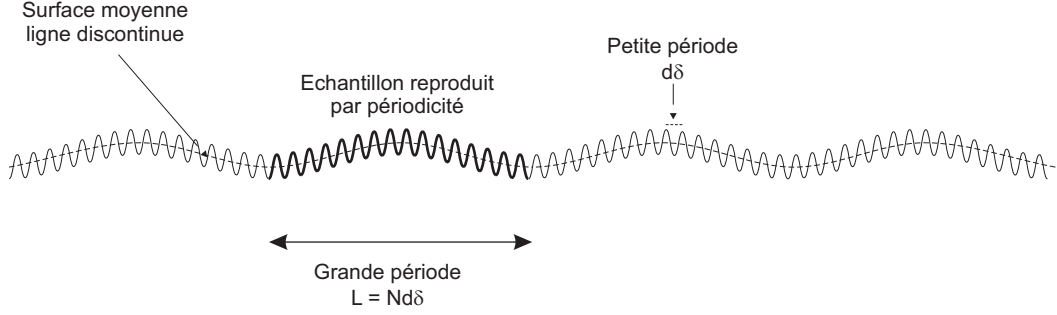


FIG. 2.2. Surface oscillante présentant des oscillations à deux échelles

La simulation numérique directe de ce type d'antenne requiert de mailler la surface oscillante interne au cornet. Outre les difficultés relatives à la construction de maillages pour ce type de structures, la taille du système linéaire résultant du processus de discrétisation rend cette approche impraticable.

**1.2. Approche par homogénéisation.** Au lieu de la condition usuelle sur la composante tangentielle  $\mathbf{E}_T$  du champ électrique  $\mathbf{E}$

$$(2.1) \quad \mathbf{E}_T = 0$$

sur les surfaces métalliques, l'approche par homogénéisation pour ce problème consiste à poser une condition aux limites sur une surface moyenne de la partie fortement oscillante du type condition d'impédance

$$(2.2) \quad \mathbf{E}_T + Z\alpha \mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0$$

La fonction  $\alpha$  peut être constante ou non selon que les oscillations sont parfaitement périodiques ou ont une période locale variant d'une zone à l'autre. La résolution numérique du problème de diffraction passe ainsi par la détermination de cette fonction  $\alpha$ . Cela est obtenu en déterminant  $\alpha$  dans le cas d'un problème modèle. Cette détermination passe par l'analyse asymptotique d'un problème modèle du type de celui que nous allons considérer ci-dessus.

**1.3. Le problème modèle.** On prend un échantillon de la surface, qu'on suppose invariante dans la direction  $z$ , et on le reproduit par périodicité (voir figure FIG. 2.2).

La surface est ainsi décrite par sa section dans le plan  $z = 0$ . Elle est donnée par une courbe  $\{y = \delta s(x, X)|_{X=x/\delta}\}$  possédant les propriétés de périodicité suivantes

$$(2.3) \quad s(x + L, X) = s(x, X) \text{ et } s(x, X + d) = s(x, X) \quad (\forall x \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{R})$$

où  $s$  est une fonction, qu'on supposera indéfiniment dérivable pour simplifier, fixant la forme de la surface, qui vérifie

$$(2.4) \quad 0 \leq s(x, X) \leq 1 \quad \text{pour tout } x \text{ et tout } X \text{ dans } \mathbb{R}$$

On suppose en outre que la grande période  $L$  est un multiple  $L = Nd\delta$  de la petite période  $d\delta$ ;  $d$  est un paramètre reliant la petite période à l'amplitude maximum  $\delta$  des variations de la surface. Pour le problème qui nous intéresse,  $\delta$  est un petit paramètre positif destiné à tendre vers 0. De cette façon, la surface est décrite par une courbe du plan

$$(2.5) \quad \Gamma_\delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = \gamma_\delta(x) = \delta s(x, X)|_{X=x/\delta}\}$$

où la fonction  $x \rightarrow \gamma_\delta(x)$  est périodique de période  $L$  comme on peut le vérifier aisément.

Pour nous limiter au problème le plus simple, nous supposons que le champ électrique est polarisé dans la direction d'invariance de la surface. Une des façons de déterminer le coefficient homogénéisé est de résoudre le modèle TM, pour transverse magnétique, que nous décrivons maintenant. Le champ électrique total a une seule composante non nulle et tout le champ électromagnétique s'exprime à l'aide de cette composante. Cette composante est celle le long de la direction d'invariance de la surface. Nous noterons par  $u_\delta(x, y)$  sa valeur au point  $(x, y)$  du domaine

$$(2.6) \quad \Omega_\delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > \gamma_\delta(x)\}$$

Le champ est produit par une onde plane incidente, se propageant dans la direction opposée du vecteur de cosinus directeurs  $(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$  ( $0 < \theta_0 \leq \pi/2$ ), qui est aussi décrite de la même façon que l'onde totale par la composante

$$(2.7) \quad u^{\text{inc}}(x, y) = \exp(-ik(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0))$$

Le réel  $k > 0$  est le nombre d'onde. Il est lié à la fréquence  $\omega/2\pi$  et à la vitesse des ondes électromagnétiques  $c$  par la relation

$$(2.8) \quad k = \omega/c$$

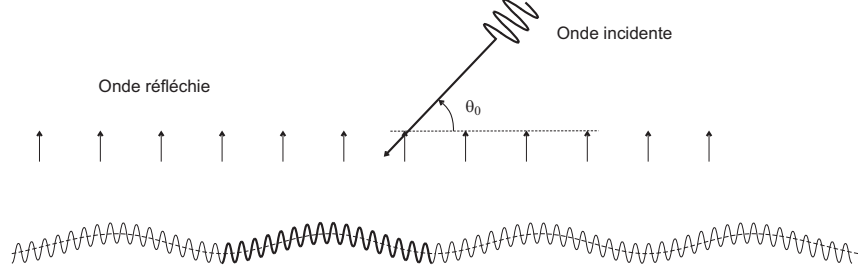


FIG. 2.3. Vue schématique du problème de diffraction

Les équations de Maxwell dans le cas TM et avec une condition sur  $\Gamma_\delta$  de type conducteur parfait donnent

$$(2.9) \quad \begin{cases} \Delta u_\delta + k^2 u_\delta = 0 & \text{dans } \Omega_\delta \\ u_\delta = 0 & \text{sur } \Gamma_\delta \end{cases}$$

L'équation dans  $\Omega_\delta$  est dite équation d'Helmholtz. Elle régit généralement la propagation des ondes en régime harmonique dans un milieu homogène.

Il faut fermer le système (2.9) par une condition de radiation traduisant que l'onde réfléchie  $u_\delta - u^{\text{inc}}$  se propage de  $\Gamma_\delta$  vers les  $y$  positifs (voir figure FIG. 2.3).

Cette condition de radiation peut être explicitée en décomposant l'onde diffractée en **modes de Floquet**. Cela consiste à remarquer qu'il a une relation entre la périodicité de  $u^{\text{inc}}(x, y)$  à  $y$  fixé et celle de la surface

$$(2.10) \quad u^{\text{inc}}(x + L, y) = \exp(-ik(x + L) \cos \theta_0) \exp(-iky \sin \theta_0) = \exp(i\beta L) u^{\text{inc}}(x, y)$$

avec

$$(2.11) \quad \beta = -k \cos \theta_0$$

Une fonction vérifiant  $w(x + L) = \exp(i\beta L)w(x)$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ) est dite  $\beta$ -quasipériodique de période  $L$ . Les fonctions 0 quasi périodiques sont les fonctions périodiques usuelles. Le point important est qu'à une fonction  $w$ ,  $\beta$ -quasipériodique, on peut associer une fonction périodique par  $x \rightarrow \exp(-i\beta x)w(x)$ . En effet, on a  $\exp(-i\beta(x + L))w(x + L) = \exp(-i\beta L) \exp(-i\beta x)w(x + L) = \exp(-i\beta x)w(x)$ . On peut ainsi développer en série de Fourier  $\exp(-i\beta x)w(x)$

$$(2.12) \quad \exp(-i\beta x)w(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_m \exp(i \frac{2m\pi}{L} x)$$

avec

$$(2.13) \quad c_m = \frac{1}{L} \int_0^L \exp(-i\beta_m x) w(x) dx \quad \beta_m = \beta + \frac{2m\pi}{L}$$

En supposant que l'onde réfléchie a la même propriété de  $\beta$ -quasipériodicité que l'onde incidente, on peut ainsi la décomposer en série de fonctions à variables séparées

$$(2.14) \quad u_\delta(x, y) - u^{\text{inc}}(x, y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_m(y) \exp(i\beta_m x),$$

$$(2.15) \quad u_m(y) = \frac{1}{L} \int_0^L \exp(-i\beta_m x) (u_\delta - u^{\text{inc}})(x, y) dx$$

Comme de plus l'onde réfléchie vérifie l'équation d'Helmholtz, on a

$$\begin{aligned} \partial_y^2 u_m(y) &= \frac{1}{L} \int_0^L \exp(-i\beta_m x) \partial_y^2 (u_\delta - u^{\text{inc}})(x, y) dx \\ &= -\frac{1}{L} \int_0^L \exp(-i\beta_m x) (k^2 + \partial_x^2) (u_\delta - u^{\text{inc}})(x, y) dx \end{aligned}$$

soit, encore, en intégrant par partie

$$\partial_y^2 u_m(y) = -\frac{1}{L} \int_0^L ((k^2 + \partial_x^2) \exp(-i\beta_m x)) (u_\delta - u^{\text{inc}})(x, y) dx$$

car les termes tout intégrés se compensent par la pseudo-périodicité. Chaque coefficient  $u_m(y)$  vérifie ainsi l'équation différentielle

$$\partial_y^2 u_m(y) + K_m^2 u_m(y) = 0$$

avec

$$(2.16) \quad K_m = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \beta_m^2} & \text{si } k > \beta_m \\ i\sqrt{\beta_m^2 - k^2} & \text{si } k < \beta_m \end{cases}$$

Les solutions de cette équation sont données par

$$(2.17) \quad u_m(y) = u_m^+ \exp(iK_m y) + u_m^- \exp(-iK_m y)$$

Les termes  $u_m^- \exp(-iK_m y) \exp(i\beta_m x)$  pour des  $K_m$  réels correspondent à des ondes se propageant dans la direction contraire de celle de l'axe des  $y$ . La condition de radiation consiste à les éliminer car seule l'énergie portée par l'onde incidente peut venir de cette direction. Les termes  $u_m^- \exp(-iK_m y) \exp(i\beta_m x)$  pour des  $K_m$  imaginaires explosent lorsque  $y \rightarrow +\infty$ . Ils ne peuvent pas être contenus dans la décomposition de la solution. Un des

énoncés de la condition de radiation est ainsi de postuler que la solution se décompose sous la forme

$$(2.18) \quad u_\delta(x, y) - u^{\text{inc}}(x, y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_m \exp(i\beta_m x) \exp(iK_m y)$$

Les termes  $u_m \exp(i\beta_m x) \exp(iK_m y)$  sont dits **modes de Floquet**. On a ainsi une décomposition très analogue à celle qu'on trouve pour un guide d'onde semi-infini.

**1.4. Le problème aux limites.** On peut d'abord tronquer le domaine où est posé le problème aux limites en prenant en compte le demi-plan

$$(2.19) \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > H\}$$

par un opérateur sur la droite  $\{y = H\}$  où  $H$  est choisi tel que

$$(2.20) \quad H > \delta_0 \max_{x, X} s(x, X)$$

sachant que  $\delta$  vérifie

$$(2.21) \quad \delta \leq \delta_0$$

En notant

$$(2.22) \quad \Omega_\delta^H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \delta s(x, X)|_{X=x/\delta} < y < H\}$$

le problème de diffraction ci-dessus s'énonce alors de façon équivalente

$$(2.23) \quad \begin{cases} \Delta u_\delta + k^2 u_\delta = 0 \text{ dans } \Omega_\delta^H \\ x \rightarrow \exp(-i\beta x) u_\delta(x, y) \text{ est } L\text{-périodique} \\ u_\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_\delta \\ \partial_y(u - u^{\text{inc}}) + S((u - u^{\text{inc}})(\cdot, H)) = 0 \text{ pour } y = H \end{cases}$$

où  $S$  est l'opérateur non local défini par

$$(2.24) \quad Sw = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-iK_m) w_m \exp(i\beta_m x), \quad w_m = \frac{1}{L} \int_0^L w(x) \exp(-i\beta_m x) dx$$

## 2. Existence-unicité du problème de diffraction

On commence, dans cette section, par préciser un cadre fonctionnel permettant d'établir un résultat de stabilité par rapport au petit paramètre  $\delta$  du problème de diffraction (2.23). Cette stabilité interviendra non seulement comme un argument essentiel dans la preuve de l'existence-unicité de la solution de (2.23) mais aussi pour obtenir une estimation d'erreur du développement asymptotique de cette dernière.

**2.1. Le cadre fonctionnel.** Les espaces de base sont une adaptation des espaces de Sobolev au cadre pseudo-périodique. On définit donc l'espace  $H_{\#}^s(\Omega_{\delta}^H)$  comme l'espace des distributions  $v$  sur  $\Omega_{\delta}^H$  dont la restriction à tout domaine borné  $\omega \subset \Omega_{\delta}^H$  est dans  $H^s(\omega)$  qui sont telles que

$$(2.25) \quad \exp(-i\beta x)v \text{ est périodique de période } L$$

Pour  $s \geq 0$ ,  $v$  est une fonction : la définition de la périodicité est la définition usuelle. Pour  $s < 0$ , elle est définie par dualité. L'espace  $H_{\#}^s(\Omega_{\delta}^H)$  peut être défini de façon équivalente, adaptée à la description de sa topologie, par

$$(2.26) \quad H_{\#}^s(\Omega_{\delta}^H) = \{v \in \mathcal{D}'(\Omega_{\delta}^H); v \text{ vérifie (2.25) et } \varphi v \in H^s(\Omega_{\delta}^H), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)\}$$

Pour  $s = m$ , entier  $\geq 0$ , les normes des  $H_{\#}^m(\Omega_{\delta}^H)$  sont données à l'aide des semi-normes usuelles en intégrant sur l'une quelconque des cellules

$$\Omega_{\delta}^{\ell,H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \ell < x < \ell + L, \delta s(x, X)|_{X=x/\delta} < y < H\}$$

$$(2.27) \quad |v|_{1,\Omega_{\delta}^{\ell,H}} = \left( \int_{\Omega_{\delta}^{\ell,H}} |\nabla v|^2 dx dy \right)^{1/2}, \quad |v|_{0,\Omega_{\delta}^{\ell,H}} = \left( \int_U |v|^2 dx dy \right)^{1/2},$$

$$(2.28) \quad \|v\|_{1,\Omega_{\delta}^{\ell,H}} = \sqrt{\int_{\Omega_{\delta}^{\ell,H}} (|\nabla v|^2 + |v|^2) dx dy}$$

$$(2.29) \quad |v|_{m,\Omega_{\delta}^{\ell,H}} = \left( \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega_{\delta}^{\ell,H}} |\partial^{\alpha} v|^2 dx dy \right)^{1/2}, \quad \|v\|_{m,\Omega_{\delta}^{\ell,H}} = \sqrt{\sum_{j=0}^m |v|_{j,\Omega_{\delta}^{\ell,H}}^2}$$

La figure FIG. 2.4 donne un schéma de la cellule  $\Omega_{\delta}^{0,H}$ . Pour  $s$  quelconque, la structure hilbertienne de  $H^s(\Omega_{\delta}^H)$  peut être défini à partir de (2.26) comme pour les espaces de Sobolev sur une surface fermée de  $\mathbb{R}^3$ .

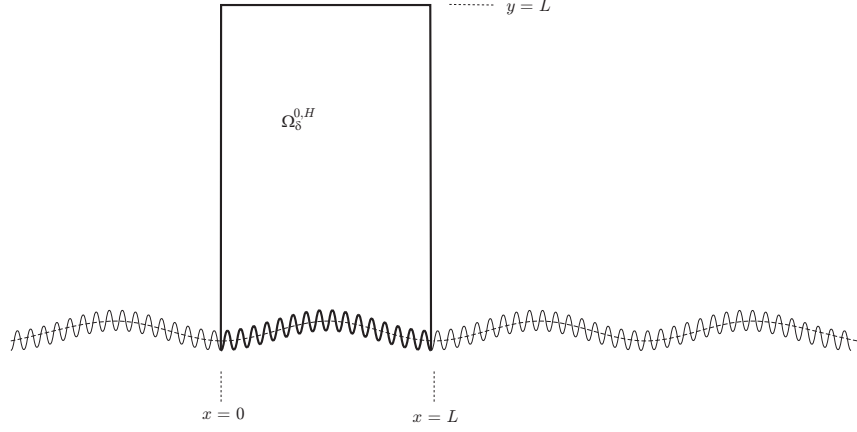


FIG. 2.4. Cellule permettant de définir la norme de  $H_{\#}^m(\Omega_{\delta}^H)$

Pour disposer des théorèmes de trace sur la droite  $\{y = H\}$ , on définit de même  $H_{\#}^s(\mathbb{R})$ . Comme la fonction  $x \rightarrow v(x)\overline{w(x)} = \exp(-i\beta x)v(x)\overline{\exp(-i\beta x)w(x)}$  est  $L$ -périodique, on peut identifier  $H_{\#}^{-s}(\mathbb{R})$  à l'anti-dual de  $H_{\#}^s(\mathbb{R})$  grâce au prolongement par continuité du produit scalaire sur  $L_{\#}^2(\mathbb{R})$

$$(2.30) \quad \langle v, w \rangle_{-s,s} = \int_0^L v\bar{w} \, dx \text{ lorsque } v \text{ et } w \in L_{\#}^2(\mathbb{R})$$

Remarquons que, suite à la périodicité de la fonction  $v\bar{w}$ , l'intégrale, qui apparaît en (2.30), peut être calculée en intégrant sur tout intervalle de longueur  $L$ . On peut montrer alors, en calquant la définition des normes des espaces de Sobolev de fonctions périodiques, que  $S$  opère continûment de  $H_{\#}^s(\mathbb{R})$  dans  $H_{\#}^{s-1}(\mathbb{R})$  et en particulier de  $H_{\#}^{1/2}(\mathbb{R})$  dans son anti-dual  $H_{\#}^{-1/2}(\mathbb{R})$ .

**2.2. La formulation variationnelle.** Définissons maintenant

$$(2.31) \quad V_{\delta} = \{v \in H_{\#}^1(\Omega_{\delta}^H); v|_{\Gamma_{\delta}} = 0\}$$

On considère alors la formulation variationnelle

$$(2.32) \quad \begin{cases} u_{\delta} \in V_{\delta}, \forall v \in V_{\delta} \\ a_{\delta}(u_{\delta}, v) + \langle Su_{\delta}, v \rangle_{-1/2,1/2} = \int_0^L (\partial_y u^{\text{inc}}|_H + Su^{\text{inc}}) \overline{v|_{y=H}} \, dx \end{cases}$$

avec

$$(2.33) \quad a_{\delta}(u_{\delta}, v) = \int_{\Omega_{\delta}^{0,H}} (\nabla u_{\delta} \cdot \nabla \bar{v} - k^2 u_{\delta} \bar{v}) \, dx dy$$

Toute solution du problème (2.23) vérifie ainsi (2.32).



Réciproquement, en remarquant que l'intégrale définissant la forme sesquilinéaire  $a_\delta(\cdot, \cdot)$  peut être définie en intégrant sur  $\Omega_\delta^{\ell, H}$  avec  $\ell$  quelconque, on montre facilement que toute solution de (2.32) donne aussi une solution pour le problème (2.23).

**2.3. Existence-unicité.** La partie réelle de la forme quadratique  $v \in V_\delta \rightarrow a_\delta(v, v) + \langle Sv, v \rangle_{-1/2, 1/2}$

$$(2.34) \quad \Re a_\delta(v, v) = \int_{\Omega_\delta^{0, H}} |\nabla v|^2 dx dy - k^2 \int_{\Omega_\delta^{0, H}} |v|^2 dx dy + \Re \langle Sv, v \rangle_{-1/2, 1/2}$$

$$\Re \langle Sv, v \rangle_{-1/2, 1/2} = L \sum_{m \geq m_0} \sqrt{\beta_m^2 - k^2} |\nu_m|^2 \geq 0$$

où  $\nu_m$  est le coefficient du développement de  $v(\cdot, H)$  défini en (2.24) et  $m_0$  est le plus petit des indices  $m$  tels que  $\beta_m^2 - k^2 > 0$ , comporte un terme négatif :  $-k^2 \int_{\Omega_\delta} |v|^2 dx dy$ . Ce terme est caractéristique d'un problème d'ondes en régime harmonique. On n'a donc pas pour ce type de problèmes de coercivité au sens usuel. Le caractère bien posé du problème s'obtient alors à l'aide de deux arguments : un **argument d'unicité** et un **argument de compacité**. Nous allons voir comment les mettre en oeuvre pour ce problème.

On commence par décomposer la forme  $a_\delta$  en partie positive  $a_\delta^+$  et un reste  $r_\delta$ , soit ici

$$(2.35) \quad a_\delta^+(u, v) = \int_{\Omega_\delta^{0, H}} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} dx dy$$

$$(2.36) \quad r_\delta(u, v) = -k^2 \int_{\Omega_\delta^{0, H}} u \bar{v} dx dy$$

La coercivité de la forme  $a_\delta^+$  va résulter de façon usuelle d'une inégalité de type Poincaré donnée par le lemme suivant. Bien que cela ne soit pas indispensable, nous préférons établir ce lemme à partir de la remarque suivante qui sera importante pour la suite.

*REMARQUE 2.1. Tout  $v \in V_\delta$  peut être identifié par prolongement par 0 à un élément de*

$$(2.37) \quad V_0 = \{v \in H_{\#}^1(\Omega_0^H) ; v|_{y=0} = 0\}$$

avec

$$(2.38) \quad \Omega_0^H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < y < H\}$$

LEMME 2.1. *L'inégalité suivante*

$$(2.39) \quad |v|_{0,\Omega_\delta^{0,H}} \leq c |v|_{1,\Omega_\delta^{0,H}}$$

est vérifiée à l'aide d'une constante  $c$ , **indépendante** de  $\delta$ , et pour tout  $v \in V_\delta$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $v \in V_\delta$ . On peut supposer par densité que  $v \in V_\delta \cap \mathcal{C}^1(\Omega_\delta^H)$ .

On écrit alors

$$v(x, y) = \int_0^y \partial_y v(x, t) dt$$

Ceci donne en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|v(x, y)|^2 \leq y \int_0^H |\partial_y v(x, t)|^2 dt$$

Le reste de la démonstration s'obtient en intégrant en  $y$  entre 0 et  $H$ , puis en  $x$  entre 0 et  $L$ . □

La proposition suivante, dont la preuve est immédiate à partir du lemme précédent, établit que la forme  $a_\delta^+$  est coercive avec une constante qui peut être contrôlée uniformément en  $\delta$ .

LEMME 2.2. *L'inégalité suivante est vérifiée avec une constante  $\alpha > 0$  indépendante de  $\delta$*

$$(2.40) \quad \Re a_\delta^+(v, v) \geq \alpha \|v\|_{1,\Omega_\delta^{0,H}}^2$$

pour tout  $v \in V_\delta$ .

LEMME 2.3. *Pour tout  $\delta$  fixé, éventuellement  $\delta = 0$ , la forme  $r_\delta$  est compacte sur  $V_\delta$  dans le sens suivant. Soient deux suites  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{v_n\}_{n \geq 0}$  de  $V_\delta$  vérifiant*

$$(2.41) \quad \lim_{n \rightarrow 0} u_n = u \text{ et } \lim_{n \rightarrow 0} v_n = v \text{ faiblement dans } V_\delta$$

alors

$$(2.42) \quad \lim_{n \rightarrow 0} r_\delta(u_n, v_n) = r_\delta(u, v)$$

DÉMONSTRATION. Cela résulte immédiatement de l'injection compacte de  $H^1(\Omega_0^{0,H})$  dans  $L^2(\Omega_0^{0,H})$ . □

Nous allons maintenant réduire la question de l'existence-unicité d'une solution pour le problème (2.32) au 1<sup>er</sup> cas de l'alternative de Fredholm, c'est-à-dire à établir que celle-ci est équivalente à l'unicité des solutions de (2.32).

Pour cela, pour  $u$  donné dans  $V_\delta$ , on considère le problème

$$(2.43) \quad \begin{cases} w_\delta \in V_\delta, \forall v \in V_\delta \\ a_\delta^+(w_\delta, v) + \langle Sw_\delta, v \rangle_{-1/2, 1/2} = a_\delta(u, v) + \langle Su_\delta, v \rangle_{-1/2, 1/2} \end{cases}$$

La coercivité de  $a_\delta^+$ , établie plus haut, montre que l'application linéaire  $u \in V_\delta \rightarrow \Lambda_\delta u = w_\delta \in V_\delta$  est bien définie et bornée indépendamment de  $\delta$

$$(2.44) \quad \|\Lambda_\delta u\|_{1, \Omega_\delta^0, H} \leq c \|u\|_{1, \Omega_\delta^0, H} \quad (\forall u \in V_\delta)$$

PROPOSITION 2.1. *On est dans le 1<sup>er</sup> cas de l'alternative de Fredholm pour le problème (2.32), c'est-à-dire, on l'alternative suivante :*

1. *le problème (2.32) admet une solution et une seule ;*
2. *la solution du problème (2.32) n'est pas unique.*

DÉMONSTRATION. On remarque d'abord que  $p_\delta = w_\delta - u_\delta$  est solution du problème coercif

$$(2.45) \quad \begin{cases} p_\delta \in V_\delta, \forall v \in V_\delta \\ a_\delta^+(p_\delta, v) + \langle Sp_\delta, v \rangle_{-1/2, 1/2} = r_\delta(u, v) \end{cases}$$

Grâce au lemme 2.3, on peut alors décomposer  $\Lambda_\delta = I + T_\delta$  où  $T_\delta$  est un opérateur compact de  $V_\delta$  dans  $V_\delta$  comme on peut le vérifier aisément à titre d'exercice. Rappelons que  $T_\delta$  est dit compact s'il transforme une suite faiblement convergente en une suite fortement convergente. La théorie élémentaire des opérateurs compacts nous dit alors que  $I + T_\delta$  est inversible si et seulement si  $-1$  n'est pas valeur propre de  $T_\delta$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\ker \Lambda_\delta = \{0\}$ . Soit alors  $u \in \ker \Lambda_\delta$ . Par définition de  $w_\delta = \Lambda_\delta u$ ,  $u$  est solution du problème (2.32) avec un second membre égal à 0. On a alors exactement l'énoncé de la proposition.  $\square$

Si  $\delta$  n'est pas suffisamment petit, **le réseau peut propager des modes propres résonants qui sont alors des vecteurs propres de l'opérateur  $T_\delta$  pour la valeur propre  $-1$ .** Le lemme suivant va en fait établir que  $\Lambda_\delta$  est inversible et que la norme de son

inverse est uniformément borné par rapport à  $\delta$ . Auparavant, on aura besoin de lemmes intermédiaires.

LEMME 2.4. *Soient  $E$  et  $F$ , deux espaces de Banach et  $\{L_\delta\}_{\delta>0}$  une famille d'opérateurs linéaires continus de  $E$  dans  $F$  tels que*

1.  $\|L_\delta v\|_F \leq c \|v\|_E$  pour tout  $v \in E$ ,

2.  $\lim_{\delta \rightarrow 0} L_\delta v = Lv$  pour tout  $v \in \mathcal{E}$ , un sous-espace dense dans  $E$ ,

alors,  $L$  est un opérateur linéaire continu de  $E$  dans  $F$  et

$$(2.46) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} L_\delta v = Lv$$

pour tout  $v \in E$ .

DÉMONSTRATION. Il est clair que la condition 2 permet de définir un opérateur linéaire  $L$  de  $\mathcal{E}$  dans  $F$ . La condition 1 et la densité de  $\mathcal{E}$  montrent alors que  $L$  peut être étendu par continuité en un opérateur linéaire continu sur tout  $E$ . Pour montrer (2.46), considérons une suite  $\{v_n\}_{n \geq 0} \subset \mathcal{E}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$ . On alors

$$L_\delta v - Lv = L_\delta (v - v_n) + L_\delta v_n - Lv_n + L(v_n - v)$$

On écrit alors que

$$\begin{aligned} \|L_\delta v - Lv\|_F &\leq \|L_\delta (v - v_n)\|_F + \|L_\delta v_n - Lv_n\|_F + \|L(v_n - v)\|_F \\ &\leq 2c \|v_n - v\|_F + \|L_\delta v_n - Lv_n\|_F \end{aligned}$$

Soit maintenant  $\varepsilon > 0$ . On fixe  $v_n \in \mathcal{E}$  tel que  $\|v_n - v\|_F \leq \varepsilon/4c$ . On choisit alors  $\delta(\varepsilon)$  tel que  $\|L_\delta v_n - Lv_n\|_F \leq \varepsilon/2$  pour  $\delta \leq \delta(\varepsilon)$ . Il s'ensuit que pour  $\delta \leq \delta(\varepsilon)$ ,  $\|L_\delta v - Lv\|_F \leq \varepsilon$ . Ceci démontre le lemme.  $\square$

LEMME 2.5. *Le problème*

$$(2.47) \quad \begin{cases} u \in V_0, \forall v \in V_0 \\ a_0(u, v) + \langle Su, v \rangle_{-1/2, 1/2} = 0 \end{cases}$$

admet  $u = 0$  comme unique solution.

DÉMONSTRATION. Par définition de l'opérateur  $S$ , la fonction  $u_0$  peut être prolongée à  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$  en une fonction  $\beta$ -pseudopériodique satisfaisant

$$(2.48) \quad \begin{cases} \Delta u_0 + k^2 u_0 = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_+^2 \\ u_0 = 0 \text{ pour } y = 0 \\ u_0(x, y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_m \exp(iK_m y) \exp(i\beta_m x) \end{cases}$$

L'unicité du développement en série de Fourier donne alors  $u_m = 0$  pour tout  $m$ . D'où le lemme.  $\square$

LEMME 2.6. *Il existe  $\delta_0 > 0$  et une constante  $\gamma > 0$ , indépendante de  $\delta$ , tels que pour  $0 \leq \delta \leq \delta_0$*

$$(2.49) \quad \|\Lambda_\delta u\|_{1, \Omega_\delta^{0,H}} \geq \gamma \|u\|_{1, \Omega_\delta^{0,H}}$$

pour tout  $u \in V_\delta$ .

DÉMONSTRATION. On va faire une démonstration par l'absurde. Si l'estimation (2.49) est fautive, il existerait une suite  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  et une suite  $\{\delta_n\}_{n \geq 0}$  tels que

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$
2.  $u_n \in V_{\delta_n}$  et  $\|u_n\|_{1, \Omega_{\delta_n}^{0,H}} = 1$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$  avec  $w_n = \Lambda_{\delta_n} u_n$

Comme les  $u_n$  peuvent être identifiés à des éléments de  $V_0$  avec la même norme, la condition 2 assure que, au besoin en passant à une sous-suite,  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  converge faiblement vers  $u$ . Soit  $v \in V_0$ . En utilisant la densité des fonctions régulières nulles au voisinage de l'axe  $\{y = 0\}$  dans  $V_0$ , le lemme 2.4 permet de construire une suite de fonction  $\{v_n\}_{n \geq 0}$  telles que  $v_n \in V_{\delta_n}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$  dans  $V_0$  fortement. (Définir  $L_n v$  comme le prolongé par 0 à  $\Omega_0^{0,H}$  de  $(L_n v)(x, y) = v(x, y - \delta_n)$  qui est défini pour  $y \geq \delta_n$ .) En utilisant alors la définition de  $w_n$ , il vient

$$(2.50) \quad a_{\delta_n}^+(w_n, v_n) + \langle S w_n, v_n \rangle_{-1/2, 1/2} = a_{\delta_n}(u_n, v_n) + r_{\delta_n}(u_n, v_n) + \langle S u_n, v_n \rangle_{-1/2, 1/2}$$

En passant à la limite lorsque  $n \rightarrow \infty$ , il vient

$$a_0(u, v) + r_0(u, v) + \langle S u, v \rangle_{-1/2, 1/2} = 0$$

Il résulte alors du lemme 2.5 que  $u = 0$ . En choisissant maintenant  $v_n = w_n - u_n$  dans (2.50) et en remarquant que  $r_{\delta_n}(u, v) = r_0(u, v)$  pour tout  $u$  et  $v$  dans  $V_{\delta_n}$ , il vient grâce au lemme 2.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\delta_n}^+(w_n - u_n, w_n - u_n) + \langle S(w_n - u_n), w_n - u_n \rangle_{-1/2, 1/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} r_{\delta_n}(u_n, w_n - u_n) = 0$$

Comme

$$\Re \left( a_{\delta_n}^+(w_n - u_n, w_n - u_n) + \langle S(w_n - u_n), w_n - u_n \rangle \right)_{-1/2, 1/2} \geq \Re a_{\delta_n}^+(w_n - u_n, w_n - u_n)$$

Le lemme 2.2 donne alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - u_n\|_{1, \Omega_{\delta_n}^{0, H}} = 0$$

Ceci est en contradiction avec les propriétés 2. et 3. ci-dessus.  $\square$

On a ainsi établi le théorème suivant qui assure l'existence unicité pour le problème (2.32) pour  $\delta$  assez petit et la stabilité de tels problèmes par rapport à  $\delta$ .

**THÉORÈME 2.1.** *Soit une famille  $\{L_\delta\}_{\delta \geq 0}$  de formes antilinéaires  $L_\delta$  continues sur  $V_\delta$ . Alors, pour  $0 < \delta \leq \delta_0$ , le problème*

$$(2.51) \quad \begin{cases} e_\delta \in V_0, \forall v \in V_\delta \\ a_\delta(e_\delta, v) + \langle S e_\delta, v \rangle_{-1/2, 1/2} = L_\delta v \end{cases}$$

*admet une solution et une seule vérifiant en outre*

$$(2.52) \quad \|e_\delta\|_{1, \Omega_\delta^{0, H}} \leq c \sup_{v \in V_\delta} |L_\delta v|$$

*où  $c$  est une constante indépendante de  $\delta$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $z_\delta$  une solution du problème

$$\begin{cases} z_\delta \in V_0, \forall v \in V_\delta \\ a_\delta(z_\delta, v) + \langle S z_\delta, v \rangle_{-1/2, 1/2} = 0 \end{cases}$$

Suite à la définition de  $\Lambda_\delta$ , il s'ensuit que  $\Lambda_\delta z_\delta = 0$ . Le lemme précédent montre que  $z_\delta = 0$  pour  $0 < \delta \leq \delta_0$ . La proposition 2.1 montre alors que le problème (2.51) possède une solution et une seule. Notons alors  $w_\delta = \Lambda_\delta e_\delta$ . Suite à la définition de  $\Lambda_\delta$ ,  $w_\delta$  est solution du problème coercif suivant

$$\begin{cases} w_\delta \in V_0, \forall v \in V_\delta \\ a_\delta^+(w_\delta, v) + \langle S w_\delta, v \rangle_{-1/2, 1/2} = L_\delta v \end{cases}$$

On a en particulier

$$\begin{aligned} \alpha \|w_\delta\|_{1,\Omega_\delta^0,H}^2 &\leq \Re \left( a_\delta^+(w_\delta, w_\delta) + \langle Sw_\delta, w_\delta \rangle_{-1/2,1/2} \right) \\ &\leq \sup_{v \in V_\delta} |L_\delta v| \|w_\delta\|_{1,\Omega_\delta^0,H} \end{aligned}$$

qui équivaut à

$$\|w_\delta\|_{1,\Omega_\delta^0,H} \leq \frac{1}{\alpha} \sup_{v \in V_\delta} |L_\delta v|$$

On utilise alors l'estimation (2.49) qui donne

$$\gamma \|e_\delta\|_{1,\Omega_\delta^0,H} = \|\Lambda_\delta e_\delta\|_{1,\Omega_\delta^0,H} = \|w_\delta\|_{1,\Omega_\delta^0,H} \leq \frac{1}{\alpha} \sup_{v \in V_\delta} |L_\delta v|$$

et termine la preuve du théorème.  $\square$

### 3. Développement asymptotique

Après avoir défini la forme du développement asymptotique, on écrit les équations vérifiées par ses différents termes. On établit alors l'existence de ce dernier.

**3.1. Forme du développement asymptotique.** Le champ électromagnétique va avoir des variations rapides à l'intérieur d'une couche limite au voisinage de la surface oscillante pour satisfaire la condition aux limites. En dehors de la couche limite, le comportement est celui d'une onde se propageant dans l'espace libre. C'est pourquoi on va utiliser un développement asymptotique à deux échelles de la forme suivante :

$$(2.53) \quad u_\delta(x, y) = u_\delta^e(x, y) + \Pi_\delta(x, X, Y)|_{X=x/\delta, Y=y/\delta}$$

$$(2.54) \quad u_\delta^e(x, y) \sim u_0^e(x, y) + \delta u_1^e(x, y) + \dots$$

$$(2.55) \quad \Pi_\delta(x, X, Y) \sim \Pi_0(x, X, Y) + \delta \Pi_1(x, X, Y) + \dots$$

La dépendance par rapport à la variable lente  $x$  du terme  $\Pi_\delta(x, X, Y)$ , relatif au comportement interne à la couche limite, est destiné à prendre en compte le fait que la période locale de la frontière peut varier d'une zone à l'autre.

Les hypothèses sur les termes de la décomposition (2.53), se traduisant par les mêmes propriétés sur les différents coefficients de leur développement asymptotiques sont les

suivants :

$$(2.56) \quad x \rightarrow u_\delta^e(x, y) \text{ est } \beta\text{-pseudopériodique de période } L$$

$$(2.57) \quad x \rightarrow \Pi_\delta(x, X, Y) \text{ est } \beta\text{-pseudopériodique de période } L$$

$$(2.58) \quad X \rightarrow \Pi_\delta(x, X, Y) \text{ est périodique de période } d$$

$$(2.59) \quad \lim_{Y \rightarrow +\infty} \partial_x^m \partial_X^n \partial_Y^l \Pi_\delta(x, X, Y) = 0$$

Notons que la condition (2.57) assure que la fonction  $x \rightarrow \Pi_\delta(x, X, Y)|_{X=x/\delta, Y=y/\delta}$  est  $\beta$ -pseudopériodique de période  $L$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} \Pi_\delta(x + L, (x + L)/\delta, y/\delta) &= \Pi_\delta(x + L, x/\delta + Nd, y/\delta) \\ &= \Pi_\delta(x + L, x/\delta, y/\delta) \\ &= \exp(i\beta L) \Pi_\delta(x, x/\delta, y/\delta) \end{aligned}$$

**3.2. Equations du développement asymptotique.** On va écrire les équations du problème (2.23) en supposant que  $u_\delta$  est de la forme (2.53). Pour l'équation à l'intérieur de  $\Omega_\delta^H$ , on utilise les relations

$$(2.60) \quad \partial_x (\Pi_\delta(x, x/\delta, y/\delta)) = (\partial_x \Pi_\delta)(x, x/\delta, y/\delta) + (1/\delta) \partial_X \Pi_\delta(x, x/\delta, y/\delta)$$

$$(2.61) \quad \partial_y (\Pi_\delta(x, x/\delta, y/\delta)) = (1/\delta) \partial_Y \Pi_\delta(x, x/\delta, y/\delta)$$

$$(2.62) \quad \begin{aligned} \partial_x^2 (\Pi_\delta(x, x/\delta, y/\delta)) &= (\partial_x^2 \Pi_\delta)(x, x/\delta, y/\delta) + (2/\delta) \partial_x \partial_X \Pi_\delta(x, x/\delta, y/\delta) \\ &\quad + (1/\delta)^2 \partial_X^2 \Pi_\delta(x, x/\delta, y/\delta) \end{aligned}$$

$$(2.63) \quad \partial_y^2 (\Pi_\delta(x, x/\delta, y/\delta)) = (1/\delta)^2 \partial_Y^2 \Pi_\delta(x, x/\delta, y/\delta)$$

En utilisant les développements (2.54) et (2.55), l'équation dans  $\Omega_0^H$  et en identifiant les coefficients des mêmes puissances de  $\delta$  dans les deux membres, on arrive aux équations

$$(2.64) \quad \Delta_{XY} \Pi_0(x, X, Y) = 0$$

$$(2.65) \quad \Delta_{XY} \Pi_1(x, X, Y) + 2\partial_x \partial_X \Pi_0(x, X, Y) = 0$$

$$(2.66) \quad \begin{aligned} \Delta_{XY} \Pi_{m+2}(x, X, Y) + 2\partial_x \partial_X \Pi_{m+1}(x, X, Y) + \partial_x^2 \Pi_m(x, X, Y) \\ + k^2 \Pi_m(x, X, Y) + \Delta_{xy} u_m^e(x, y) + k^2 u_m^e(x, y) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$



On sépare les équations en variables lentes et rapides en (2.66) en faisant tendre  $Y \rightarrow \infty$  et en utilisant la condition (2.59)

(2.67)

$$\Delta_{XY}\Pi_{m+2}(x, X, Y) + 2\partial_x\partial_X\Pi_{m+1}(x, X, Y) + (\partial_x^2 + k^2)\Pi_m(x, X, Y) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(2.68) \quad \Delta_{xy}u_m(x, y) + k^2u_m(x, y) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

La variable rapide ne peut pas voir la condition aux limites en  $\{y = H\}$ , qui est à l'extérieur de la couche limite. On a ainsi simplement

$$(2.69) \quad \partial_y(u_0^e - u^{\text{inc}}) + S((u_0^e - u^{\text{inc}})(\cdot, H)) = 0 \text{ pour } y = H$$

$$(2.70) \quad \partial_y u_m^e + S(u_m^e(\cdot, H)) = 0 \text{ pour } y = H \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Mais le véritable intérêt de la décomposition (2.53), c'est son adaptation à la prise en compte de la condition aux limites

$$(2.71) \quad u_\delta^e(x, \delta s(x, X)) + \Pi_\delta(x, X, s(x, X)) = 0$$

Comme, par développement de Taylor,

(2.72)

$$\delta^m u_m^e(x, \delta s(x, X)) = \delta^m u_m^e(x, 0) + \delta^{m+1} \frac{s}{1!} \partial_y u_m^e(x, 0) + \dots + \delta^{m+j} \frac{s^j}{j!} \partial_y^j u_m^e(x, 0) + \mathcal{O}(\delta^{j+1})$$

$u_m^e(x, \delta s)$  contribue au coefficient de  $\delta^n$  si  $\ell = n - m \geq 0$  par le terme  $(s^\ell / \ell!) \partial_y^\ell u_{n-\ell}^e(x, 0)$ .

Nous noterons désormais  $s$  pour  $s(x, X)$  pour simplifier la notation. C'est donc la condition aux limites qui couple le développement en zone externe et les termes de couche limite

$$(2.73) \quad \Pi_m(x, X, s) + u_m^e(x, 0) + s \partial_y u_{m-1}^e(x, 0) + \dots + \frac{s^m}{m!} \partial_y^m u_0^e(x, 0) = 0$$

**3.3. Problèmes aux limites en variables rapides.** Les problèmes aux limites en variables lentes sont du même type que ceux ci-dessus relatifs à la diffraction par une surface rugueuse sauf qu'ils ne seront pas posés avec une frontière fortement oscillante. Nous nous concentrons ainsi sur les problèmes aux limites à variables rapides.

C'est les problèmes aux limites en variables rapides qui font généralement que c'est difficile d'établir l'existence du développement asymptotique dans un problème à couche limite. La difficulté vient du fait qu'il faut traiter des problèmes posés en domaine non

borné qui ne peuvent être complètement traités par une formulation variationnelle. Rappelons le type de ceux qui nous concernent ici

$$(2.74) \quad \begin{cases} -\Delta_{XY}\Pi_m(x, X, Y) = F_m(x, X, Y) \text{ pour } Y > s(x, X) \\ X \rightarrow \Pi_m(x, X, Y) \text{ est périodique de période } d \\ \Pi_m(x, X, s(x, X)) = G_m(x, s(x, X)) \\ \lim_{Y \rightarrow +\infty} \Pi_m(x, X, Y) = 0 \end{cases}$$

avec  $F_m$  donné à l'aide des termes précédemment déterminés  $\Pi_{m-1}$  et  $\Pi_{m-2}$ , comme l'indique (2.67) et  $g_m(x, s(x, X))$  s'exprimant en fonction de  $u_m^e(x, 0), \dots, \partial_y^m u_0^e(x, 0)$  comme cela est requis dans (2.73).

Comme on peut le voir à partir de (2.74), la variable  $x$  joue le rôle d'un paramètre dont dépendent les données, induisant une dépendance analogue sur les solutions. Elle ne participe en rien à la résolution. C'est pourquoi nous la sous-entendrons dans la suite pour faciliter les notations. Nous chercherons donc la solution des problèmes en variables rapides sous la forme

$$(2.75) \quad \begin{cases} -\Delta_{XY}\Pi(X, Y) = F(X, Y) \text{ pour } Y > s(X) \\ X \rightarrow \Pi(X, Y) \text{ est périodique de période } d \\ \Pi(X, s(X)) = G(s(X)) \\ \lim_{Y \rightarrow +\infty} \Pi(X, Y) = 0 \end{cases}$$

où  $X \rightarrow s(X)$  est une fonction régulière, périodique de période  $d$ , à valeurs dans  $[0, 1]$ .

Pour trouver une solution au problème (2.74), nous utiliserons une formulation variationnelle et une étude du comportement de cette solution lorsque  $Y \rightarrow \infty$ .

Nous commençons par la formulation variationnelle et démontrons d'abord le lemme préparatoire suivant.

LEMME 2.7 (Inégalité de Hardy). *L'inégalité suivante est vérifiée pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$*

$$(2.76) \quad \int_0^\infty \tau^{-2} |\varphi(\tau)|^2 d\tau \leq 4 \int_0^\infty |\varphi'(\tau)|^2 d\tau$$

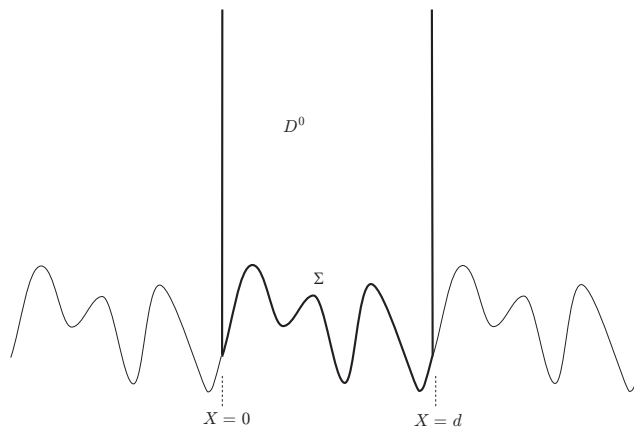


FIG. 2.5. Cellule élémentaire relative aux variations en variables rapides

DÉMONSTRATION. On a

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \tau^{-2} |\varphi(\tau)|^2 d\tau &= \int_0^\infty (-\tau^{-1})' |\varphi(\tau)|^2 d\tau \\
 &= [-\tau^{-1} |\varphi(\tau)|^2]_0^\infty + \int_0^\infty \tau^{-1} (\varphi \overline{\varphi'} + \varphi' \overline{\varphi}) d\tau \\
 &= \int_0^\infty 2\tau^{-1} \Re(\varphi \overline{\varphi'}) d\tau
 \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet alors de majorer le second membre par

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty 2\tau^{-1} \Re(\varphi \overline{\varphi'}) d\tau &\leq 2 \int_0^\infty \tau^{-2} |\varphi| |\varphi'| d\tau \\
 &\leq 2 \left( \int_0^\infty \tau^{-2} |\varphi(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \left( \int_0^\infty |\varphi'(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

D'où le résultat en simplifiant par  $(\int_0^\infty \tau^{-2} |\varphi(\tau)|^2 d\tau)^{1/2}$ . □

Notons par

$$(2.77) \quad D = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 ; Y > s(X)\}$$

dont une cellule élémentaire est donnée par la figure 2.5. Nous noterons aussi par  $\Sigma$  sa frontière

$$(2.78) \quad \Sigma = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 ; Y = s(X)\}$$

On peut alors introduire l'espace à poids auquel va appartenir la solution variationnelle

$$(2.79) \quad W^1(D) = \{v \in \mathcal{D}'(D) ; X \rightarrow v(X, Y) \text{ est périodique de période } d, \\ (1 + Y^2)^{-1/2}v \in L^2(D^0) \text{ et } \nabla_{XY}v \in L^2(D^0)\}$$

où  $D^\ell = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 ; \ell < X < \ell + d, Y > s(X)\}$

La proposition suivante peut être établie à l'aide des techniques usuelles utilisées dans l'étude des espaces de Sobolev.

PROPOSITION 2.2. *L'espace  $W^1(D)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$(2.80) \quad (v, w)_{W^1(D)} = \int_{D^0} (\nabla_{XY}v \cdot \overline{\nabla_{XY}w} + (1 + Y^2)^{-1}v\bar{w}) dXdY$$

et le sous-espace

$$(2.81) \quad W_0^1(D) = \{v \in W^1(D) ; v|_\Sigma = 0\}$$

coïncide avec l'adhérence de l'espace des éléments  $\varphi$  de  $W^1(D)$  qui sont dans  $C^\infty(D)$ , sont à support borné en  $Y$  et sont identiquement nuls au voisinage de  $\Sigma$ .

Nous nous concentrons sur la proposition suivante qui étend l'inégalité de Poincaré aux domaines  $D$  ci-dessus non bornés en  $Y$  qui nécessite l'introduction de l'espace à poids.

PROPOSITION 2.3. *La semi-norme*

$$(2.82) \quad |v|_{1, D^0} = \left( \int_{D^0} |\nabla_{XY}v|^2 dXdY \right)^{1/2}$$

est une norme sur  $W_0^1(D)$  équivalente à la norme induite par celle de  $W^1(D)$ .

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que  $v$  est dans  $C^\infty(D)$ , est à support borné en  $Y$  et est identiquement nul au voisinage de  $\Sigma$ . En remarquant que  $Y^2/(1 + Y^2) \leq 1$  et en utilisant l'inégalité de Hardy ci-dessus, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{1 + Y^2} |v(X, Y)|^2 dY &\leq \int_0^\infty \frac{Y^2}{1 + Y^2} \frac{1}{Y^2} |v(X, Y)|^2 dY \\ &\leq \int_0^\infty \frac{1}{Y^2} |v(X, Y)|^2 dY \leq 4 \int_0^\infty |\partial_Y v(X, Y)|^2 dY \\ &\leq 4 \int_0^\infty |\nabla_{XY}v(X, Y)|^2 dY \end{aligned}$$

La fin de la démonstration s'obtient alors simplement par intégration en  $X$  et en étendant cette inégalité par densité à tous les  $v$  dans  $W_0^1(D)$ .  $\square$

On peut alors énoncer le théorème fondamental qui assure l'existence et l'unicité d'une solution pour les problèmes en variables rapides.

**THÉORÈME 2.2** (Existence-unicité des problèmes en variables rapides). *Soit  $F \in \mathcal{C}^\infty(\overline{D})$ , périodique de période  $d$  en  $X$ , vérifiant*

$$(2.83) \quad \Delta_{XY}^{m-1} F = 0 \text{ dans } D$$

et

$$(2.84) \quad |F(X, Y)| \leq c_1 e^{-\gamma_1 Y}$$

où  $c_1$  et  $\gamma_1$  deux constantes  $> 0$  indépendantes de  $Y$ . Alors, pour  $G$  dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , le problème

$$(2.85) \quad \begin{cases} -\Delta_{XY} \Pi = F \\ \Pi(X, s(X)) = G(s(X)) \end{cases}$$

admet une solution et une seule dans  $\mathcal{C}^\infty(\overline{D})$ , périodique de période  $d$  en  $X$ , et il existe une constante  $\Pi^\infty$  et deux constantes  $c_2$  et  $\gamma_2$  strictement positives telles que

$$(2.86) \quad |\Pi(X, Y) - \Pi^\infty| \leq c_2 e^{-\gamma_2 Y}$$

avec des comportements du même type sur les dérivées  $\partial_X^m \partial_Y^n \Pi$ .

**DÉMONSTRATION.** Soit une fonction de troncature  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  identique à 1 sur l'intervalle  $[0, 1]$ . En prenant comme inconnue la fonction  $(X, Y) \rightarrow U(X, Y) = \Pi(X, Y) - \chi(y)G(s(X))$ , on se ramène au cas d'une condition aux limites homogène sur  $\Sigma$

$$(2.87) \quad \begin{cases} -\Delta_{XY} U = \tilde{F} \text{ dans } D \\ U = 0 \text{ sur } \Sigma \end{cases}$$

avec

$$(2.88) \quad \begin{aligned} \tilde{F}(X, Y) = & F(X, Y + \chi''(Y)G(s(X)) + 2\chi'(Y)G'(s(x))s'(X) \\ & + \chi(Y) (G''(s(X))(s')^2(X) + G'(s(X))s''(X)) \end{aligned}$$

La condition (2.84) montre que  $\tilde{F} \in (W_0^1(D))'$ . Il s'ensuit que le problème (2.87) admet la formulation variationnelle

$$(2.89) \quad \begin{cases} U \in W_0^1(D), \forall V \in W_0^1(D) \\ a(U, V) = LV \end{cases}$$

avec

$$a(U, V) = \int_{D^0} \nabla U \cdot \nabla V \, dXdY, \quad LV = \int_{D^0} \tilde{F}V \, dXdY$$

La proposition 2.3 assure que la forme bilinéaire  $a$  est coercive sur  $W_0^1(D)$ . Le théorème de Lax-Milgram assure donc l'existence et l'unicité d'une solution.

Pour établir la seconde partie du théorème, on utilise d'abord les estimations elliptiques usuelles qui assurent que  $\Pi$  est dans  $C^\infty(\bar{D})$ . On peut ainsi développer  $X \rightarrow \Pi(X, Y)$  en série de Fourier

(2.90)

$$\Pi(X, Y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \Pi_n(Y) \exp(2i\pi nX/d) \quad \Pi_m(Y) = \frac{1}{d} \int_0^d \Pi(X, Y) \exp(-2i\pi nX/d) dX$$

Comme  $\Delta_{XY}^{m-1} F = 0$ ,  $\Delta_{XY}^m \Pi = 0$ . On obtient alors que les coefficients de Fourier vérifient l'équation différentielle

$$(\partial_Y^2 - 4n^2\pi^2/d^2) \Pi_n(Y) = 0$$

dont la solution générale est donnée par

$$\Pi_n(Y) = p_n(Y) \exp(-2|n|\pi Y/d)$$

où  $p_m(Y)$  est un polynôme de degré  $\leq m-1$ . Comme  $\Pi \in W^1(D)$ ,  $p_0(Y)$  est réduit à une constante qu'on notera  $\Pi^\infty$ .

Soit  $Y_0 > 1$ . Fixons  $\eta > 0$  tel que  $Y_0 - \eta > 0$ . On fait appel aux estimations elliptiques à l'intérieur, une fois pour  $\Delta_{XY}^{m-1} F = 0$  et la seconde pour  $-\Delta_{XY} \Pi = F$  sur le domaine  $]-\eta, d + \eta[ \times ]Y_0 - \eta, Y_0 + \eta[$ , pour établir que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (1 + n^2)^{m-1} |p_n^{(j)}(Y_0)|^2 \leq c \|F\|_{0, D^0}$$

On écrit alors  $p_n(Y)$  à l'aide de son développement de Taylor au point  $Y_0$

$$p_n(Y) = \sum_{j=0}^{m-1} p_n^{(j)}(Y_0) (Y - Y_0)^j$$

On arrive alors à

$$|\Pi(X, Y) - \Pi^\infty| \leq \sum_{n \neq 0} \sum_{j=0}^{m-1} |p_n^{(j)}(Y_0)| (Y - Y_0)^j \exp(-\pi(Y - Y_0)/d), \quad Y \geq Y_0$$

Ce qui établit le théorème. □

**3.4. Développement à l'ordre 0.** Les termes d'ordre 0 vérifient

$$(2.91) \quad \begin{cases} \Delta_{XY}\Pi_0 = 0 \\ \lim_{Y \rightarrow \infty} \Pi_0(x, X, Y) = 0 \end{cases}$$

$$(2.92) \quad \begin{cases} \Delta_{xy}u_0^e + k^2u_0^e = 0 \\ \partial_y u_0^e + S(u_0^e(\cdot, H)) = \partial_y u^{\text{inc}} + S(u^{\text{inc}}(\cdot, H)) \text{ pour } Y = H \end{cases}$$

$$(2.93) \quad \Pi_0(x, X, s(X)) + u_0^e(x, 0) = 0$$

La fonction  $u_0^e(x, 0)$  est une constante en  $X$  non encore déterminée. Par unicité de la solution du problème (2.91), établie par le théorème 2.2, on obtient la relation suivante entre  $\Pi_0$  et  $u_0^e(x, 0)$

$$(2.94) \quad \Pi_0(x, X, Y) + u_0^e(x, 0) = 0$$

La condition  $\lim_{Y \rightarrow \infty} \Pi_0(x, X, Y) = 0$  montre alors que  $u_0^e$  vérifie

$$(2.95) \quad u_0^e(x, 0) = 0$$

Cette solution correspond ainsi à celle où l'effet des rugosités est complètement négligé. Comme  $\Pi_0 = 0$ , il n'y a pas de termes de couche limite à l'ordre 0.

On pourra, à titre d'exercice, utiliser le théorème de stabilité ci-dessus pour démontrer directement que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} u_\delta = u_0^e$ . Le développement asymptotique nous a permis de déterminer cette limite sans aucun passage à la limite.

**3.5. Développement à l'ordre 1.** On particularise les équations générales ci-dessus à l'ordre 1

$$(2.96) \quad \begin{cases} \Delta_{XY}\Pi_1 = 0 \\ \lim_{Y \rightarrow \infty} \Pi_1(x, X, Y) = 0 \end{cases}$$

$$(2.97) \quad \begin{cases} \Delta_{xy}u_1^e + k^2u_1^e = 0 \\ \partial_y u_1^e + S(u_1^e(\cdot, H)) = 0 \text{ pour } Y = H \end{cases}$$

$$(2.98) \quad \Pi_1(x, X, s) + u_1^e(x, 0) + s\partial_y u_0^e(x, 0) = 0$$

Le théorème 2.2 nous assure de l'existence et de l'unicité d'une fonction  $\Theta_1(x, X, Y)$  telle que

$$(2.99) \quad \begin{cases} \Delta_{XY}\Theta_1 = 0 \\ \Theta_1(x, X, s) = s\partial_y u_0(x, 0) \end{cases}$$

vérifiant

$$(2.100) \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} \Theta_1(x, X, Y) = \Theta_1^\infty(x)$$

La solution de ce système peut être effectuée indépendamment de  $u_0^e$ . Introduisons la fonction  $\alpha_1$ , dont l'existence est assurée par le théorème 2.2, solution du problème

$$(2.101) \quad \begin{cases} \Delta_{XY}\alpha_1(x, X, Y) = 0 \\ \alpha_1(x, X, Y) = s(x, X) \end{cases}$$

qui vérifie donc

$$(2.102) \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} \alpha_1(x, X, Y) = h_1(x)$$

On a alors

$$(2.103) \quad \Theta_1^\infty(x) = h_1(x)\partial_y u_0^e(x, 0)$$

On cherche alors  $\Pi_1$  sous la forme

$$(2.104) \quad \Pi_1(x, X, Y) = -u_1^e(x, 0) - \alpha_1(x, X, Y)\partial_y u_0^e(x, 0)$$

où  $u_1^e(x, 0)$  est une constante en  $X$  et  $Y$  non encore déterminée. La condition

$$(2.105) \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} \Pi_1(x, X, Y) = 0$$

donne alors

$$(2.106) \quad u_1^e(x, 0) = -h_1(x)\partial_y u_0^e(x, 0)$$

qui avec les conditions (2.97) permet de déterminer  $u_1^e$ .



**3.6. Termes à l'ordre  $n$ .** Les équations générales sont maintenant

$$(2.107) \quad \begin{cases} \Delta_{XY}\Pi_n = -2\partial_x\partial_X\Pi_{n-1} - (\partial_x^2 + k^2)\Pi_{n-2} \\ \lim_{Y \rightarrow \infty} \Pi_n(x, X, Y) = 0 \end{cases}$$

$$(2.108) \quad \begin{cases} \Delta_{xy}u_n^e + k^2u_n^e = 0 \\ \partial_y u_n^e + S(u_n^e(\cdot, H)) = 0 \text{ pour } Y = H \end{cases}$$

$$(2.109) \quad \Pi_n(x, X, Y) + u_n^e(x, 0) + \sum_{\ell=1}^n \frac{s^\ell}{\ell!} \partial_y u_{n-\ell}^e(x, 0) = 0$$

Le théorème 2.2 nous assure de l'existence et de l'unicité d'une fonction  $\Theta_n(x, X, Y)$  telle que

$$(2.110) \quad \begin{cases} \Delta_{XY}\Theta_n = -2\partial_x\partial_X\Pi_{n-1} - (\partial_x^2 + k^2)\Pi_{n-2} \\ \Theta_n(x, X, s) = \sum_{\ell=1}^n \frac{s^\ell}{\ell!} \partial_y u_{n-\ell}^e(x, 0) \end{cases}$$

vérifiant

$$(2.111) \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} \Theta_n(x, X, Y) = \Theta_n^\infty(x)$$

On cherche alors  $\Pi_n$  sous la forme

$$(2.112) \quad \Pi_n(x, X, Y) = -u_n^e(x, 0) - \Theta_n(x, X, Y)$$

où  $u_n^e(x, 0)$  n'est pas encore déterminée. On détermine cette constante en  $X$  et  $Y$  à l'aide de la condition

$$(2.113) \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} \Pi_n(x, X, Y) = 0$$

qui conduit à

$$(2.114) \quad u_n^e(x, 0) = -\Theta_n^\infty(x)$$

Cette condition avec les équations (2.108) assurent l'existence et l'unicité de  $u_n$ . Nous avons ainsi démontré le théorème suivant.

**THÉORÈME 2.3.** *Les conditions (2.107), (2.108) et (2.109) permettent de déterminer de proche en proche tous les termes  $u_0^e, \Pi_0, \dots, u_n^e, \Pi_n$  du développement asymptotique.*

#### 4. Convergence du développement asymptotique

Nous allons, dans cette section, établir une majoration de l'erreur

$$(2.115) \quad \varepsilon_{n\delta} = u_\delta - \left( (u_0^e + \chi \widetilde{\Pi}_0) + \cdots + \delta^n (u_n^e + \chi \widetilde{\Pi}_n) \right)$$

commise en approchant la solution  $u_\delta$  du problème (2.23) par son développement à deux échelles

$$(2.116) \quad (x, y) \rightarrow u_0^e(x, y) + \chi(y) \widetilde{\Pi}_0(x, y) + \delta \left( u_1^e(x, y) + \chi(y) \widetilde{\Pi}_1(x, y) \right) + \cdots + \delta^n \left( u_n^e(x, y) + \chi(y) \widetilde{\Pi}_n(x, y) \right)$$

où nous avons noté  $\widetilde{\Pi}_m(x, y) = \Pi_m(x, x/\delta, y/\delta)$  et  $y \rightarrow \chi(y)$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  vérifiant

$$(2.117) \quad \chi'(y) \leq 0, \quad \chi(y) = 1 \text{ pour } y \leq h \text{ et } \chi(y) = 0 \text{ pour } y > H - h$$

où  $h > 0$  est fixé de sorte que

$$(2.118) \quad \delta_0 < h < H - h$$

où  $\delta_0$  est le paramètre intervenant ci-dessus dans le résultat de stabilité. Nous avons introduit  $\Pi_0(x, X, Y) = 0$  pour homogénéiser la notation. C'est en fait l'approximation du champ hors couche limite

$$(2.119) \quad e_{n\delta} = u_\delta - (u_0^e + \cdots + \delta^n u_n^e)$$

pour

$$(2.120) \quad y > h$$

qui nous intéresse. Nous allons voir qu'il suffit d'établir des estimations de convergence sur  $\varepsilon_{n\delta}$ , qui s'améliorent juste avec l'ordre  $n$ , pour en déduire d'autres sur  $e_{n\delta}$  pour  $y > h$  qui sont optimales. L'erreur  $\varepsilon_{n\delta}$  sera dite complète par opposition à  $e_{n\delta}$  qu'on désignera comme l'erreur externe. Pour estimer l'erreur complète, nous allons borner son résidu relatif à l'équation d'Helmholtz. Nous estimerons ensuite l'écart qu'elle engendre sur la vérification de la condition aux limites. Le théorème de stabilité nous en donnera alors une estimation.

**4.1. Résidu relatif à l'erreur complète.** On a comme ci-dessus

$$(2.121) \quad \Delta_{xy} (\chi \widetilde{\Pi}_m) = \chi \left( \frac{1}{\delta^2} \widetilde{\Delta_{XY} \Pi_m} + \frac{1}{\delta} 2 \partial_x \widetilde{\partial_X \Pi_m} + \widetilde{\partial_x^2 \Pi_m} \right) + \frac{2}{\delta} \chi' \widetilde{\partial_Y \Pi_m} + \chi'' \widetilde{\Pi_m}$$

Ceci nous permet d'obtenir directement l'expression du résidu

$$(2.122) \quad (\Delta_{xy} + k^2) \varepsilon_{n\delta} = -\chi \left( \sum_{m=0}^n \delta^{m-2} \widetilde{\Delta_{XY} \Pi_m} + \delta^{m-1} 2 \partial_x \widetilde{\partial_X \Pi_m} + \delta^m (\partial_x^2 + k^2) \widetilde{\Pi_m} \right) + \\ - \sum_{m=0}^n \delta^{m-1} 2 \chi' \widetilde{\partial_Y \Pi_m} + \delta^m \chi'' \widetilde{\Pi_m}$$

Pour réduire cette expression, on la réécrit en factorisant les différentes puissances de  $\delta$  après avoir observé que  $\Pi_0 = 0$  et  $\Delta_{XY} \Pi_1 = 0$

$$(2.123) \quad (\Delta_{xy} + k^2) \varepsilon_{n\delta} = -\chi \left( \sum_{m=0}^{n-2} \delta^m \left( \widetilde{\Delta_{XY} \Pi_{m+2}} + 2 \partial_x \widetilde{\partial_X \Pi_{m+1}} + (\partial_x^2 + k^2) \widetilde{\Pi_m} \right) \right) \\ - \chi \delta^{n-1} \left( 2 \partial_x \widetilde{\partial_X \Pi_n} + (\partial_x^2 + k^2) \widetilde{\Pi_{n-1}} + \delta (\partial_x^2 + k^2) \widetilde{\Pi_n} \right) \\ - \sum_{m=0}^n \delta^{m-1} 2 \chi' \widetilde{\partial_Y \Pi_m} + \delta^m \chi'' \widetilde{\Pi_m}$$

Les équations (2.67) donnent alors

$$(2.124) \quad (\Delta_{xy} + k^2) \varepsilon_{n\delta} = -\chi \delta^{n-1} \left( 2 \partial_x \widetilde{\partial_X \Pi_n} + (\partial_x^2 + k^2) \widetilde{\Pi_{n-1}} + \delta (\partial_x^2 + k^2) \widetilde{\Pi_n} \right) \\ - \sum_{m=1}^n \delta^{m-1} 2 \chi' \widetilde{\partial_Y \Pi_m} + \delta^m \chi'' \widetilde{\Pi_m}$$

Le lemme suivant permet d'estimer la norme  $L^2$  de ce résidu.

NOTATION 1.

LEMME 2.8. *Il existe une constante  $c$ , indépendante de  $\delta$ , telle que*

$$(2.125) \quad |(\Delta_{xy} + k^2) \varepsilon_{n\delta}|_{0, \Omega_\delta^{0,H}} \leq c \delta^{n-1/2}$$

DÉMONSTRATION. Dans toute la démonstration,  $c$  désignera diverses constantes indépendantes des variables  $x$ ,  $X$ ,  $Y$  et de  $\delta$ .

Les termes du type  $\chi \widetilde{\Theta}$  où  $\Theta$  est une fonction de  $x$ ,  $X$  et  $Y$  satisfaisant

$$(2.126) \quad |\Theta(x, X, Y)| \leq c e^{-\gamma Y}$$

avec  $\gamma > 0$ , vérifient

$$(2.127) \quad \int_{\Omega_\delta^{0,H}} |\Theta(x, x/\delta, y/\delta)|^2 dx dy \leq c \int_0^H e^{-2\gamma y/\delta} dy = c \frac{\delta}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma H/\delta}) \leq c \frac{\delta}{2\gamma}$$

On a dès lors

$$(2.128) \quad \left| \chi \delta^{n-1} \left( 2\widetilde{\partial_x \partial_X \Pi_n} + (\partial_x^2 + k^2) \widetilde{\Pi_{n-1}} + \delta(\partial_x^2 + k^2) \widetilde{\Pi_n} \right) \right|_{0, \Omega_\delta^{0,H}} \leq c \delta^{n-1/2}$$

Pour estimer les termes  $\chi' \widetilde{\partial_Y \Pi_m}$  et  $\chi'' \widetilde{\Pi_m}$ , il suffit de majorer une fonction  $\Theta$  du type précédent pour  $y > h$ , soit

$$(2.129) \quad |\Theta(x, x/\delta, y/\delta)| \leq c e^{-\gamma h/\delta}$$

Comme  $e^{-\gamma h/\delta} = o(\delta^\infty)$ , on obtient directement le lemme.  $\square$

**4.2. Résidu relatif à la condition aux limites.** On rappelle que pour condenser la notation, on utilise  $s$  pour noter  $s(x, x/\delta)$ . L'erreur  $\varepsilon_{n\delta}$  ne vérifie la condition de Dirichlet sur  $\Gamma_\delta$ . Pour estimer l'erreur induite par cet écart à la condition aux limites exacte, nous allons construire  $w_{n\delta}$  tel que

$$(2.130) \quad w_{n\delta}(x, \delta s) = \varepsilon_{n\delta}(x, \delta s)$$

La norme de  $w_{n\delta}$  dans  $H_{\#}^1(\Omega_\delta^H)$  mesurera cette erreur. Auparavant, on explicite  $\varepsilon_{n\delta}(x, \delta s)$

$$(2.131) \quad \varepsilon_{n\delta}(x, \delta s) = u_\delta(x, \delta s) - \sum_{m=0}^n \delta^m (u_m^e(x, \delta s) + \Pi_m(x, x/\delta, s))$$

En utilisant la condition aux limites sur  $u_\delta$  et (2.73), on arrive à

$$(2.132) \quad \varepsilon_{n\delta}(x, \delta s) = \sum_{m=0}^n \delta^m \left( u_m^e(x, 0) + s \partial_y u_{m-1}^e(x, 0) + \cdots + \frac{s^m}{m!} \partial_y^m u_0^e(x, 0) - u_m^e(x, \delta s) \right)$$

En réordonnant différemment les différents termes, on peut écrire cette somme sous la forme

$$(2.133) \quad \varepsilon_{n\delta}(x, \delta s) = \sum_{m=0}^n \delta^m \left( \sum_{\ell=0}^{n-m} \frac{(\delta s)^\ell}{\ell!} \partial_y^\ell u_m^e(x, 0) - u_m^e(x, \delta s) \right)$$

Pour construire  $w_{n\delta}$ , on utilise le lemme suivant qui est une conséquence directe de la formule de Taylor avec reste intégral.

**LEMME 2.9.** *Pour tout entier  $n \geq 0$  et tout entier  $m$  tel que  $0 \leq m \leq n$ , il existe une fonction  $R_{nm}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$  tel que*

$$(2.134) \quad u_m^e(x, y) = \sum_{\ell=0}^{n-m} \frac{y^\ell}{\ell!} \partial_y^\ell u_m^e(x, 0) - y^{n+1-m} R_{nm}(x, y)$$

DÉMONSTRATION. La formule de Taylor avec reste intégral donne

$$u_m^e(x, y) = \sum_{\ell=0}^{n-m} \frac{y^\ell}{\ell!} \partial_y^\ell u_m^e(x, 0) + \int_0^y \frac{(y-z)^{n-m}}{(n-m)!} \partial_y^{n+1-m} u_m^e(x, z) dz$$

Il suffit de faire le changement de variable  $t = z/y$  pour obtenir (2.134) avec

$$(2.135) \quad R_{nm}(x, y) = - \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-m}}{(n-m)!} \partial_y^{n+1-m} u_m^e(x, yt) dt$$

Il suffit de remarquer que l'on peut dériver indéfiniment sous le signe somme dans (2.135) pour obtenir le lemme.  $\square$

On est en mesure alors de construire le relèvement  $w_{n\delta}$  de  $\varepsilon_{n\delta}|_{\Gamma_\delta}$  annoncé ci-dessus. Pour cela, on considère une fonction  $Y \rightarrow \eta(Y)$  dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  vérifiant

$$(2.136) \quad \eta(Y) = Y \text{ pour } Y \leq 1 \text{ et } \eta(Y) = 0 \text{ pour } Y \geq 2$$

LEMME 2.10. *Pour  $\delta \leq \delta_0/2$ , la fonction*

$$(2.137) \quad w_{n\delta}(x, y) = \delta^{n+1} \sum_{m=0}^n \eta^{n+1-m}(y/\delta) R_{nm}(x, y)$$

*est à support dans  $\overline{\Omega_\delta^h}$  et vérifie (2.130). Sa norme dans  $H_{\#}^1(\Omega_\delta^H)$  est majorée par*

$$(2.138) \quad \|w_{n\delta}\|_{1, \Omega_\delta^0, H} \leq c \delta^{n+1/2}$$

DÉMONSTRATION. Par construction,  $x \rightarrow R_{nm}(x, y)$  est  $\mathcal{C}^\infty$  et  $\beta$ -pseudopériodique de période  $L$ . De plus, on a  $\eta(y/\delta) = 0$  pour  $y/\delta \geq 2$ , ou encore  $y \geq 2\delta$ . Il s'ensuit que, pour  $\delta \leq \delta_0/2$ ,  $\eta(y/\delta) = 0$  pour  $y \geq h \geq \delta_0$ . Comme  $s \leq 1$ , on a ensuite

$$\begin{aligned} w_{n\delta}(x, \delta s) &= \delta^{n+1} \sum_{m=0}^n \eta^{n+1-m}(s) R_{nm}(x, \delta s) = \delta^{n+1} \sum_{m=0}^n s^{n+1-m} R_{nm}(x, \delta s) \\ &= \sum_{m=0}^n \delta^m (\delta s)^{n+1-m} R_{nm}(x, \delta s) \end{aligned}$$

Au vu de (2.134), le dernier membre des égalités précédentes est égal à

$$\sum_{m=0}^n \delta^m (\delta s)^{n+1-m} R_{nm}(x, \delta s) = \sum_{m=0}^n \delta^m \left( \sum_{\ell=0}^{n-m} \frac{(\delta s)^\ell}{\ell!} \partial_y^\ell u_m^e(x, 0) - u_m^e(x, \delta s) \right)$$

soit encore, suite à (2.133),

$$w_{n\delta}(x, \delta s) = \varepsilon_{n\delta}(x, \delta s)$$

Comme  $|\eta(y/\delta)| \leq c$ , on a

$$|w_{n\delta}|_{0, \Omega_\delta^0, H} + |\partial_x w_{n\delta}|_{0, \Omega_\delta^0, H} \leq c \delta^{n+1}$$

Pour la dérivée par rapport à  $y$ , on a

$$\partial_y \eta(y/\delta) = \frac{1}{\delta} \eta'(y/\delta)$$

Il s'ensuit que

$$|\partial_y w_{n\delta}|_{0, \Omega_\delta^{0,H}} \leq c\delta^n \left( \int_0^{2\delta} dy \right)^{1/2}$$

Ceci termine la démonstration du lemme.  $\square$

**4.3. Estimation d'erreur globale.** Comme nous l'avons annoncé plus haut, nous sommes en mesure d'énoncer une estimation d'erreur globale. Cette estimation est loin d'être optimale puisqu'elle n'assure même pas que l'erreur reste bornée à l'ordre 0. La perte d'ordre de convergence est due essentiellement aux termes en variable rapide décrivant le comportement en couche limite. Cependant, la disponibilité de cette estimation à tout ordre permet d'établir des estimations optimales pour le comportement hors couche limite, autrement dit en dehors de la proximité vraiment immédiate de la surface.

**PROPOSITION 2.4** (Estimations globales non optimales). *Il existe une constante  $c_n$  indépendante de  $\delta \leq \delta_0/2$  telle que*

$$(2.139) \quad \left\| u_\delta - \sum_{m=0}^n \delta^m (u_m^e + \widetilde{\Pi}_m) \right\|_{1, \Omega_\delta^{0,H}} \leq c_n \delta^{n-1/2}$$

**DÉMONSTRATION.** Nous avons vu plus haut que  $w_{n\delta}|_{y>h} = 0$ . Il en résulte que  $z_{n\delta} = \varepsilon_{n\delta} - w_{n\delta}$  vérifie

$$(2.140) \quad \begin{cases} z_{n\delta} \in V_\delta, \forall v \in V_\delta, \\ a_\delta(z_{n\delta}, v) + \langle Sz_{n\delta}, v \rangle = L_\delta v \int_{\Omega_\delta^{0,H}} -(\Delta_{xy} \varepsilon_{n\delta} + k^2 \varepsilon_{n\delta}) v dx dy - a_\delta(w_{n\delta}, v) \end{cases}$$

avec

$$L_\delta v = \int_{\Omega_\delta^{0,H}} -(\Delta_{xy} \varepsilon_{n\delta} + k^2 \varepsilon_{n\delta}) v dx dy - a_\delta(w_{n\delta}, v)$$

Les estimations (2.125) et (2.138) donnent alors

$$\sup_{v \in V_\delta, \|v\|_{1, \Omega_\delta^H} \leq 1} |L_\delta v| \leq c\delta^{n-1/2}$$

Le théorème général de stabilité 2.1 assure alors que (2.139) est vérifié.  $\square$

THÉORÈME 2.4 (Estimations optimales hors couche limite). *Pour tout  $h' > h$ , il existe une constante  $c_n$  indépendante de  $\delta \leq \delta_0/2$  telle que*

$$(2.141) \quad \|u_\delta - \sum_{m=0}^n \delta^m u_m^e\|_{1,]0,L[\times]h,h'[} \leq c_n \delta^{n+1}$$

DÉMONSTRATION. Comme  $e_{n\delta} = u_\delta - \sum_{m=0}^n \delta^m u_m^e$  vérifie la condition de radiation

$$\partial_y e_{n\delta}|_{y=H} + S(e_{n\delta}|_{y=H}) = 0$$

il suffit en fait d'établir (2.141) pour  $h' = H$ , étant entendu que  $u_\delta$  et les  $u_m^e$  sont prolongés pour  $y > H$  à l'aide de leur développement en modes de Floquet. L'estimation (2.139) et la décroissance rapide de  $\Pi_m$  en  $y$

$$\widetilde{\Pi}_m|_{y=h} = o(\delta^\infty)$$

donnent

$$\|u_\delta - \sum_{m=0}^{n+2} \delta^m u_m^e\|_{1,]0,L[\times]h,H[} \leq c'_{n+2} \delta^{n+3/2}$$

Il suffit d'utiliser alors l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \|u_\delta - \sum_{m=0}^n \delta^m u_m^e\|_{1,]0,L[\times]h,H[} &\leq \|u_\delta - \sum_{m=0}^{n+2} \delta^m u_m^e\|_{1,]0,L[\times]h,H[} \\ &\quad + \left\| \sum_{m=n+1}^{n+2} \delta^m u_m^e \right\|_{1,]0,L[\times]h,H[} \\ &\leq c'_{n+2} \delta^{n+3/2} \\ &\quad + \delta^{n+1} (\|u_{n+1}^e\|_{1,]0,L[\times]h,H[} + \delta \|u_{n+2}^e\|_{1,]0,L[\times]h,H[}) \end{aligned}$$

pour établir le résultat. □

## 5. Homogénéisation

Après avoir construit la condition homogénéisée à l'ordre 1, nous établirons une estimation d'erreur de la solution obtenue par homogénéisation.

**5.1. Construction de la condition homogénéisée.** Rappelons que  $u_0^e$  est obtenu en négligeant complètement l'effet de la surface oscillante et que  $u_1^e$  peut être déterminé,

grâce à la condition aux limites (2.106), en résolvant le problème

$$(2.142) \quad \begin{cases} u_1^e \text{ } \beta\text{-pseudopériodique de période } L \\ \Delta_{xy} u_1^e + k^2 u_1^e = 0 \text{ pour } 0 < y < H \\ \partial_y u_1^e|_{y=H} + S(u_1^e|_{y=H}) = 0 \\ u_1^e(x, 0) + h_1(x) \partial_y u_0^e(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Pour construire la condition homogénéisée, on forme la condition aux limites en  $y = 0$  vérifiée par  $u_{1\delta}^e = u_0^e + \delta u_1^e$  de sorte que son résidu soit en  $\mathcal{O}(\delta^2)$ . Le procédé est simple et il peut se généraliser à un ordre  $n$  quelconque. On part de la relation (2.106)

$$(2.143) \quad u_1^e(x, 0) + h_1(x) \partial_y u_0^e(x, 0) = 0$$

On multiplie le coefficient de  $u_m^e$  par  $\delta^{1-m}$  (1 est l'ordre de la condition que l'on veut établir), soit ici

$$(2.144) \quad \begin{aligned} u_{1\delta}^e(x, 0) + \delta h_1(x) \partial_x u_{1\delta}^e(x, 0) = \\ \delta(u_1^e(x, 0) + h_1(x) \partial_x u_0^e(x, 0)) + \delta^2 \partial_x u_1^e(x, 0) = \mathcal{O}(\delta^2) \end{aligned}$$

On remplace alors le problème exact (2.23) par le problème homogénéisé (à l'ordre 1)

$$(2.145) \quad \begin{cases} \Delta u_{1\delta}^h + k^2 u_{1\delta}^h = 0 \text{ dans } \Omega_0^H \\ x \rightarrow \exp(-i\beta x) u_{1\delta}^h(x, y) \text{ est } L\text{-périodique} \\ u_{1\delta}^h + \delta h_1(x) \partial_y u_{1\delta}^h = 0 \text{ pour } y = 0 \\ \partial_y (u_{1\delta}^h - u^{\text{inc}})|_{y=H} + S((u_{1\delta}^h - u^{\text{inc}})|_{y=H}) = 0 \end{cases}$$

**5.2. Estimation d'erreur.** Le problème (2.145) admet un développement asymptotique régulier donné par la proposition suivante qu'on peut établir à l'aide des techniques développées ci-dessus.

**PROPOSITION 2.5.** *La solution  $u_{1\delta}^h$  du problème (2.145) admet le développement asymptotique suivant*

$$u_{1\delta}^h = u_0^e + \delta u_1^e + \delta^2 r_{2\delta}$$

avec  $\|r_{2\delta}\|_{1, \Omega_a^{0,H}}$  borné par une constante  $c$  indépendante de  $\delta$ .

On déduit alors de cette proposition le théorème suivant dont la démonstration résulte juste de l'application de l'inégalité triangulaire.



THÉORÈME 2.5. *On a l'estimation d'erreur suivante entre la solution du problème exact (2.23) et celle du problème homogénéisé (2.145) à l'aide d'une constante  $c$ , indépendante de  $\delta \leq \delta_0/2$ ,*

$$(2.146) \quad \|u_\delta - u_{1\delta}^h\|_{1,]0,L[\times]h,h'[} \leq c\delta^2$$

## 6. Commentaires bibliographiques

Pour approfondir les notions d'électromagnétisme, on pourra consulter l'ouvrage de Van Bladel [24] qui en donne un exposé complet, très proche d'un texte mathématique. Pour une introduction au développement en modes de Floquet, on pourra consulter la référence [17]. On pourra trouver un approfondissement de cette question dans l'article de Nédélec et Starling [16]. Le problème de diffraction considéré ici a été introduit dans la thèse de J.-R. Poirier [18] dans le but de modéliser la réflexion d'une onde électromagnétique en polarisation TM par une surface rugueuse. Si on est intéressé par le même type de problème, mais dans le cadre non linéaire, on pourra consulter l'article de Achdou, Pironneau et Valentin [2] où le problème aux limites considéré est relatif aux équations de Navier-Stokes.

Un excellent exposé d'introduction à la théorie variationnelle des problèmes aux limites elliptiques et aux questions d'analyse fonctionnelle qui y sont afférentes se trouve dans le livre de Brezis [4]. Un exposé plus approfondi, mais très abordable, de la théorie elliptique, ainsi qu'une présentation de l'alternative de Fredholm, se trouvent dans la première partie du livre de McLean [15]. Les livres de Chazarain et Piriou [6] et de Taylor [21] présentent des exposés beaucoup plus complets mais plus difficiles d'accès.

L'utilisation de techniques de développements asymptotiques double-échelle pour des problèmes de diffraction a été considérée pour la première fois par Achdou [1] dans le cadre plutôt de la construction de correcteurs. L'approche utilisée ici est celle décrite dans le livre de [25]. Les constructions de conditions aux limites effectives à partir de l'analyse asymptotique provient de la thèse de Poirier [18]. On pourra aussi trouver un exposé plus synthétique avec des expérimentations numériques dans la référence [20]. Les résultats théoriques d'estimation d'erreur sont nouveaux. Ils feront l'objet d'une prochaine publication [19] qui inclura aussi des expérimentations numériques avec la condition d'ordre

2. Enfin, signalons l'article de Caloz, Costabel, Dauge et Vial [5], qui est plus difficile d'accès, mais qui est exemplaire dans la prise en compte de singularités de problèmes aux limites elliptiques dans une analyse asymptotique par l'intermédiaire d'une construction de correcteurs de couche limite.

## Propagation d'une onde dans un domaine comportant une fente

Nous présentons un problème modèle caractérisant la propagation d'une onde dans un domaine comportant une fente. Nous construirons un développement asymptotique de sa solution à l'aide d'une technique de développements asymptotiques raccordés. Des estimations d'erreur, concluant l'étude, permettent d'assurer une base théorique rigoureuse aux développements obtenus.

### 1. Le problème aux limites

Nous introduisons d'abord le problème aux limites modélisant le phénomène physique que nous considérons. Des hypothèses physiques simplificatrices nous permettront alors d'utiliser le théorème de Lax-Milgram pour démontrer un résultat d'existence-unicité pour sa solution ainsi que les propriétés de stabilité intervenant dans les estimations d'erreur relatives au développement asymptotique.

**1.1. Le problème physique et sa modélisation.** Nous considérons une onde bidimensionnelle en régime harmonique se propageant dans le demi-plan des  $x > 0$ , limité donc par le mur  $\{x = 0\}$ . L'onde peut cependant pénétrer dans une fente d'épaisseur  $\pi\delta$  de sorte que le domaine  $\Omega_\delta$  où stationne effectivement l'onde peut être décrit à l'aide de la décomposition sans recouvrement en deux sous-domaines : le demi-plan

$$(3.1) \quad \Omega_\infty = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$$

et la fente

$$(3.2) \quad F_\delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0 \text{ et } 0 < y < \pi\delta\}$$

Le paramètre  $\delta$ , destiné à tendre vers 0, décrit la faible épaisseur de la fente. La figure FIG. 3.1 schématise le domaine complet, demi-plan et fente, où se propage l'onde.

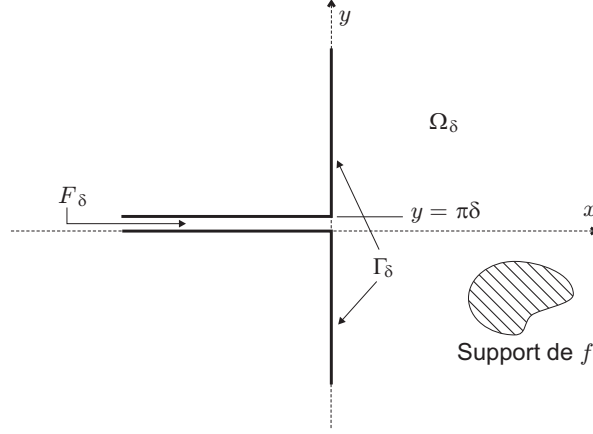


FIG. 3.1. Schéma du mur avec fente limitant le domaine de propagation  $\Omega_\delta$

Pour éviter les difficultés relatives aux formulations non coercives et à la description de conditions de radiation pour le demi-plan  $\Omega_\infty$  et la fente  $F_\delta$ , nous supposons que le milieu de propagation est dissipatif et que l'onde est produite par une distribution  $f$  dans  $L^2(\Omega_\delta)$  et **à support compact** dans le demi-plan  $\Omega_\infty$ .

La description d'un milieu dissipatif est effectuée généralement en supposant que le nombre d'onde  $k$  est donné par

$$(3.3) \quad k = k_r + ik_i$$

avec  $k_r$  et  $k_i$  vérifiant

$$(3.4) \quad 0 < k_i < k_r$$

Cette simplification n'affecte en rien la généralité du développement asymptotique. Le cas d'un milieu sans pertes peut être obtenu par les adaptations standard permettant de passer du cas dissipatif au cas sans dissipation en passant à la limite en faisant tendre  $k_i$  vers 0 : c'est le **principe d'absorption limite**.

Compte tenu de ce qui précède, et en supposant que **la condition de réflexion** des ondes au bord  $\Gamma_\delta$  du domaine de propagation  $\Omega_\delta$  est donnée par une **condition de Neumann**, le phénomène de propagation est régi par le problème aux limites suivant :

$$(3.5) \quad \begin{cases} u_\delta \in H^1(\Omega_\delta) \\ \Delta u_\delta + k^2 u_\delta = -f \text{ dans } \Omega_\delta \\ \partial_{\mathbf{n}} u_\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_\delta \end{cases}$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire extérieure à  $\Omega_\delta$ .

**REMARQUE 3.1.**

1. *Le cas non dissipatif s'obtient pour  $k_i = 0$ . La solution n'est plus alors dans  $H^1(\Omega_\delta)$  (ni même dans  $L^2(\Omega_\delta)$ ) mais dans l'espace de Fréchet (i.e., dont la topologie est définie par une famille de semi-normes)*

$$(3.6) \quad H_{loc}^1(\overline{\Omega_\delta}) = \{v \in \mathcal{D}'(\Omega_\delta) ; \phi v \in H^1(\Omega_\delta), \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)\}$$

*La condition à l'infini, traduite par l'appartenance à  $H^1(\Omega_\delta)$ , doit alors être remplacée par une condition de radiation dans le demi-plan  $\Omega_\infty$  et dans la fente  $F_\delta$ .*

2. *La condition aux limites de Dirichlet  $u_\delta = 0$  sur  $\Gamma_\delta$  est moins intéressante car elle ne donne pas lieu à une pénétration de l'onde dans  $F_\delta$ .*

**1.2. Formulation variationnelle et stabilité par rapport à l'épaisseur de la fente.** La formule de Green permet d'établir immédiatement que le problème (3.5) admet la formulation variationnelle équivalente

$$(3.7) \quad \begin{cases} u_\delta \in H^1(\Omega_\delta), \forall v \in H^1(\Omega_\delta), \\ a_\delta(u_\delta, v) = \int_{\Omega_\infty} f v \, dx dy \end{cases}$$

avec

$$(3.8) \quad a_\delta(u, v) = \int_{\Omega_\delta} (\nabla u \cdot \nabla v - k^2 uv) \, dx dy$$

La proposition suivante établit la stabilité d'un problème variationnel posé avec la forme  $a_\delta$  et en particulier l'existence-unicité de la solution du problème (3.7).

**PROPOSITION 3.1.** *Pour toute forme linéaire continue  $L_\delta$  sur  $H^1(\Omega_\delta)$ , le problème variationnel*

$$(3.9) \quad \begin{cases} w_\delta \in H^1(\Omega_\delta), \forall v \in H^1(\Omega_\delta), \\ a_\delta(w_\delta, v) = L_\delta v \end{cases}$$

*possède une solution et une seule vérifiant*

$$(3.10) \quad \|w_\delta\|_{1, \Omega_\delta} \leq c \sup_{\|v\|_{1, \Omega_\delta} \leq 1} |L_\delta v|$$

*où  $c$  est une constante indépendante de  $\delta$ .*

DÉMONSTRATION. Comme  $a_\delta$  vérifie

$$(3.11) \quad |a_\delta(u, v)| \leq M \|u\|_{1, \Omega_\delta} \|v\|_{1, \Omega_\delta}$$

avec  $M = \max(1, |k|^2)$ , la démonstration se ramène à établir la propriété de coercivité uniforme : il existe une constante  $\gamma > 0$  indépendante de  $\delta$  telle que

$$(3.12) \quad |a_\delta(v, \bar{v})| \geq \gamma \|v\|_{1, \Omega_\delta}^2 \quad (\forall v \in H^1(\Omega_\delta))$$

Pour cela, notons

$$(3.13) \quad K = \Re(k^2) = k_r^2 - k_i^2 \text{ et } \eta = \Im(k^2) = 2k_r k_i$$

qui vérifient, suite aux conditions (3.4),

$$(3.14) \quad K > 0 \text{ et } \eta > 0$$

Pour  $v \in H^1(\Omega_\delta)$ , on a ainsi

$$(3.15) \quad a_\delta(v, \bar{v}) = \int_{\Omega_\delta} |\nabla v|^2 dx dy - K \int_{\Omega_\delta} |v|^2 dx dy - i\eta \int_{\Omega_\delta} |v|^2 dx dy$$

soit encore en notant  $A = |v|_{1, \Omega_\delta}^2$  et  $B = |v|_{0, \Omega_\delta}^2$

$$(3.16) \quad a_\delta(v, \bar{v}) = A - KB - i\eta B$$

On a ainsi

$$(3.17) \quad |a_\delta(v, \bar{v})|^2 = (A - KB)^2 + \eta^2 B^2 = A^2 + (K^2 + \eta^2)B^2 - 2KAB$$

En utilisant l'inégalité d'Young

$$(3.18) \quad 2|ab| \leq t|a|^2 + |b|^2/t \quad (\forall t > 0)$$

on peut minorer alors  $|a_\delta(v, \bar{v})|^2$  pour tout  $t > 0$  par

$$(3.19) \quad |a_\delta(v, \bar{v})|^2 \geq (1 - Kt)A^2 + (K^2 + \eta^2 - K/t)B^2$$

Les fonctions  $\psi(t) = 1 - Kt$  et  $\phi(t) = K^2 + \eta^2 - K/t$  sont respectivement strictement décroissante et croissante pour  $t > 0$ . Comme  $\lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) = 1$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = -\infty$ ,  $\psi(1/K) = 0$  et  $\phi(1/K) = \eta^2$ , il résulte qu'il existe  $t_0$  ( $0 < t_0 < 1/K$ ) tel que

$$(3.20) \quad 1 - Kt_0 = K^2 + \eta^2 - K/t_0 = 2\gamma^2 > 0$$

comme on peut s'en convaincre aisément à l'aide du graphe donné par la figure FIG. 3.2

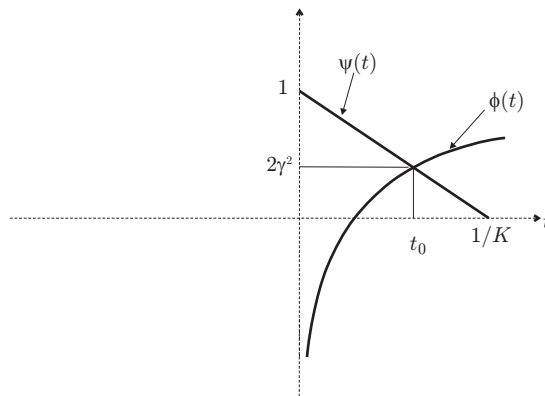


FIG. 3.2. Graphes des fonctions  $\phi(t)$  et  $\psi(t)$  montrant l'existence de  $\gamma$

On a alors, en utilisant une nouvelle fois l'inégalité d'Young avec  $t = 1$ ,

$$(3.21) \quad |a_\delta(v, \bar{v})|^2 \geq 2\gamma^2(A^2 + B^2) \geq \gamma^2(A^2 + B^2 + 2AB) = \gamma^2(A + B)^2$$

L'inégalité (3.21) donne (3.12) par passage à la racine carrée.  $\square$

## 2. Développements asymptotiques raccordés

Nous commençons par présenter une écriture de  $u_\delta$  qui montre que le comportement de l'onde dans la fente, mais loin de l'ouverture de cette dernière, y admet un comportement monodimensionnel. L'expression de l'onde dans le demi-plan  $\Omega_\infty$ , toujours loin de l'ouverture de la fente, est bidimensionnel. Le raccord entre les deux expressions se fait à travers une couche limite. Après avoir donné la forme des développements asymptotiques à l'intérieur et à l'extérieur de la couche limite, nous établirons les équations vérifiées par les différents termes de ce développement. Nous poserons alors les conditions de raccord entre les développements à l'intérieur et à l'extérieur de la couche limite qui nous permettront d'en déterminer les différents termes jusqu'à l'ordre 2 qui nous intéresse ici.

**2.1. Comportement monodimensionnel de l'onde dans la fente.** La théorie elliptique montre que  $u_\delta$  est la restriction à  $F_\delta$  d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  pour  $x < 0$ . On peut ainsi prolonger, toujours pour  $x < 0$ ,  $y \rightarrow u_\delta(x, y)$  en une fonction d'abord paire et ensuite périodique de période  $2\pi\delta$ . On peut alors développer la fonction obtenue sous

la forme

$$(3.22) \quad u_\delta(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{u_m(x)}{2} \exp(im \frac{y}{\delta})$$

avec donc

$$(3.23) \quad u_m(x) = \frac{1}{\pi\delta} \int_{-\pi\delta}^{\pi\delta} u_\delta(x, y) \exp(-im \frac{y}{\delta}) dy$$

Comme la fonction  $y \rightarrow u_\delta(x, y)$  est paire, l'intégrale précédente s'écrit

$$(3.24) \quad u_m(x) = \frac{2}{\pi\delta} \int_0^{\pi\delta} u_\delta(x, y) \cos(m \frac{y}{\delta}) dy$$

Comme  $u_m(x) = u_{-m}(x)$ , la série (3.22) s'écrit comme une série de cosinus

$$(3.25) \quad u_\delta(x, y) = \frac{u_0(x)}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x) \cos(m \frac{y}{\delta})$$

On dérive alors deux fois  $u_m(x)$  en dérivant deux fois par rapport à  $x$  sous le signe somme, en utilisant le fait que  $u_\delta$  est solution de l'équation d'Helmholtz homogène dans la fente, et enfin en intégrant deux fois par partie

$$(3.26) \quad u_m''(x) = -(k^2 - \frac{m^2}{\delta^2}) \int_0^{\pi\delta} u_\delta(x, y) \cos(m \frac{y}{\delta}) dy$$

On arrive alors à l'équation différentielle

$$(3.27) \quad u_m''(x) + (k^2 - \frac{m^2}{\delta^2})u_m(x) = 0$$

dont la solution générale est donnée par

$$(3.28) \quad u_m(x) = u_m^+ \exp\left(i\sqrt{k^2 - \frac{m^2}{\delta^2}}x\right) + u_m^- \exp\left(-i\sqrt{k^2 - \frac{m^2}{\delta^2}}x\right)$$

où la racine carrée choisie est telle que  $\Im\left(\sqrt{k^2 - \frac{m^2}{\delta^2}}\right) > 0$ . La condition  $u_\delta \in L^2(F_\delta)$  impose que  $u_m^+ = 0$ . On a ainsi

$$(3.29) \quad u_\delta(x, y) = T^\delta \exp(-ikx) + \sum_{m=1}^{+\infty} T_m^\delta \exp(-i\sqrt{k^2 - \frac{m^2}{\delta^2}}x) \cos(m \frac{y}{\delta})$$

en notant  $T^\delta = u_0^-/2$  et  $T_m^\delta = u_m^-$  car ils correspondent à des coefficients de transmission de l'onde dans la fente. On peut alors écrire l'expression précédente de façon approchée mais plus parlante en remarquant que

$$(3.30) \quad \sqrt{k^2 - \frac{m^2}{\delta^2}} \approx i \frac{m}{\delta} \text{ lorsque } \delta \rightarrow 0 \text{ pour } m \geq 1$$



soit

$$(3.31) \quad u_\delta(x, y) = T^\delta \exp(-ikx) + \sum_{m=1}^{+\infty} T_m^\delta \exp\left(\frac{m}{\delta}x\right) \cos\left(m\frac{y}{\delta}\right)$$

L'onde a ainsi un comportement monodimensionnel  $T^\delta \exp(-ikx)$  dans la fente en dehors de la jonction de cette dernière et du demi-plan extérieur  $\Omega_\infty$  avec un raccord de type couche limite en  $\exp(\frac{m}{\delta}x)$ . Nous allons dans ce qui suit établir ceci de façon rigoureuse en utilisant une technique de développements asymptotiques raccordés et une estimation d'erreur.

**2.2. Forme des développements asymptotiques.** A l'extérieur de la couche limite, on distingue deux zones : le demi-plan  $\Omega_\infty$  et la fente  $F_\delta$ . Les développements dans ces deux zones sont donnés respectivement par

$$(3.32) \quad u_\infty^{00} + \delta (\ln \delta u_\infty^{11} + u_\infty^{10}) + \cdots + \delta^n (\ln^n \delta u_\infty^{nn} + \cdots + u_\infty^{n0}) + o(\delta^n)$$

dont les termes sont définis dans le demi-plan fermé  $\{x \geq 0\}$  **sauf au point  $(0, 0)$  qui est à l'intérieur de la couche limite**, et

$$(3.33) \quad u_F^{00} + \delta (\ln \delta u_F^{11} + u_F^{10}) + \cdots + \delta^n (\ln^n \delta u_F^{nn} + \cdots + u_F^{n0}) + o(\delta^n)$$

dont les termes  $u_F^{nm}(x, Y)$  sont des fonctions de la variable lente  $x$  et de la variable rapide  $Y = y/\delta$  pour tenir compte de l'épaisseur tendant vers 0 de la fente. Ils sont définis pour  $x < 0$  et  $Y$  donc tel que  $0 \leq Y \leq \pi$ . Le développement (3.33) **ne "voit" pas lui aussi le point  $(0, 0)$  qui est à l'intérieur de la couche limite**.

Le développement de la solution  $u_\delta$  à l'intérieur de la couche limite est défini par

$$(3.34) \quad \Pi^{00} + \delta (\ln \delta \Pi^{11} + \Pi^{10}) + \cdots + \delta^n (\ln^n \delta \Pi^{nn} + \cdots + \Pi^{n0}) + o(\delta^n)$$

Ses différents termes sont fonction des variables rapides  $X = x/\delta$  et  $Y = y/\delta$ . Ils sont définis dans  $\widehat{\Omega}$  le domaine de  $\mathbb{R}^2$  dont une décomposition sans recouvrement est donnée par le demi-plan  $\widehat{\Omega}_\infty = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2; X > 0\}$  et de la mise à l'échelle de la fente

$$(3.35) \quad \widehat{F} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2; X < 0 \text{ et } 0 < Y < \pi\}$$

La présence des termes en  $\delta^n \ln^m \delta$  dans les développements est imposée par les singularités de  $u_\delta$ .

**2.3. Equations générales du développement asymptotique.** Nous allons utiliser le fait que les développements (3.32), (3.33) et (3.34) constituent tous **des approximations de représentations différentes mais d'une même fonction** : la solution  $u_\delta$ , pour obtenir les équations vérifiées par leurs différents termes.

On obtient directement les équations hors couche limite dans le demi-espace

$$(3.36) \quad \Delta u_\infty^{00} + k^2 u_\infty^{00} = -f \text{ dans } \Omega_\infty$$

$$(3.37) \quad \Delta u_\infty^{nm} + k^2 u_\infty^{nm} = 0 \text{ dans } \Omega_\infty \text{ pour } n \neq 0$$

Notons bien que puisque **la couche limite entoure le point**  $(0, 0)$ , les  $u_\infty^{nm}$  sont définis dans tout  $\overline{\Omega_\infty}$  sauf au point  $(0, 0)$ . On obtient donc directement à partir de la condition aux limites vérifiée par  $u_\delta$

$$(3.38) \quad \partial_x u_\infty^{nm}(y, 0) = 0 \text{ pour tout } y \neq 0$$

*REMARQUE 3.2. Le fait que le point  $(0, 0)$  est exclu de la condition aux limites est très important. Nous verrons au moment de prouver l'existence effective des  $u_\infty^{nm}$  en quel sens précis (au sens des distributions) on peut poser cette condition.*

Pour obtenir les autres équations, il suffit d'utiliser les relations suivantes entre les dérivations par rapport aux variables lentes et rapides

$$(3.39) \quad \partial_x = \delta^{-1} \partial_X \text{ et } \partial_y = \delta^{-1} \partial_Y$$

On obtient alors de façon standard

– les équations hors couche limite dans la fente

$$(3.40) \quad \begin{cases} \partial_Y^2 u_F^{nm} + (\partial_x^2 + k^2) u_F^{(n-2)m} = 0 \text{ pour } x < 0 \text{ et } 0 < Y < \pi \\ \partial_Y u_F^{nm}(x, 0) = 0 \text{ et } \partial_Y u_F^{nm}(x, \pi) = 0 \text{ pour } x < 0 \end{cases}$$

– les équations à l'intérieur de la couche limite

$$(3.41) \quad \begin{cases} \Delta_{XY} \Pi^{nm} + k^2 \Pi^{(n-2)m} = 0 \text{ dans } \widehat{\Omega} \\ \partial_{\mathbf{n}} \Pi^{nm} = 0 \text{ sur le bord } \widehat{\Gamma} \text{ de } \widehat{\Omega} \end{cases}$$

Dans toutes les équations, on remplace par des zéros les termes manquants comme par exemple  $u_F^{(-1)m}$ ,  $u_F^{(-2)m}$ ,  $\Pi^{(-2)m}$  et  $\Pi^{(-1)m}$  ci-dessus.

Les différents termes des développements hors couche limite vont aussi hériter des comportements de la solution à l'infini de type  $H^1$  qui seront précisés plus loin.

Nous allons maintenant donner le cadre de résolution pour chacun des problèmes précédents.

**2.4. Cadre de résolution des problèmes externes dans la fente.** Nous allons montrer que la détermination des solutions des problèmes dans la fente (3.40) se réduit à la détermination d'une constante. Le problème (3.40) est en fait un problème à deux points en  $Y$  dépendant du paramètre  $x$ . On a tout d'abord le lemme suivant.

**LEMME 3.1.** *Les solutions du problème (3.40) sont des fonctions  $u_F^{nm}(x)$  indépendantes de  $Y$  vérifiant l'équation d'Helmholtz 1D*

$$(3.42) \quad (\partial_x^2 + k^2)u_F^{nm}(x) = 0 \text{ pour } x < 0$$

**DÉMONSTRATION.** Les fonctions  $u_F^{00}$ ,  $u_F^{10}$  et  $u_F^{11}$  vérifient des systèmes du type

$$(3.43) \quad \begin{cases} v''(Y) = a \\ v'(0) = v'(\pi) = 0 \end{cases}$$

avec  $a = 0$ . On en déduit que  $\partial_Y u_F^{nm} = 0$  et donc que  $u_F^{nm}(x, Y) = u_F^{nm}(x)$  pour  $n = 0, 1$ .

Les équations (3.40) sont alors du type (3.43) pour  $n = 2$  et  $m = 0, 1$  avec  $a$  une constante en  $Y$ . En intégrant cette équation entre 0 et  $\pi$ , il vient

$$(3.44) \quad \pi a = \int_0^\pi v''(Y) dY = v'(\pi) - v'(0) = 0$$

Ceci montre que la constante  $a$  en  $Y$  est nécessairement nulle et établit que les  $u_F^{2m}$  sont indépendants de la variable  $Y$ . La proposition s'obtient alors selon exactement les mêmes arguments par récurrence.  $\square$

La solution générale de l'équation (3.42) s'écrit à l'aide de deux constantes

$$(3.45) \quad u_F^{nm}(x) = R^{nm} \exp(ikx) + T^{nm} \exp(-ikx)$$

Les  $u_F^{nm}(x)$  gardent le comportement  $H^1$  de  $u_\delta$  lorsque  $x \rightarrow -\infty$ . La détermination de  $u_F^{nm}(x)$  se ramène dès lors à celle du coefficient (de transmission!)  $T^{nm}$  car  $\exp(ikx) = \exp(-k_i x) \exp(ik_r x)$  croît exponentiellement lorsque  $x \rightarrow -\infty$ . Notons que  $\exp(-ikx) = \exp(k_i x) \exp(-ik_r x)$  tend vers 0 exponentiellement lorsque  $x \rightarrow -\infty$ . Nous avons ainsi démontré la proposition suivante.

**PROPOSITION 3.2.** *La détermination des solutions,  $H^1(]-\infty, -a[)$  pour tout  $a > 0$ , de l'équation (3.42) se ramène à celle d'une constante  $T^{nm}$  :*

$$(3.46) \quad u_F^{nm}(x) = T^{nm} \exp(-ikx) \text{ pour } x < 0$$

**REMARQUE 3.3.** *Les coefficients  $T^{nm}$  vont donner un développement asymptotique du coefficient de transmission  $T^\delta$  apparaissant en (3.29)*

$$(3.47) \quad T^\delta \sim T^{00} + \delta(\ln \delta T^{11} + T^{10}) + \dots$$

**2.5. Cadre de résolution des problèmes hors couche limite dans le demi-plan.** Les coefficients  $u_\infty^{nm}$  vont hériter du comportement  $H^1$  de  $u_\delta$  mais en dehors de tout voisinage de  $(0, 0)$  car ce point est à l'intérieur de la couche limite, i.e.,  $u_\infty^{nm}$  sont dans l'espace  $H^1(\Omega_\infty^*)$ , l'espace des  $v \in \mathcal{D}'(\Omega_\infty)$  tels que  $v|_{\Omega_\infty^a} \in H^1(\Omega_\infty^a)$  pour tout  $a > 0$  où

$$(3.48) \quad \Omega_\infty^a = \left\{ (x, y) \in \Omega_\infty ; \sqrt{x^2 + y^2} > a \right\}$$

A part l'équation (3.36), toutes les équations (3.37) relatives aux coefficients  $u_\infty^{nm}$  sont homogènes. Pour effectuer un traitement identique pour tous les termes, on introduit  $w_\infty^{00}$  solution du problème de Neumann usuel

$$(3.49) \quad \begin{cases} w_\infty^{00} \in H^1(\Omega_\infty) \\ \Delta w_\infty^{00} + k^2 w_\infty^{00} = -f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_\infty) \\ \partial_x w_\infty^{00}(x, 0) = 0 \text{ } (\forall x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

qui admet une solution et une seule dans  $H^1(\Omega_\infty)$  de façon analogue au problème relatif à  $u_\delta$ . On note alors

$$(3.50) \quad \dot{u}_\infty^{nm} = u_\infty^{nm} - w_\infty^{nm}$$

avec  $w_\infty^{nm} = 0$  pour  $(n, m) \neq (0, 0)$ . Les  $\hat{u}_\infty^{nm}$  vérifient ainsi

$$(3.51) \quad \begin{cases} \hat{u}_\infty^{nm} \in H^1(\Omega_\infty^*) \\ \Delta \hat{u}_\infty^{nm} + k^2 \hat{u}_\infty^{nm} = 0 \text{ dans } \Omega_\infty \\ \partial_x \hat{u}_\infty^{nm}(x, 0) = 0 \ (\forall x, x \neq 0) \end{cases}$$

En prolongeant  $\hat{u}_\infty^{nm}$  à  $\mathbb{R}_*^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x, y) \neq (0, 0)\}$  en une fonction paire par rapport à  $x$

$$(3.52) \quad \hat{u}_\infty^{nm}(x, y) = \hat{u}_\infty^{nm}(-x, y) \text{ pour } x < 0$$

on vérifie immédiatement que c'est une solution de l'équation d'Helmholtz dans  $\mathbb{R}_*^2$

$$(3.53) \quad \Delta \hat{u}_\infty^{nm} + k^2 \hat{u}_\infty^{nm} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_*^2)$$

Les estimations elliptiques intérieures induisent que

$$(3.54) \quad \hat{u}_\infty^{nm} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_*^2)$$

Les conditions de raccord que nous expliciterons plus loin imposent à  $\hat{u}_\infty^{nm}$  d'avoir **un ordre de singularité fini** au sens suivant. Notons par  $r$  et  $\theta$  les coordonnées polaires du plan défini par

$$(3.55) \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad r > 0 \text{ et } -\pi < \theta < \pi$$

Nous supposons donc que pour tout  $(n, m)$ , il existe  $\alpha$  et  $c$ , indépendants de  $r \leq 1$  et de  $\theta$  mais pouvant dépendre de  $n$  et  $m$ , tels que

$$(3.56) \quad r^\alpha |\hat{u}_\infty^{nm}(r, \theta)| \leq c$$

Pour simplifier la notation, une même fonction est considérée indifféremment comme fonction de  $(x, y)$  ou de  $(r, \theta)$ .

De façon analogue à celle des  $u_F^{nm}$ , la détermination des  $u_\infty^{nm}$  se ramène à celle d'un nombre fini de constantes grâce à la proposition suivante dont la démonstration peut être passée en première lecture. Nous aurons besoin auparavant de quelques propriétés des fonctions de Bessel que nous rappelons maintenant.

2.5.1. *Quelques éléments sur les fonctions de Bessel.* On se limite ici aux **équations de Bessel d'ordre entier**  $m \geq 0$  qu'il est commode de poser pour une variable complexe  $z$

$$(3.57) \quad v''(z) + \frac{1}{z}v'(z) + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right)v = 0$$

Notons que si  $v$  vérifie (3.57), la fonction, définie pour  $r > 0$  par  $w(r) = v(kr)$ , va être solution de l'équation

$$(3.58) \quad w''(r) + \frac{1}{r}w'(r) + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)w(r) = k^2v''(kr) + \frac{k^2}{kr}v'(kr) + \left(k^2 - \frac{k^2m^2}{k^2r^2}\right)v(kr) = 0$$

Un système fondamental de solutions de (3.57) est donné par les fonctions de Bessel  $J_m$  et de Neumann  $Y_m$  d'ordre  $m$ . De ces deux fonctions,  $J_m$  est celle qui reste bornée lorsque  $z \rightarrow 0$ . Ces deux fonctions sont définies par des développements en série entière par

$$(3.59) \quad J_m(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{(m+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

$$(3.60) \quad Y_m(z) = \frac{2}{\pi} J_m(z) \ln \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-m} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m-1-n)!}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \\ - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} (\psi(m+n+1) + \psi(n+1)) \frac{(-1)^n}{n!(m+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

où la détermination du log est obtenue pour  $|\arg z| < \pi$  et  $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$  est la dérivée logarithmique de la fonction  $\Gamma(z)$  qui est définie par

$$(3.61) \quad \Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \text{ pour } \Re(z) > 0$$

Une expression explicite de  $\psi(z)$  est donnée par

$$(3.62) \quad \psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right)$$

Dans (3.60), la somme de 0 à  $m-1$  est réduite à 0 pour  $m=0$ . On a ainsi  $\psi(1) = -\gamma$ ,  $\gamma = 0,5772157\dots$  étant la constante d'Euler. Pour les problèmes de propagation d'onde, on utilise plutôt comme système fondamental de solutions les fonctions de Hankel

$$(3.63) \quad H_m^{(1)}(z) = J_m(z) + iY_m(z) \quad H_m^{(2)}(z) = J_m(z) - iY_m(z)$$

qui sont non bornées en 0 mais qui permettent de décrire le bon comportement à l'infini des solutions recherchées. On a ainsi

$$(3.64) \quad H_m^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{i\pi z}} (-i)^m \exp(iz) (1 + \mathcal{O}(\frac{1}{z})) \quad H_m^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2i}{\pi z}} i^m \exp(-iz) (1 + \mathcal{O}(\frac{1}{z}))$$

La détermination de la racine est continue pour  $|\arg(z)| < \pi$  et correspond à  $\sqrt{1} = 1$ . Les fonctions  $H_m^{(1)}(kr)$  et  $H_m^{(2)}(kr)$  tendent exponentiellement respectivement vers 0 et vers l'infini pour  $\Im(k) = k_i > 0$  lorsque  $r \rightarrow \infty$ . Nous aurons aussi à utiliser le comportement de  $H_m^{(1)}(z)$  lorsque  $z \rightarrow 0$  qui s'obtient à partir de son écriture sous la forme (3.59) et (3.60)

$$(3.65) \quad H_m^{(1)}(z) = \frac{1}{i\pi} (z/2)^{-m} P_{m-1}((z/2)^2) + (1 + \frac{2i}{\pi} \ln(z/2)) (z/2)^m j_m((z/2)^2) + \frac{1}{i\pi} (z/2)^m y_m((z/2)^2)$$

où  $P_{m-1}(\zeta)$  est un polynôme de degré  $m - 1$  en la variable  $\zeta$

$$(3.66) \quad P_{m-1}(\zeta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m-1-n)!}{n!} \zeta^n$$

et  $j_m(\zeta)$  et  $y_m(\zeta)$  sont deux fonctions analytiques sur  $\mathbb{C}$  de la variable complexe  $t$  données par

$$(3.67) \quad j_m(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{(m+n)!} \zeta^n$$

$$(3.68) \quad y_m(\zeta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (\psi(m+n+1) + \psi(n+1)) \frac{(-1)^n}{n!(m+n)!} \zeta^n$$

Ces trois fonctions vérifient ainsi

$$(3.69) \quad P_{m-1}(0) = (m-1)! \quad j_m(0) = \frac{1}{m!} \quad y_m(0) = \frac{\psi(m+1) - \gamma}{m!}$$

**PROPOSITION 3.3.** *Soit  $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_*^2) \cap H^1(\Omega_\infty^*)$ , paire par rapport à  $x$ , ayant une singularité d'ordre fini en  $(0, 0)$  et vérifiant l'équation d'Helmholtz*

$$(3.70) \quad \Delta v + k^2 v = 0 \text{ dans } \Omega_\infty^*$$

Alors,  $v$  se décompose sous la forme

$$(3.71) \quad v(r, \theta) = \sum_{m=0}^N C_m H_m^{(1)}(kr) \cos(\ell(\theta - \pi/2))$$

DÉMONSTRATION. On décompose  $v(r, \theta)$  en série de Fourier

$$(3.72) \quad v(r, \theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{v}_m(r) \exp(im\theta)$$

avec

$$(3.73) \quad \widetilde{v}_m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(r, \theta) \exp(-im\theta) d\theta$$

On remarque alors que l'intégrale dans (3.73) peut aussi être calculée par

$$(3.74) \quad \widetilde{v}_m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} v(r, \theta) \exp(-im\theta) d\theta$$

Faisant alors le changement de variable  $\theta' = \theta - \pi/2$ , il vient

$$(3.75) \quad \widetilde{v}_m(r) = \frac{(-i)^m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r, \theta' + \pi/2) \exp(-im\theta') d\theta'$$

La fonction  $v$  étant paire en  $x$ , il s'ensuit que la fonction  $\theta' \rightarrow v(r, \theta' + \pi/2)$  est paire en  $\theta'$ . L'intégrale en (3.73) s'écrit donc

$$(3.76) \quad \widetilde{v}_m(r) = (-i)^m v_m(r)/2 \text{ avec } v_m(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v(r, \theta' + \pi/2) \cos(m\theta') d\theta'$$

On peut ainsi réécrire (3.72)

$$(3.77) \quad v(r, \theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_m(r)}{2} \exp(im(\theta - \pi/2))$$

Utilisant alors le fait que  $v_{-m}(r) = v_m(r)$ , on peut réécrire alors le développement (3.72) sous la forme d'une série de Fourier usuelle en cosinus

$$(3.78) \quad v(r, \theta) = \frac{v_0(r)}{2} + \sum_1^{+\infty} v_m(r) \cos(m(\theta - \pi/2))$$

Sachant que  $v$  satisfait l'équation d'Helmholtz écrite en coordonnées polaires sous la forme

$$(3.79) \quad \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r v) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 v + k^2 v = 0$$

on vérifie aisément par dérivation sous le signe somme en  $r$  et intégration par partie en  $\theta$  que  $v_m$  est solution de l'équation de Bessel (3.58). L'appartenance de  $v$  à  $H^1(\Omega_\infty^a)$  pour  $a > 0$  élimine  $H_m^{(2)}(kr)$  car elle a une croissance exponentielle lorsque  $r \rightarrow \infty$ . De (3.65), on tire que le comportement de  $H_m^{(1)}(kr)$  lorsque  $r \rightarrow 0$  est en donné par

$$(3.80) \quad H_0^{(1)}(kr) \sim \frac{2i}{\pi} \ln r \quad H_m^{(1)}(kr) \sim \frac{(m-1)!}{i\pi} \frac{2^\ell}{(kr)^\ell} \text{ pour } m \geq 1$$

Comme  $v$  a une singularité d'ordre fini lorsque  $r \rightarrow 0$ , seul un nombre fini de termes dans la somme (3.78) peuvent être non nuls □



### 2.6. Cadre de résolution des problèmes à l'intérieur de la couche limite.

Les conditions de raccord vont imposer des comportements à l'infini aux solutions des problèmes en variable rapide (3.41) qui ne peuvent pas être traités par la méthode variationnelle. Ces comportements vont être pris en compte à l'aide de solutions particulières obtenues par séparation de variables. Cependant, ces solutions vont satisfaire les conditions des problèmes (3.41) uniquement à l'extérieur d'une boule centrée à l'origine. Pour résoudre effectivement (3.41), on va perturber ces solutions par des solutions variationnelles relatives à une équation de Laplace et à une condition de Neumann. C'est pourquoi la forme bilinéaire qui intervient dans la formulation des problèmes variationnels est la suivante

$$(3.81) \quad a(u, v) = \int_{\hat{\Omega}} \nabla_{XY} u \cdot \nabla_{XY} v \, dX dY$$

qui est donc définie sur l'espace, dit de Beppo-Levi, qu'on notera  $W^1(\hat{\Omega})$ , des distributions  $u \in \mathcal{D}'(\hat{\Omega})$  dont le gradient  $\nabla_{XY} u$  est dans  $L^2(\hat{\Omega})$ . Cependant, la forme bilinéaire  $a$  n'est pas définie positive sur  $W^1(\hat{\Omega})$  mais sur l'espace-quotient  $W^1(\hat{\Omega})/\mathbb{C}$  (obtenu en ne distinguant pas entre deux distributions qui diffèrent d'une constante). La proposition suivante permet de donner une définition plus utilisable de  $W^1(\hat{\Omega})$ .

**PROPOSITION 3.4.** *Notons par  $\varrho$  une fonction de  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$  identique à  $1/R \ln R$  pour  $R = \sqrt{X^2 + Y^2} \geq 2$  et  $X > 0$  et identique  $1/X$  pour  $X < -2$  et  $0 < Y < \pi$ . L'espace  $W^1(\hat{\Omega})$  peut être défini par*

$$(3.82) \quad W^1(\hat{\Omega}) = \left\{ v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) ; \varrho v \in L^2(\hat{\Omega}) \text{ et } \nabla_{XY} v \in L^2(\hat{\Omega}) \right\}$$

*Il contient les constantes. De plus, la semi-norme  $v \rightarrow |v|_{1, \hat{\Omega}}$  est bien définie sur  $W^1(\hat{\Omega})/\mathbb{C}$  et définit une norme sur cet espace équivalente à la norme quotient*

$$(3.83) \quad \|\dot{v}\|_{W^1(\hat{\Omega})/\mathbb{C}} = \inf_{c \in \mathbb{C}} \|v + c\|_{W^1(\hat{\Omega})}$$

*où dans (3.83),  $v$  est un élément quelconque dans la classe  $\dot{v}$ .*

**DÉMONSTRATION.** Observons que  $|v + c|_{1, \hat{\Omega}} = |v|_{1, \hat{\Omega}}$  pour tout  $c \in \mathbb{C}$  et donc qu'elle définit bien a priori une semi-norme sur  $W^1(\hat{\Omega})/\mathbb{C}$ . Comme  $|v|_{1, \hat{\Omega}} = 0$  entraîne que  $v$  est une constante, c'est en fait une norme sur  $W^1(\hat{\Omega})/\mathbb{C}$ . A l'aide des techniques déjà utilisées au chapitre 2, qui ne sont pas reproduites ici, la démonstration est conséquence de l'inégalité de Hardy considérée dans ce chapitre pour l'estimation dans la fente mise à

l'échelle  $\widehat{F}$  et, après passage en coordonnées polaires  $(R, \Theta)$  dans  $\widehat{\Omega}_\infty$ , d'une autre inégalité de Hardy donnée par

$$(3.84) \quad \int_A^\infty |\varphi(R)|^2 \frac{1}{R \ln^2 R} dR \leq 4 \int_A^\infty |\varphi'(R)|^2 R dR \quad (\forall A > 1, \forall \varphi \in \mathcal{D}(]A, +\infty[))$$

Cette seconde inégalité s'obtient de la même façon que celle du chapitre 2 en remarquant que

$$(3.85) \quad \frac{1}{R \ln^2 R} = - \left( \frac{1}{\ln R} \right)'$$

□

La proposition suivante donne alors le cadre qui permet la prise en charge de l'aspect variationnel de la résolution des problèmes en variables rapides.

**PROPOSITION 3.5.** *Soit  $T \in \mathcal{C}^\infty(\widehat{\Omega})$  et à support borné. Elle peut donc être identifiée à une forme linéaire continue sur  $W^1(\widehat{\Omega})$ . Si  $T$  vérifie la condition de compatibilité*

$$(3.86) \quad \int_{\widehat{\Omega}} T(X, Y) dXdY = 0$$

alors, le problème

$$(3.87) \quad \begin{cases} w \in W^1(\widehat{\Omega}) \\ -\Delta_{XY} w = T \text{ dans } \mathcal{D}'(\widehat{\Omega}) \\ \partial_{\mathbf{n}} w = 0 \text{ sur } \widehat{\Gamma} \end{cases}$$

possède une solution, unique à une constante additive près.

**DÉMONSTRATION.** Remarquons tout d'abord que la solution de (3.87), si elle existe, est définie à une constante près et que le problème peut être ainsi posé dans  $W^1(\widehat{\Omega})/\mathbb{C}$ . La propriété  $T \in L^2(\widehat{\Omega})$  permet de donner un sens à  $\partial_{\mathbf{n}} w = 0$  sur  $\widehat{\Gamma}$  et d'établir que le problème (3.87) est équivalent au problème variationnel

$$(3.88) \quad \begin{cases} \dot{w} \in W^1(\widehat{\Omega})/\mathbb{C}, \forall v \in W^1(\widehat{\Omega})/\mathbb{C}, \\ a(w, v) = \int_{\widehat{\Omega}} T v dXdY \end{cases}$$

La fin de la démonstration est alors une conséquence immédiate de la proposition précédente et du théorème de Lax-Milgram. □

Nous avons besoin aussi de préciser les comportements de la solution  $w$  de (3.88) lorsque  $R \rightarrow \infty$  dans le demi-plan des  $X > 0$ , que nous noterons  $\widehat{\Omega}_\infty$ , et aussi dans la fente, mise à l'échelle,

$$(3.89) \quad \widehat{F} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2; X < 0 \text{ et } 0 < Y < \pi\}$$

PROPOSITION 3.6. *Toute solution  $w$  de (3.87) tend vers une constante  $w_\infty$  lorsque  $R \rightarrow \infty$  dans  $\widehat{\Omega}_\infty$  et vers une autre constante  $w_F$  lorsque  $X \rightarrow -\infty$  dans  $\widehat{F}$ .*

DÉMONSTRATION. Les conditions sur le support de  $f$  montrent que  $w$  est harmonique pour  $R > R_0 > 0$  dans  $\widehat{\Omega}_\infty$  et pour  $X < X_0 < 0$  dans  $\widehat{F}$ . En supposant qu'on a choisi  $R_0 > \pi$ , la théorie des problèmes aux limites elliptiques assure que  $w$  est  $C^\infty$  jusqu'au bord dans ces sous-domaines. On peut alors développer  $w$  dans  $\widehat{\Omega}_\infty$  en série de Fourier en  $\theta$  de façon analogue à ci-dessus pour les solutions de (3.70)

$$(3.90) \quad w(R, \theta) = \frac{w_0(R)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(R) \cos(m(\theta - \pi/2))$$

avec

$$(3.91) \quad w_m(R) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi w(R, \theta) \cos(m(\theta - \pi/2)) d\theta$$

En calculant  $(Rw'_m)' / R$  par dérivation sous le signe somme, puis en utilisant le fait que  $\Delta_{XY}w = 0$  pour  $R > R_0$ , et enfin en intégrant deux fois par partie par rapport à  $\theta$ , on montre que  $w_m$  est solution de l'équation différentielle

$$(3.92) \quad (Rw'_m)' - m^2w_m/R = 0$$

Ceci établit que

$$(3.93) \quad w_0(R) = w_0^+ \ln R + w_0^- \quad w_m(R) = w_m^+ R^m + w_m^- R^{-m} \quad (m \geq 1)$$

L'appartenance de  $w$  à  $W^1(\widehat{\Omega})$  donne alors  $w_m^+ = 0$  ( $m \geq 0$ ). On a ensuite  $\lim_{R \rightarrow \infty} w = w_0^-$  qui termine la démonstration de la première partie de la proposition avec  $w_\infty = w_0^-$ .

Pour établir la seconde partie, on procède de façon analogue à ci-dessus en prolongeant  $w$  en une fonction paire par rapport à  $Y$  et périodique de période  $2\pi$  par rapport à  $Y$  pour tout  $X < X_0$  fixé. On écrit alors

$$(3.94) \quad w(X, Y) = \frac{w_0(X)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(X) \cos(m\theta)$$

En adaptant les étapes de la première partie, on trouve maintenant

$$(3.95) \quad w_m''(X) + m^2 w_m(X) = 0 \text{ pour } X < X_0$$

dont les solutions sont

$$(3.96) \quad w_0(X) = w_0^+ X + w_0^- \quad w_m(X) = w_m^+ \exp(-mX) + w_m^- \exp(mX) \quad (m \geq 1)$$

Là aussi, l'appartenance à  $W^1(\widehat{\Omega})$  impose aux  $w_m^+$  de s'annuler. On alors la proposition avec  $w_F = w_0^-$ .  $\square$

**2.7. Conditions de raccord.** Les puissances  $\ln^m \delta$  de  $\ln \delta$  rentrent dans les conditions de raccord mais ne jouent pas le même rôle que les puissances  $\delta^n$  de  $\delta$  pour définir les différentes étapes de détermination du développement asymptotique.

Plus précisément, on procède à chaque étape  $n$  pour déterminer les  $u_\infty^{nm}$ ,  $u_F^{nm}$  et  $\Pi^{nm}$  pour  $m = 0, \dots, n$  de la façon suivante :

(1) On exprime

$$(3.97) \quad u_\infty^{n\delta}(x, y) = u_\infty^{00}(x, y) + \dots + \delta^n (\ln^n \delta u_\infty^{nn}(x, y) + \dots + u_\infty^{n0}(x, y))$$

à l'aide des variables rapides  $u_\infty^{n\delta}(x, y) = u_\infty^{n\delta}(\delta X, \delta Y)$  qu'on développe par rapport à  $\delta$  en négligeant tous les termes négligeables par rapport à  $\delta^n$ , c'est-à-dire en  $o(\delta^n)$

$$(3.98) \quad u_\infty^{n\delta}(\delta X, \delta Y) = U_{\infty, n}^{00}(X, Y) + \dots + \delta^n (\ln^n \delta U_{n, \infty}^{nn}(X, Y) + \dots + U_{n, \infty}^{n0}(X, Y)) + o(\delta^n)$$

On obtient alors la condition de raccord lorsque  $R \rightarrow +\infty$

$$(3.99) \quad \Pi_n^{\ell m}(X, Y) = U_{\infty, n}^{\ell m}(X, Y) + o(R^{\ell-n})$$

(2) On procède de même avec les  $u_F^{nm}$ . Mais cette fois-ci, les  $u_F^{nm}$  sont des fonctions régulières. Leurs conditions de raccord avec les  $\Pi^{nm}$  ne dépendent pas de l'ordre  $n$  auquel on veut déterminer le développement asymptotique. On a avec des notations analogues à ci-dessus relativement aux développements dans  $\Omega_\infty$

$$(3.100) \quad u_F^{n\delta}(\delta X, \delta Y) = U_F^{00}(X, Y) + \dots + \delta^n (\ln^n \delta U_F^{nn}(X, Y) + \dots + U_F^{n0}(X, Y)) + o(\delta^n)$$

On a alors les conditions de raccord pour  $X \rightarrow -\infty$

$$(3.101) \quad \Pi^{nm}(X, Y) = U_F^{nm}(X, Y) + o(1)$$

**2.8. Termes d'ordre 0.** On a donc

$$(3.102) \quad u_\infty^{00}(x, y) = w_\infty^{00}(x, y) + \sum_{\ell=0}^{N^{00}} C_\ell^{00} H_\ell^{(1)}(kr) \cos(\ell(\theta - \pi/2))$$

La singularité la plus faible, suite aux comportements donnés par (3.80) des fonctions de Bessel lorsque  $kr \rightarrow 0$ , donnerait un terme en  $\ln \delta$  lorsqu'on exprime  $u_\infty^{00}(x, y)$  en variables rapides  $u_\infty^{00}(\delta X, \delta Y)$ . Il en résulte que  $C_\ell^{00} = 0$  et la fonction  $u_\infty^{00}(x, y)$  se réduit à la solution particulière  $w_\infty^{00}(x, y)$  dans le demi-plan  $\Omega_\infty$ . On a ainsi

$$(3.103) \quad u_\infty^{00}(\delta X, \delta Y) = u_\infty^{00}(0, 0) + o(1) = U_{\infty,0}^{00}(X, Y) + o(1)$$

Ceci entraîne que

$$(3.104) \quad U_{\infty,0}^{00}(X, Y) = u_\infty^{00}(0, 0)$$

Les conditions de raccord (3.99) donnent alors, lorsque  $R \rightarrow \infty$ ,

$$(3.105) \quad \Pi^{00}(X, Y) = u_\infty^{00}(0, 0) + o(1)$$

Sachant que  $\Pi^{00}$  vérifie (3.41), la proposition 3.5 assure alors que

$$(3.106) \quad \Pi^{00}(X, Y) = u_\infty^{00}(0, 0)$$

De la même façon,

$$(3.107) \quad u_F^{00}(\delta X, \delta Y) = T^{00} \exp(-ik\delta X) = T^{00} + o(1)$$

lorsque  $X \rightarrow -\infty$ . Il en résulte que

$$(3.108) \quad T^{00} = u_\infty^{00}(0, 0)$$

On résume les résultats précédents dans le théorème suivant.

**THÉORÈME 3.1.** *Les différents termes du développement asymptotique à l'ordre 0 sont donnés par :*

–  $u_\infty^{00}$  est la solution du problème (3.49)

– le coefficient de transmission dans la fente est obtenu par

$$(3.109) \quad T^{00} = u_{\infty}^{00}(0, 0)$$

– le terme d'ordre 0 à l'intérieur de la couche limite est obtenu par

$$(3.110) \quad \Pi^{00}(X, Y) = u_{\infty}^{00}(0, 0)$$

**2.9. Termes d'ordre 1.** De la même façon que ci-dessus, suite à (3.80), on a

$$(3.111) \quad u_{\infty}^{10}(x, y) = C_0^{10} H_0^{(1)}(kr) + C_1^{10} H_1^{(1)}(kr) \cos(\theta - \pi/2)$$

$$(3.112) \quad u_{\infty}^{11}(x, y) = 0$$

**Raccords dans le demi-plan.** On doit ainsi développer

$$u_{\infty}^{1\delta}(\delta X, \delta Y) = u_{\infty}^{00}(\delta X, \delta Y) + \delta u_{\infty}^{10}(\delta X, \delta Y),$$

lorsque  $\delta \rightarrow 0$ , en conservant tous les termes qui ne sont pas négligeables devant  $\delta$ . Pour cela, on utilise les expressions (3.65) pour écrire

$$(3.113) \quad H_0^{(1)}(k\delta R) = \frac{2i}{\pi} \ln \delta + \frac{2i}{\pi} \ln R + \gamma_k + \mathcal{O}(\delta \ln \delta)$$

où

$$(3.114) \quad \gamma_k = 1 + \frac{2i}{\pi} \left( \gamma + \ln \frac{k}{2} \right)$$

et

$$(3.115) \quad H_1^{(1)}(k\delta R) = \frac{1}{\delta} \left( -\frac{2i}{\pi k} \frac{1}{R} \right) + \mathcal{O}(\delta \ln \delta)$$

On fait un développement de Taylor à l'ordre 1 pour  $u_{\infty}^{00}(\delta X, \delta Y)$

$$(3.116) \quad u_{\infty}^{00}(\delta X, \delta Y) = u_{\infty}^{00}(0, 0) + \delta Y \partial_y u_{\infty}^{00}(0, 0) + \mathcal{O}(\delta^2)$$

sachant que  $\partial_x u_{\infty}^{00}(0, 0) = 0$ . Ceci conduit alors à

$$(3.117) \quad u_{\infty}^{1\delta}(\delta X, \delta Y) = U_{1\infty}^{00}(X, Y) + \delta(\ln \delta U_{1\infty}^{11}(X, Y) + U_{1\infty}^{10}(X, Y)) + o(\delta)$$

avec

$$(3.118) \quad U_{1\infty}^{00}(X, Y) = u_{\infty}^{00}(0, 0) - C_1^{10} \frac{2i \cos(\theta - \pi/2)}{\pi k R}$$

$$(3.119) \quad U_{1\infty}^{11}(X, Y) = \frac{2i}{\pi} C_0^{10}$$

$$(3.120) \quad U_{1\infty}^{10}(X, Y) = C_0^{10} \left( \frac{2i}{\pi} \ln R + \gamma_k \right) + Y \partial_y u_{\infty}^{00}(0, 0)$$

Les conditions de raccord (3.99), en particulier

$$(3.121) \quad \Pi^{00}(X, Y) = U_{1\infty}^{00}(X, Y) + o\left(\frac{1}{R}\right)$$

donnent

$$(3.122) \quad C_1^{10} = 0$$

et aussi

$$(3.123) \quad \Pi^{10}(X, Y) = C_0^{10} \left( \frac{2i}{\pi} \ln R + \gamma_k \right) + Y \partial_y u_{\infty}^{00}(0, 0) + o(1)$$

$$(3.124) \quad \Pi^{11}(X, Y) = \frac{2i}{\pi} C_0^{10} + o(1)$$

**Raccords dans la fente.** On doit maintenant développer

$$(3.125) \quad u_F^{1\delta}(\delta X, \delta Y) = (T^{00} + \delta(T^{11} \ln \delta + T^{10})) \exp(-ik\delta X)$$

comme ci-dessus

$$(3.126) \quad u_F^{1\delta}(\delta X, \delta Y) = T^{00} + \delta(T^{10} - ikXT^{00}) + \delta \ln \delta T^{11} + o(\delta)$$

On obtient alors, outre la relation utilisée à l'ordre 0,

$$(3.127) \quad \Pi^{10}(X, Y) = T^{10} - ikXT^{00} + o(1)$$

$$(3.128) \quad \Pi^{11}(X, Y) = T^{11} + o(1)$$

De la même façon que pour l'ordre 0, on a alors

$$(3.129) \quad \Pi^{11} = \frac{2i}{\pi} C_0^{10} \quad T^{11} = \frac{2i}{\pi} C_0^{10}$$

Reste à déterminer les constantes  $C_0^{10}$  et  $T^{10}$  et la fonction  $\Pi^{10}$ . Pour cela, pour tout  $C_0^{10}$  donné, on considère la fonction  $\Theta^{10}$  définie presque partout sur  $\widehat{\Omega}_\infty$  par

$$(3.130) \quad \Theta^{10}(X, Y) = \begin{cases} C_0^{10} \left( \frac{2i}{\pi} \ln R + \gamma_k \right) + Y \partial_y u_\infty^{00}(0, 0) & \text{pour } X > 0 \\ -ikXT^{00} & \text{pour } X < 0 \end{cases}$$

Pour le moment, on laisse de côté la condition pour  $X \rightarrow -\infty$  concernant la constante  $T^{10}$ . Remarquons que

$$(3.131) \quad \Delta_{XY} \Theta^{10} = 0 \text{ dans } \widehat{\Omega}_\infty \text{ et dans } \widehat{F}$$

et que

$$(3.132) \quad \partial_{\mathbf{n}} \Theta^{10} = 0$$

sur  $\widehat{\Gamma}$  en dehors des points  $(0, 0)$  et  $(0, \pi)$ .

Pour établir l'existence de  $\Pi^{10}$ , on considère une fonction de troncature  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  ayant les propriétés suivantes :

- $\chi \equiv 1$  dans un voisinage de l'ouverture de la cavité

$$(3.133) \quad \{(X, 0) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq X \leq \pi\}$$

- $\chi(X, Y) = \chi(X)$  pour  $X < 0$
- $\chi(R, \theta) = \chi(R)$  pour  $X > 0$

La construction de  $\chi$  peut être effectuée sans aucune difficulté et sera donnée explicitement dans la suite. La fonction  $(1 - \chi)\Theta^{10}$  est régulière et vérifie presque toutes les conditions prescrites à  $\Pi^{10}$ . Pour terminer la construction de  $\Pi^{10}$ , on va perturber  $(1 - \chi)\Theta^{10}$  par une fonction  $W^{10}$  de  $W^1(\widehat{\Omega}_\infty)$

$$(3.134) \quad W^{10} = \Pi^{10} - (1 - \chi)\Theta^{10}$$

qui doit vérifier

$$(3.135) \quad \begin{cases} \Delta_{XY} W^{10} = 2\nabla\chi \cdot \nabla\Theta^{10} + \Theta^{10}\Delta_{XY}\chi & \text{dans } \widehat{\Omega}_\infty \\ \partial_{\mathbf{n}} W^{10} = 0 & \text{sur } \widehat{\Gamma} \end{cases}$$

La proposition 3.5 montre que

$$(3.136) \quad \int_{\widehat{\Omega}} (2\nabla\chi \cdot \nabla\Theta^{10} + \Theta^{10}\Delta_{XY}\chi) dXdY = 0$$



est une condition nécessaire et suffisante pour que le problème (3.135) admette une solution. Le lemme suivant montre qu'en fait cette condition ne dépend pas de la fonction de troncature et qu'elle détermine  $C_0^{10}$ .

LEMME 3.2. *La condition (3.136) est équivalente à*

$$(3.137) \quad C_0^{10} = -\frac{k\pi}{2}T^{00}$$

DÉMONSTRATION. Comme  $\Delta_{XY}(\frac{2i}{\pi} \ln R + \gamma_k) = 0$ ,  $\Delta_{XY}Y = 0$  dans  $\widehat{\Omega}_\infty$ , que  $\frac{2i}{\pi} \ln R + \gamma_k \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_*^2)$ , et que  $\chi \equiv 1$  au voisinage du segment (3.133), on peut écrire pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit l'intégrale intervenant en (3.136) sous la forme

$$(3.138) \quad \begin{aligned} \int_{\widehat{\Omega}} (2\nabla\chi \cdot \nabla\Theta^{10} + \Theta^{10}\Delta_{XY}\chi) dXdY &= C_0^{10} \int_{\widehat{\Omega}_\infty^\varepsilon} \Delta_{XY}(\chi(\frac{2i}{\pi} \ln R + \gamma_k))dXdY \\ &\quad + \partial_y u_\infty^{00}(0,0) \int_{\widehat{\Omega}_\infty} \Delta_{XY}(\chi Y)dXdY \\ &\quad - ikT^{00} \int_{\widehat{F}} \Delta_{XY}(\chi X)dXdY \end{aligned}$$

où

$$(3.139) \quad \widehat{\Omega}_\infty^\varepsilon = \left\{ (X, Y) \in \widehat{\Omega}_\infty; \sqrt{X^2 + Y^2} > \varepsilon \right\}$$

La formule de Green donne alors

$$(3.140) \quad \int_{\widehat{F}} \Delta_{XY}(\chi X)dXdY = \int_0^\pi dY = \pi$$

$$(3.141) \quad \int_{\widehat{\Omega}_\infty} \Delta_{XY}(\chi Y)dXdY = 0$$

$$(3.142) \quad \int_{\widehat{\Omega}_\infty^\varepsilon} \Delta_{XY}(\chi(\frac{2i}{\pi} \ln R + \gamma_k))dXdY = -\frac{2i}{\pi} \int_0^\pi \partial_R \ln R|_{R=\varepsilon} \varepsilon d\theta = -2i$$

Le lemme se déduit alors directement des relations précédentes.  $\square$

On a alors le théorème suivant qui résume l'existence du développement asymptotique jusqu'à l'ordre 1.

THÉORÈME 3.2. *Les différents termes du développement asymptotique à l'ordre 1 sont donnés par*

$$(3.143) \quad u_\infty^{10}(x, y) = C_0^{10} H_0^{(1)}(kr) \text{ avec } C_0^{10} = -\frac{k\pi}{2}T^{00}$$

$$(3.144) \quad u_F^{10}(x, y) = T^{10} \exp(-ikx), \quad u_F^{11}(x, y) = T^{11} \exp(-ikx)$$

avec  $T^{11} = \frac{2i}{\pi}C_0^{10}$  et  $T^{10}$  obtenu à partir de la solution du problème (3.135) vérifiant

$$(3.145) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} W^{10}(X, Y) = 0 \text{ pour } X > 0$$

par

$$(3.146) \quad \lim_{X \rightarrow -\infty} W^{10}(X, Y) = T^{10}$$

Les termes du développement asymptotique à l'ordre 1 à l'intérieur de la couche limite sont donnés par

$$(3.147) \quad \Pi^{10} = (1 - \chi)\Theta^{10} + W^{10}$$

$$(3.148) \quad \Pi^{11} = \frac{2i}{\pi}C_0^{10}$$

DÉMONSTRATION. Sous la condition (3.137), le problème (3.135) possède une solution, unique à une constante additive près, dans  $W^1(\widehat{\Omega})$ . La constante arbitraire est fixée par la condition (3.145). La proposition 3.6 permet alors de terminer la démonstration du théorème.  $\square$

### 3. Estimations d'erreur

La technique essentielle pour borner l'erreur sur la solution, relative aux développements asymptotiques obtenus ci-dessus, repose sur une construction d'une approximation globale de cette solution, i.e. valable à l'extérieur et à l'intérieur de la couche limite, et à estimer le résidu qui lui est associé. Cela nous permettra en particulier d'estimer l'erreur effectuée sur le calcul du coefficient de transmission.

**3.1. Approximation globale et résidu associé.** La construction de l'approximation de  $u_\delta$  utilise de façon essentielle les deux éléments suivants :

- une fonction  $\delta \rightarrow \eta(\delta)$ , notée  $\eta$  pour simplifier la notation, vérifiant :
- $\eta$  tend vers 0 avec  $\delta$

$$(3.149) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \eta = 0$$

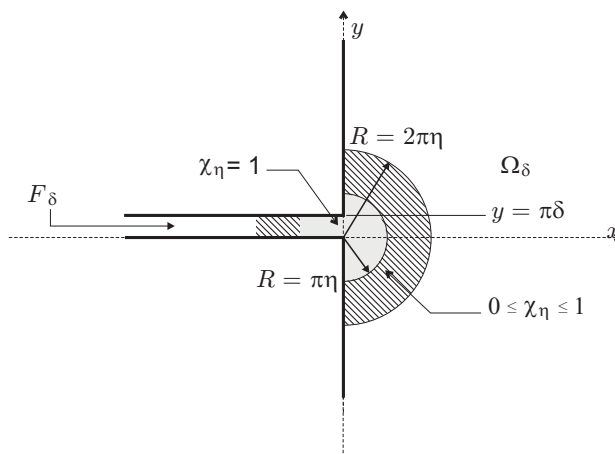


FIG. 3.3. Schéma des zones où la fonction de troncature  $\chi_\eta$  varie et où  $\chi_\eta = 1$

–  $\delta \ll \eta$ , ce qui s'exprime par

$$(3.150) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\eta}{\delta} = +\infty$$

Un ensemble de telles fonctions est fourni par  $\eta = \delta^s$  ( $0 < s < 1$ ).

– une fonction de troncature  $\chi_\eta$  construite de la façon suivante à partir d'une fonction

$$(3.151) \quad \chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \text{ telle que } \chi' \leq 0, \chi(t) = 1 \text{ pour } t \leq \pi \text{ et } \chi(t) = 0 \text{ pour } t \geq 2\pi$$

- $\chi_\eta(x, y) = \chi(-x/\eta)$  pour  $x \leq 0$ ,
- $\chi_\eta(x, y) = \chi(\sqrt{x^2 + y^2}/\eta)$  pour  $x \geq 0$ .

On vérifie de façon élémentaire que cette fonction est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\overline{\Omega_\delta}$ . La figure FIG. 3.3 indique les différentes zones où la fonction  $\chi_\eta$  varie et où elle vaut 1.

En notant par

$$(3.152) \quad \tilde{\Pi}^{1\delta}(x, y) = \Pi^{1\delta}(x/\delta, y/\delta)$$

la fonction candidate à constituer une approximation globale de  $u_\delta$  à l'ordre 1 est

$$(3.153) \quad u_\eta^1 = \chi_\eta \tilde{\Pi}^{1\delta} + (1 - \chi_\eta) u^{1\delta}$$

où la fonction  $u^{1\delta}$  est définie presque partout sur  $\Omega_\delta$  par

$$(3.154) \quad u^{1\delta}(x, y) = \begin{cases} u_\infty^{1\delta}(x, y) & \text{si } (x, y) \in \Omega_\infty \\ u_F^{1\delta}(x, y) & \text{si } (x, y) \in F_\delta \end{cases}$$

REMARQUE 3.4. *Notons que, comme  $1 - \chi_\eta$  est identique à 0 au voisinage de la bouche de la fente,  $u^{1\delta}$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\overline{\Omega_\delta}$ .*

Pour estimer l'erreur du développement asymptotique

$$(3.155) \quad e_\eta^1 = u_\delta - u_\eta^1$$

il nous suffit, grâce au résultat de stabilité (3.10) d'estimer le résidu

$$(3.156) \quad \begin{aligned} a_\delta(e_\eta^1, v) &= a_\delta(u_\delta, v) - \int_{\Omega_\delta} (\nabla(1 - \chi_\eta) u^{1\delta} \cdot \nabla v - k^2(1 - \chi_\eta) u^{1\delta} v) dx dy \\ &\quad - \int_{\Omega_\delta} (\nabla \chi_\eta \Pi^{1\delta} \cdot \nabla v - k^2 \chi_\eta \Pi^{1\delta} v) dx dy \end{aligned}$$

Pour cela, on écrit les termes comportant les dérivées de  $\chi_\eta$  sous la forme

$$(3.157) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega_\delta} \nabla(1 - \chi_\eta) u_\delta^1 \cdot \nabla v dx dy &= \int_{\Omega_\delta} (1 - \chi_\eta) \nabla u^{1\delta} \cdot \nabla v + u^{1\delta} \nabla(1 - \chi_\eta) \cdot \nabla v dx dy \\ &= \int_{\Omega_\delta} \nabla u^{1\delta} \cdot \nabla(1 - \chi_\eta) v dx dy \\ &\quad + \int_{\Omega_\delta} (u^{1\delta} \nabla(1 - \chi_\eta) \cdot \nabla v - v \nabla(1 - \chi_\eta) \cdot \nabla u^{1\delta}) dx dy \end{aligned}$$

En procédant de même avec les termes en  $\Pi^{1\delta}$ , et en remarquant que  $\nabla(1 - \chi_\eta) = -\nabla \chi_\eta$ , le résidu s'écrit finalement

$$(3.158) \quad \begin{aligned} a_\delta(e_\delta^1, v) &= \int_{\Omega_\delta} f v dx - a_\delta(u^{1\delta}, (1 - \chi_\eta) v) - a_\delta(\tilde{\Pi}^{1\delta}, \chi_\eta v) \\ &\quad + \int_{\Omega_\delta} ((u_\delta^1 - \Pi^{1\delta}) \nabla \chi_\eta \cdot \nabla v - v \nabla \chi_\eta \cdot \nabla (u_\delta^1 - \Pi^{1\delta})) dx dy \end{aligned}$$

Compte tenu des équations vérifiées par les différents termes du développement asymptotique, on a

$$(3.159) \quad \int_{\Omega_\delta} f v dx - a_\delta(u^{1\delta}, (1 - \chi_\eta) v) = 0$$

pour  $\eta$  assez petit, et

$$(3.160) \quad a_\delta(\tilde{\Pi}^{1\delta}, \chi_\eta v) = -k^2 \int_{\Omega_\delta} \chi_\eta \tilde{\Pi}^{1\delta} v dx dy$$

Le résidu s'écrit donc

$$(3.161) \quad a_\delta(e_\eta^1, v) = k^2 \int_{\Omega_\delta} \chi_\eta \tilde{\Pi}^{1\delta} v dx dy + \int_{\Omega_\delta} ((u^{1\delta} - \tilde{\Pi}^{1\delta}) \nabla \chi_\eta \cdot \nabla v - v \nabla \chi_\eta \cdot \nabla (u_\delta^1 - \tilde{\Pi}^{1\delta})) dx dy$$

Le premier terme est une erreur de résolution du au développement asymptotique à l'intérieur de la couche limite. Le second terme mesure l'erreur de raccord entre la solution externe et interne. Nous allons estimer successivement chacun de ces termes.

**3.2. Estimations du résidu relatif à l'erreur en zone interne.** On a

$$(3.162) \quad \int_{\Omega_\delta} \chi_\eta \tilde{\Pi}^{1\delta} v dx dy = \Pi^{00} \int_{\Omega_\delta} \chi_\eta v dx dy + \delta \int_{\Omega_\delta} \chi_\eta \tilde{\Pi}^{10} v dx dy + \delta \ln \delta \Pi^{11} \int_{\Omega_\delta} \chi_\eta v dx dy$$

Notons par

$$(3.163) \quad D_\infty^\eta = \left\{ (x, y) \in \Omega_\infty; \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\pi\eta \right\}$$

et par

$$(3.164) \quad D_F^\eta = \{(x, y) \in F_\delta; -2\pi\eta \leq x\}$$

On peut alors majorer la partie du résidu s'exprimant à l'aide de (3.162) par

$$(3.165) \quad \left| k^2 \int_{\Omega_\delta} \chi_\eta \tilde{\Pi}^{1\delta} v dx dy \right| \leq c \left( 1 + \delta \left( \left\| \tilde{\Pi}^{10} \right\|_{L^\infty(D_\infty^\eta)} + \left\| \tilde{\Pi}^{10} \right\|_{L^\infty(D_F^\eta)} + |\ln \delta| \right) \right) \left( \|v\|_{L^1(D_\infty^\eta)} + \|v\|_{L^1(D_F^\eta)} \right)$$

où  $c$  désigne, ici et dans toute la suite, une constante indépendante de  $\delta$ . Les comportements à l'infini de  $\Pi^{10}$  dans  $\widehat{\Omega}_\infty$  et dans  $\widehat{F}$  donnés respectivement par (3.123) et (3.127) entraînent que

$$(3.166) \quad \left\| \tilde{\Pi}^{10} \right\|_{L^\infty(D_\infty^\eta)} + \left\| \tilde{\Pi}^{10} \right\|_{L^\infty(D_F^\eta)} \leq c\eta/\delta$$

L'estimation du terme (3.165) résulte alors des lemmes suivants.

**LEMME 3.3.** *Il existe une constante  $c$  indépendante de  $\eta$  suffisamment petit telle que*

$$(3.167) \quad \|v\|_{L^1(D_\infty^\eta)} \leq c\eta^2 |\ln \eta|^{1/2} \|v\|_{1, \Omega_\infty}$$

**DÉMONSTRATION.** Comme  $\eta \rightarrow 0$ , on peut supposer que  $\eta \leq \pi$  et donc que

$$(3.168) \quad \|v\|_{L^1(D_\infty^\eta)} \leq \|v_\chi\|_{L^1(D_\infty^\eta)}$$

avec

$$(3.169) \quad v_\chi(r, \theta) = \chi(r)v(r, \theta)$$

où  $\chi$  est la fonction introduite en (3.151). On écrit alors

$$(3.170) \quad v_\chi(r, \theta) = - \int_r^{2\pi} \partial_r v_\chi(r', \theta) dr'$$

et ensuite, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$(3.171) \quad |v_\chi(r, \theta)| = \left| \int_r^{2\pi} \partial_r v_\chi(r', \theta) dr' \right| \leq \left( \int_0^{2\pi} |\partial_r v_\chi(r', \theta)|^2 r' dr' \right)^{1/2} \left( \int_r^{2\pi} \frac{1}{r'} dr' \right)^{1/2}$$

et par suite

$$(3.172) \quad \|v\|_{L^1(D_\infty^\eta)} \leq \int_0^{2\pi\eta} \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} |\partial_r v_\chi(r', \theta)|^2 r' dr' \right)^{1/2} \left| \ln \frac{r}{2\pi} \right|^{1/2} r d\theta dr$$

En utilisant une nouvelle fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$(3.173) \quad \|v\|_{L^1(D_\infty^\eta)} \leq \left( \int_0^{2\pi\eta} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\partial_r v_\chi(r', \theta)|^2 r' dr' r d\theta dr \right)^{1/2} \left( \int_0^{2\pi\eta} \int_0^\pi r \left| \ln \frac{r}{2\pi} \right| dr d\theta \right)^{1/2}$$

Comme  $\int_0^t r \ln r dr = \frac{1}{2} t^2 (\ln t - \frac{1}{2})$ , on obtient alors (3.167) après une intégration explicite.  $\square$

LEMME 3.4. *Il existe une constante  $c$  indépendante de  $\eta$  et de  $\delta$  telle que*

$$(3.174) \quad \|v\|_{L^1(D_F^\eta)} \leq c\eta\delta^{1/2} \|v\|_{1, F_\delta}$$

DÉMONSTRATION. On a de même que ci-dessus

$$(3.175) \quad \|v\|_{L^1(D_F^\eta)} \leq \|v_\chi\|_{L^1(D_F^\eta)}$$

où maintenant  $v_\chi$  est définie par

$$(3.176) \quad v_\chi(x, y) = \chi(-x)v(x, y)$$

On écrit alors

$$(3.177) \quad |v_\chi(x, y)| = \left| \int_{-2\pi}^x \partial_x v_\chi(x', y) dx' \right|$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$(3.178) \quad |v_\chi(x, y)| \leq \left( \int_{-2\pi}^0 |\partial_x v_\chi(x', y)|^2 dx' \right)^{1/2} (x + 2\pi)^{1/2}$$

En intégrant alors sur  $D_F^\eta$  et en utilisant une nouvelle fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$(3.179) \quad \|v\|_{L^1(D_F^\eta)} \leq \left( \int_{-2\pi\eta}^0 \int_0^{\pi\delta} \int_{-2\pi}^0 |\partial_x v_\chi(x', y)|^2 dx' \right)^{1/2} \left( \int_{-2\pi\eta}^0 \int_0^{\pi\delta} (x + 2\pi) dx dy \right)^{1/2}$$

qui conduit directement à (3.174).  $\square$

On en déduit alors l'estimation suivante sur la contribution à l'erreur du développement asymptotique interne à la couche limite.

**PROPOSITION 3.7.** *Il existe une constante  $c$ , indépendante de  $\delta$  suffisamment petit telle que*

$$(3.180) \quad \left| a_\delta(\tilde{\Pi}^{1\delta}, \chi_\eta v) \right| \leq c\eta(\eta + \delta^{1/2}) |\ln \eta|^{1/2} \|v\|_{1, \Omega_\delta}$$

**DÉMONSTRATION.** A partir de (3.165) et (3.166), on obtient en utilisant (3.167) et (3.174)

$$(3.181) \quad \left| a_\delta(\tilde{\Pi}^{1\delta}, \chi_\eta v) \right| \leq c(\eta^2 |\ln \eta|^{1/2} + \eta\delta^{1/2}) \|v\|_{1, \Omega_\delta}$$

D'où (3.180) pour  $\eta$  assez petit.  $\square$

**3.3. Estimation du résidu relatif à l'erreur de raccord.** Pour condenser la notation, notons l'erreur de raccord de la façon suivante

$$(3.182) \quad L_\eta^{1\delta} v = \int_{\Omega_\delta} \left( (u^{1\delta} - \tilde{\Pi}^{1\delta}) \nabla \chi_\eta \cdot \nabla v - v \nabla \chi_\eta \cdot \nabla (u_\delta^1 - \tilde{\Pi}^{1\delta}) \right) dx dy$$

Pour prendre en compte la singularité de  $u_\infty^{1\delta}$  lorsque  $r \rightarrow 0$  ou le comportement lorsque  $R$  ou  $-X$  tendent vers l'infini de  $\Pi^{1\delta}$ , on va utiliser de façon essentielle que  $\nabla \chi_\eta$  est nulle en dehors des domaines suivants

$$(3.183) \quad C_\infty^\eta = \{(x, y) \in D_\infty^\eta ; \pi\eta \leq r\} \quad C_F^\eta = \{(x, y) \in D_F^\eta ; x \leq -\pi\eta\}$$

Les dérivées de  $\chi_\eta$  sont données par

$$(3.184) \quad |\nabla \chi_\eta(x, y)| = \frac{1}{\eta} |\chi'(r/\eta)| \quad \text{pour } (x, y) \in \Omega_\infty$$

et

$$(3.185) \quad |\nabla \chi_\eta(x, y)| = \frac{1}{\eta} |\chi'(-x/\eta)| \text{ pour } (x, y) \in F_\delta$$

Notons aussi

$$(3.186) \quad L_\eta^{1\delta} v = L_{\infty\eta}^{1\delta} v + L_{F\eta}^{1\delta} v$$

avec  $L_{\infty\eta}^{1\delta} v$  et  $L_{F\eta}^{1\delta} v$  obtenus en intégrant dans (3.182) respectivement sur  $\Omega_\infty$  et sur  $F_\delta$ , on obtient les majorations suivantes de l'erreur de raccord analogues à celles utilisées pour l'erreur en zone interne

$$(3.187)$$

$$|L_\eta^{1\delta} v| \leq |L_{\infty\eta}^{1\delta} v| + |L_{F\eta}^{1\delta} v|$$

$$(3.188)$$

$$|L_{\infty\eta}^{1\delta} v| \leq \frac{c}{\eta} \left( \left\| u_\infty^{1\delta} - \tilde{\Pi}^{1\delta} \right\|_{L^\infty(C_\infty^\eta)} \|\nabla v\|_{L^1(D_\infty^\eta)} + \left\| \nabla u_\infty^{1\delta} - \nabla \tilde{\Pi}^{1\delta} \right\|_{L^\infty(C_\infty^\eta)} \|v\|_{L^1(D_\infty^\eta)} \right)$$

$$(3.189)$$

$$|L_{F\eta}^{1\delta} v| \leq \frac{c}{\eta} \left( \left\| u_F^{1\delta} - \tilde{\Pi}^{1\delta} \right\|_{L^\infty(C_F^\eta)} \|\nabla v\|_{L^1(D_F^\eta)} + \left\| \nabla u_\infty^{1\delta} - \nabla \tilde{\Pi}^{1\delta} \right\|_{L^\infty(C_F^\eta)} \|v\|_{L^1(D_F^\eta)} \right)$$

Les estimations de l'erreur de raccord dans  $\Omega_\infty$  est donnée par le lemme suivant.

LEMME 3.5. *Il existe une constante  $c$  indépendante de  $\delta$  et de  $\eta$  telle que*

$$(3.190) \quad \left\| u_\infty^{1\delta} - \tilde{\Pi}^{1\delta} \right\|_{L^\infty(C_\infty^\eta)} \leq c\eta \left( \eta + \frac{\delta^2}{\eta^2} \right)$$

et

$$(3.191) \quad \left\| \nabla u_\infty^{1\delta} - \nabla \tilde{\Pi}^{1\delta} \right\|_{L^\infty(C_\infty^\eta)} \leq c \left( \eta + \frac{\delta^2}{\eta^2} \right)$$

DÉMONSTRATION. On décompose d'abord l'erreur intervenant en (3.190) et (3.191) en partie due à l'erreur de développement de  $u_\infty^{1\delta}$  au voisinage de  $(0, 0)$  (voir (3.118), (3.119) et (3.120)) et en erreur entre la solution variationnelle et la solution explicite pour  $(X, Y) \rightarrow \infty$  lors de la résolution des problèmes en zone interne (cf. (3.110), (3.123) et (3.124))

$$(3.192) \quad \left\| u_\infty^{1\delta} - \tilde{\Pi}^{1\delta} \right\|_{L^\infty(C_\infty^\eta)} \leq \left\| u_\infty^{1\delta} - \tilde{U}_{1\infty}^{1\delta} \right\|_{L^\infty(C_\infty^\eta)} + \left\| U_{1\infty}^{1\delta} - \Pi^{1\delta} \right\|_{L^\infty(\tilde{C}_\infty^{\eta/\delta})}$$



où

$$(3.193) \quad \widehat{C}_\infty^{\eta/\delta} = \left\{ (X, Y) \in \widehat{\Omega}_\infty; \pi \frac{\eta}{\delta} \leq R = |(x, y)| \leq 2\pi \frac{\eta}{\delta} \right\}$$

En exprimant les expressions de  $U_{1\infty}^{00}$ ,  $U_{1\infty}^{10}$  et  $U_{1\infty}^{11}$  données en (3.118), (3.119) et (3.120) en variables lentes, on obtient

$$(3.194) \quad \begin{aligned} \left( u_\infty^{1\delta} - \widetilde{U}_{1\infty}^{1\delta} \right) (x, y) &= u_\infty^{00}(x, y) + \delta C_0^{10} H^{(1)}(kr) \\ &- \left( u_\infty^{00}(0, 0) + \delta \left( C_0^{10} \left( \frac{2i}{\pi} \ln \frac{r}{\delta} + \gamma_k \right) + \frac{y}{\delta} \partial_y u_\infty^{00}(0, 0) + \ln \delta \frac{2i}{\pi} C_0^{10} \right) \right) \end{aligned}$$

ce qui s'écrit aussi

$$(3.195) \quad \left( u_\infty^{1\delta} - \widetilde{U}_{1\infty}^{1\delta} \right) (x, y) = (u_\infty^{00}(x, y) - u_\infty^{00}(0, 0) - y \partial_y u_\infty^{00}(0, 0)) + \delta C_0^{10} (H_0^{(1)}(kr) - \left( \frac{2i}{\pi} \ln r + \gamma_k \right))$$

Le développement (3.65) de  $H_0^{(1)}(kr)$  donne

$$(3.196) \quad \begin{aligned} H_0^{(1)}(kr) - \left( \frac{2i}{\pi} \ln r + \gamma_k \right) &= \left( 1 + \frac{2i}{\pi} \ln(kr/2) \right) (j_0((kr/2)^2) - j_0(0)) \\ &+ \frac{1}{i\pi} (y_0((kr/2)^2) - y_0(0)) \end{aligned}$$

Utilisant le fait que  $\partial_x u_\infty^{00}(0, 0) = 0$ , un développement de Taylor de  $u_\infty^{00}(x, y)$  en  $(0, 0)$  et le développement précédent, il vient

$$(3.197) \quad \left| \left( u_\infty^{1\delta} - \widetilde{U}_{1\infty}^{1\delta} \right) (x, y) \right| \leq cr^2(1 + \delta |\ln r|)$$

Ceci conduit à

$$(3.198) \quad \left\| u_\infty^{1\delta} - \widetilde{U}_{1\infty}^{1\delta} \right\|_{L^\infty(C_\infty^\eta)} \leq c\eta^2$$

sachant que pour  $\delta$  assez petit  $\delta |\ln \eta|$  est inférieur à 1.

On dérive maintenant (3.195) et on utilise le fait que  $\partial_x u_\infty^{00}(0, 0) = 0$  pour écrire

$$(3.199) \quad \begin{aligned} \nabla \left( u_\infty^{1\delta} - \widetilde{U}_{1\infty}^{1\delta} \right) (x, y) &= \nabla u_\infty^{00}(x, y) - \nabla u_\infty^{00}(0, 0) \\ &+ \delta C_0^{10} \left( k \left( H_0^{(1)} \right)'(kr) - \frac{2i}{\pi} \frac{1}{r} \right) \begin{bmatrix} x/r \\ y/r \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Comme  $(H_0^{(1)})' = -H_1^{(1)}$ , on a donc

$$(3.200) \quad \begin{aligned} \nabla \left( u_\infty^{1\delta} - \tilde{U}_{1\infty}^{1\delta} \right) (x, y) &= \nabla u_\infty^{00}(x, y) - \nabla u_\infty^{00}(0, 0) \\ &\quad - \delta C_0^{10} \left( k \left( H_0^{(1)} \right)' (kr) + \frac{2i}{\pi} \frac{1}{r} \right) \begin{bmatrix} x/r \\ y/r \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En procédant comme ci-dessus, on obtient maintenant

$$(3.201) \quad \left| \nabla \left( u_\infty^{1\delta} - \tilde{U}_{1\infty}^{1\delta} \right) (x, y) \right| \leq cr(1 + \delta |\ln r|)$$

On obtient alors

$$(3.202) \quad \left\| \nabla u_\infty^{1\delta} - \nabla \tilde{U}_{1\infty}^{1\delta} \right\|_{L^\infty(C_\infty^\eta)} \leq c\eta$$

de la même façon que (3.198).

Suite au fait que  $\Pi^{00} = u_\infty^{00}(0, 0)$  et que  $\Pi^{11} = \frac{2i}{\pi} C_0^{10}$ , le terme  $(\Pi^{1\delta} - U_{1\infty}^{1\delta})(X, Y)$  se réduit à

$$(3.203) \quad (U_{1\infty}^{1\delta} - \Pi^{1\delta})(X, Y) = \delta W^{10}(X, Y)$$

pour  $R \geq \eta/\delta$  pour  $\delta$  suffisamment petit. On obtient alors à partir de (3.93)

$$(3.204) \quad \left\| U_{1\infty}^{1\delta} - \Pi^{1\delta} \right\|_{L^\infty(\hat{C}_\infty^{\eta/\delta})} \leq c \frac{\delta^2}{\eta}$$

ce qui avec (3.198) donne (3.190).

En dérivant aussi la série, on obtient

$$(3.205) \quad \left\| \nabla_{X,Y} (U_{1\infty}^{1\delta} - \Pi^{1\delta}) \right\|_{L^\infty(\hat{C}_\infty^{\eta/\delta})} \leq c \frac{\delta^3}{\eta^2}$$

Mais comme  $\nabla_{x,y} (U_{1\infty}^{1\delta} - \Pi^{1\delta}) = \frac{1}{\delta} \nabla_{X,Y} (U_{1\infty}^{1\delta} - \Pi^{1\delta})$ , on a en fait

$$(3.206) \quad \left\| \nabla_{x,y} (U_{1\infty}^{1\delta} - \Pi^{1\delta}) \right\|_{L^\infty(\hat{C}_\infty^{\eta/\delta})} \leq c \frac{\delta^2}{\eta^2}$$

ce qui avec (3.202) donne (3.191). □

Le lemme suivant donne l'estimation de l'erreur de raccord dans la fente.

LEMME 3.6. *Il existe une constante  $c$  indépendante de  $\delta$  et de  $\eta$  telle que*

$$(3.207) \quad \left\| u_F^{1\delta} - \tilde{\Pi}^{1\delta} \right\|_{L^\infty(C_F^\eta)} \leq c\eta(\eta + \delta \ln \delta)$$

et

$$(3.208) \quad \left\| \nabla u_F^{1\delta} - \nabla \tilde{\Pi}^{1\delta} \right\|_{L^\infty(C_F^\eta)} \leq c(\eta + \delta \ln \delta)$$

DÉMONSTRATION. On commence comme dans la démonstration du lemme précédent par les réductions suivantes

$$(3.209) \quad \left\| u_F^{1\delta} - \tilde{\Pi}^{1\delta} \right\|_{L^\infty(C_F^\eta)} \leq \left\| u_F^{1\delta} - \tilde{U}_F^{1\delta} \right\|_{L^\infty(C_F^\eta)} + \left\| U_F^{1\delta} - \Pi^{1\delta} \right\|_{L^\infty(\hat{C}_F^\eta)}$$

et

$$(3.210) \quad \left\| \nabla u_F^{1\delta} - \nabla \tilde{\Pi}^{1\delta} \right\|_{L^\infty(C_F^\eta)} \leq \left\| \nabla u_F^{1\delta} - \nabla \tilde{U}_F^{1\delta} \right\|_{L^\infty(C_F^\eta)} + \frac{1}{\delta} \left\| \nabla_{XY} U_F^{1\delta} - \nabla_{XY} \Pi^{1\delta} \right\|_{L^\infty(\hat{C}_F^\eta)}$$

avec, à partir de (3.126),

$$(3.211) \quad U_F^{00} = T^{00}, \quad U_F^{10}(X, Y) = T^{10} - ikXT^{00}, \quad U_F^{11} = T^{11}$$

où  $\hat{C}_F^\eta$  est défini de façon analogue à  $\hat{C}_\infty^\eta$ . On procède ensuite comme dans la démonstration du lemme ci-dessus

$$(3.212) \quad \left( u_F^{1\delta} - \tilde{U}_F^{1\delta} \right) (x, y) = T^{00}(\exp(-ikx) - (1-ikx)) + \delta(T^{10} + T^{11} \ln \delta)(\exp(-ikx) - 1)$$

On a alors

$$(3.213) \quad \left\| u_F^{1\delta} - \tilde{U}_F^{1\delta} \right\|_{L^\infty(C_F^\eta)} \leq c\eta(\eta + \delta \ln \delta)$$

$$(3.214) \quad \left\| \nabla u_F^{1\delta} - \nabla \tilde{U}_F^{1\delta} \right\|_{L^\infty(C_F^\eta)} \leq c(\eta + \delta \ln \delta)$$

Pour le second terme  $U_F^{1\delta} - \Pi^{1\delta}$ , on a maintenant

$$(3.215) \quad \Pi^{1\delta} - U_F^{1\delta} = \delta(W^{10} - T^{10})$$

Ce terme est exponentiellement décroissant lorsque  $X \rightarrow -\infty$ . Pour tout  $N$ , il existe donc une constante  $c_N$  telle que

$$(3.216) \quad \left\| \Pi^{1\delta} - U_F^{1\delta} \right\|_{L^\infty(C_F^\eta)} \leq c_N \delta \eta^N$$

$$(3.217) \quad \left\| \nabla_{xy} \tilde{\Pi}^{1\delta} - \nabla_{xy} \tilde{U}_F^{1\delta} \right\|_{L^\infty(C_F^\eta)} \leq c_N \eta^N$$

Ces estimations montrent que les contributions de l'erreur introduite par la solution variationnelle sont négligeables dans la fente par rapport à l'erreur de développement de la solution hors couche limite induisant ainsi (3.207) et (3.208).  $\square$

On peut alors majorer les contributions au résidu relatives aux erreurs de raccord.

PROPOSITION 3.8. *Il existe une constante  $c$  indépendante de  $\delta$  suffisamment petit telle que*

$$(3.218) \quad |L^{1\delta}v| \leq c \left( \delta^{1/2}(\eta + \delta |\ln \delta|) + \eta(\eta + \frac{\delta^2}{\eta^2}) |\ln \eta|^{1/2} \right) \|v\|_{1,\Omega_\delta}$$

DÉMONSTRATION. En utilisant (3.188), (3.190) et (3.191), il vient

$$(3.219) \quad |L_{\infty\eta}^{1\delta}v| \leq \frac{c}{\eta}(\eta + \frac{\delta^2}{\eta^2}) \left( \eta \|\nabla v\|_{L^1(D_\infty^\eta)} + \|v\|_{L^1(D_\infty^\eta)} \right)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$(3.220) \quad \|\nabla v\|_{L^1(D_\infty^\eta)} \leq c\eta \|\nabla v\|_{0,\Omega_\delta}$$

L'inégalité (3.167) conduit alors à

$$(3.221) \quad |L_{\infty\eta}^{1\delta}v| \leq c\eta(\eta + \frac{\delta^2}{\eta^2}) \left( 1 + |\ln \eta|^{1/2} \right)$$

En utilisant maintenant (3.189), (3.207) et (3.208), il vient

$$(3.222) \quad |L_{F\eta}^{1\delta}v| \leq \frac{c}{\eta} \left( \eta(\eta + \delta |\ln \delta|) \|\nabla v\|_{L^1(D_F^\eta)} + (\eta + \delta |\ln \delta|) \|v\|_{L^1(D_F^\eta)} \right)$$

De façon analogue à ci-dessus pour  $L_{\infty\eta}^{1\delta}v$ , en utilisant maintenant (3.174), on arrive à

$$(3.223) \quad |L_{F\eta}^{1\delta}v| \leq \frac{c}{\eta} \left( \eta^{3/2}\delta^{1/2}(\eta + \delta |\ln \delta|) + \eta\delta^{1/2}(\eta + \delta |\ln \delta|) \right) \leq c\delta^{1/2}(\eta + \delta |\ln \delta|)$$

Regroupant (3.221) et (3.223), on obtient (3.218).  $\square$

**3.4. Erreur globale et estimations hors couche limite.** En regroupant les estimations précédentes, on est en mesure à présent de donner une majoration globale de l'erreur.

THÉORÈME 3.3. *L'erreur globale vérifie*

$$(3.224) \quad \|u_\delta - ((1 - \chi_\eta)u^{1\delta} + \chi_\eta\Pi^{1\delta})\|_{1,\Omega_\delta} \leq c \left( \delta^{1/2}(\eta + \delta |\ln \delta|) + \eta(\eta + \frac{\delta^2}{\eta^2}) |\ln \eta|^{1/2} + \eta^2 |\ln \eta|^{1/2} \right)$$

pour  $\delta$  assez petit et  $c$  une constante indépendante de  $\delta$ .

DÉMONSTRATION. Il suffit de regrouper (3.167) et (3.218) et d'utiliser le résultat général de stabilité (3.10) pour démontrer le théorème.  $\square$

L'estimation (3.224) n'est pas "parlante". On va choisir pour fonction  $\eta$  celle des fonctions  $\delta^s$  ( $0 < s < 1$ ) qui assure le meilleur taux de convergence.

**COROLLAIRE 3.1.** *Parmi tous les choix  $\eta = \delta^s$  ( $0 < s < 1$ ), la fonction  $\eta = \delta^{3/4}$  donne le meilleur taux de convergence avec*

$$(3.225) \quad \left\| u_\delta - ((1 - \chi_\eta)u^{1\delta} + \chi_\eta \Pi^{1\delta}) \right\|_{1, \Omega_\delta} \leq c \delta^{5/4} |\ln \delta|^{1/2}$$

**DÉMONSTRATION.** Clairement, le second membre de (3.224) est alors majoré par

$$(3.226) \quad c \left( \delta^{1/2+s} (1 + \delta^{1-s} |\ln \delta|) + (\delta^{2s} + \delta^{2-s}) |\ln \delta|^{1/2} \right)$$

et pour  $\delta$  assez petit par

$$(3.227) \quad c \left( \delta^{1/2+s} + (\delta^{2s} + \delta^{2-s}) |\ln \delta|^{1/2} \right)$$

Le meilleur taux de convergence est ainsi assuré en déterminant le point  $s$  qui maximise la fonction

$$(3.228) \quad \ell(s) = \min(1/2 + s, 2s, 2 - s)$$

Une étude graphique élémentaire termine la démonstration. □

On peut montrer alors que  $u_\delta$  converge vers  $u_\infty^{00}$  avec un ordre optimal de convergence en dehors de la couche limite.

**COROLLAIRE 3.2.** *Pour tout  $r_0 > 0$ , il existe une constante  $c_0$  indépendante de  $\delta$  suffisamment petit telle que*

$$(3.229) \quad \left\| u_\delta - u_\infty^{00} \right\|_{1, \Omega_{\infty, r_0}} \leq c_0 \delta$$

avec

$$(3.230) \quad \Omega_{\infty, r_0} = \{(x, y) \in \Omega_\infty ; r > r_0\}$$

**DÉMONSTRATION.** On choisit  $\delta$  vérifiant  $2\pi\delta^{3/4} \leq r_0$ . On a ainsi  $\chi_\eta \equiv 0$  sur  $\Omega_{\infty, r_0}$  et par suite

$$(3.231) \quad \left\| u_\delta - u_\infty^{00} \right\|_{1, \Omega_{\infty, r_0}} \leq \left\| e_\eta^1 \right\|_{1, \Omega_\delta} + \delta \left\| H_0^{(1)}(kr) \right\|_{1, \Omega_{\infty, r_0}}$$

Comme  $\left\| H_0^{(1)}(kr) \right\|_{1, \Omega_{\infty, r_0}}$  est fini, le résultat suit. □

On peut de même donner une estimation d'erreur entre le coefficient de transmission exact  $T^\delta$  apparaissant en (3.29) et le coefficient  $T^{00}$  obtenu en (3.109).

**COROLLAIRE 3.3.** *Il existe une constante  $c$  indépendante de  $\delta$  assez petit telle que*

$$(3.232) \quad |T^\delta - T^{00}| \leq c\delta^{1/2} |\ln \delta|$$

**DÉMONSTRATION.** De même que pour le corollaire ci-dessus, on obtient

$$(3.233) \quad \|u_\delta - u_F^{00}\|_{1,\Omega_{F,r_0}} \leq c\delta |\ln \delta|$$

où maintenant

$$(3.234) \quad \Omega_{F,r_0} = \{(x, y) \in \Omega_F ; x < -r_0\}$$

En utilisant (3.29), on peut écrire

$$(3.235) \quad (u_\delta - u_F^{00})(x, y) = (T^\delta - T^{00}) \exp(-ikx) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m^- \exp(-i\sqrt{k^2 - \frac{m^2}{\delta^2}}x) \cos(m\frac{y}{\delta})$$

On a alors à l'aide des inégalités de Parseval

$$(3.236) \quad \pi\delta |(T^\delta - T^{00}) \exp(-ikx)|^2 \leq \int_0^{\pi\delta} |(u_\delta - u_F^{00})(x, y)|^2 dx$$

d'où l'estimation (3.232), à partir de (3.233), en intégrant par rapport à  $x$ .  $\square$

#### 4. Commentaires bibliographiques

Le problème considéré dans ce chapitre provient de la thèse de Tordeux [22]. La méthode de raccordement est cependant celle qui est introduite dans la thèse de Makhlof qui doit paraître vers la fin du premier trimestre 2008 [13].

Les développements asymptotiques, du type de celui qui est considéré dans ce chapitre, nécessitent généralement des éléments d'analyse classique en plus des outils d'analyse fonctionnels usuels en théorie des équations aux dérivées partielles. Ceux intervenant ici concernent les développements en série de Fourier, disponibles par exemple dans les ouvrages utilisés pour les enseignements en maîtrise, et les fonctions de Bessel. Les éléments sur les fonctions de Bessel utilisés dans ce cours peuvent être trouvés, par exemple, dans [27, 26].

L'approche par développements asymptotiques raccordés du problème ci-dessus, et d'autres problèmes similaires, est présentée dans l'article de Mc Kyver et Rawlins [14]. L'analyse asymptotique effectuée dans cette dernière référence est uniquement formelle et repose sur des techniques d'analyse classique. Le traitement rigoureux concernant l'existence du développement asymptotique pour ce problème ainsi qu'une estimation d'erreur, à tout ordre pour le développement, constitue la thèse de Tordeux. Un exposé plus synthétique des résultats se trouve dans les références [11, 10].

Signalons enfin une étude qui montre que pour certains problèmes les approches par développement double-échelle ou développements asymptotiques raccordés [23] sont équivalents.





## Bibliographie

1. Y. Achdou, *Effet d'un revêtement métallisé sur la réflexion d'une onde électromagnétique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **314** (1992), no. 3, 217–222.
2. Y. Achdou, O. Pironneau, and F. Valentin, *Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries*, J. of Comput. Phys. **147** (1998), no. 1, 187–218.
3. C. M. Bender and S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers – Asymptotic Methods and Perturbation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1999.
4. H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. théorie et applications.*, Collection Mathématiques Appliquées Pour la Maîtrise, Masson, Paris, 1983.
5. G. Caloz, M. Costabel, M. Dauge, and G. Vial, *Asymptotic expansion of the solution of an interface problem in a polygonal domain with thin layer*, Asymptotic Analysis **50** (2006), no. 1/2, 121–173.
6. J. Chazarain and A. Piriou, *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*, Gauthiers-Villars, Paris, 1981.
7. J. Cousteix and J. Mauss, *Analyse asymptotique et couche limite*, Mathématiques et Applications, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
8. M. Van Dyke, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, annotated edition ed., The Parabolic Press, Stanford, California, 1975.
9. W. Eckhaus, *Matched Asymptotic Expansions and Singular Perturbations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 6, North-Holland Publishing Company, Amsterdam and London, 1973.
10. P. Joly and S. Tordeux, *Asymptotic analysis of an approximate model for time harmonic waves in media with thin slots*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **40** (2006), no. 1, 63–97.
11. ———, *Matching of Asymptotic Expansions for Wave Propagation in Media with Thin Slots  $i$  : The Asymptotic Expansion*, Multiscale Modeling and Simulation : A SIAM Interdisciplinary Journal **5** (2006), no. 1, 304–336.
12. J. L. Lions, *Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 323, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1973.
13. A. Makhlouf, *Titre provisoire : Raccords 2d-1d par développements asymptotiques raccordés dans des problèmes de diffraction d'onde*, A paraître avril 2008, 2008.
14. P. McIver and A. D. Rawlins, *Two-dimensional wave-scattering problems involving parallel-walled ducts*, Quart. J. Mech. Appl. Math. **46** (1993), no. 1, 89–116.

15. William McLean, *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, and New York, USA, 2000.
16. J.-C. Nédélec and F. Starling, *Integral equation methods in a quasi-periodic diffraction problem for the time-harmonic Maxwell's equations*, SIAM J. Math. Anal. **6** (1991), 1679–1701.
17. Andrew F. Peterson, Scott L. Ray, and Raj Mittra, *Computational methods for electromagnetics*, IEEE Press, Piscataway, New-Jersey, 1998.
18. J.-R. Poirier, *Modélisation électromagnétique des effets de rugosité surfacique*, Ph.D. thesis, INSA, Toulouse, 2000.
19. J.-R. Poirier, A. Bendali, and P. Borderies, *Asymptotic Analysis of the Scattering of a Time-Harmonic TM Wave and Applications*, to appear.
20. ———, *Impedance boundary conditions for the scattering of time-harmonic waves by rapidly varying surfaces*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation **54** (2006), no. 3, 995–1005.
21. M. Taylor, *Partial differential equations I, basic theory*, Springer-Verlag, New York, 1996.
22. S. Tordeux, *Méthodes asymptotiques pour la propagation des ondes dans les milieux comportant des fentes*, Ph.D. thesis, Université Versailles-Saint-Quentin en Yvelines, 2004.
23. S. Tordeux, G. Vial, and M. Dauge, *Matching and multiscale expansions for a model singular perturbation problem*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **343** (2006), no. 10, 637–642.
24. J. Van Bladel, *Electromagnetic fields (Revised Printing)*, Hemisphere Publishing Corporation, New York, Washington, Philadelphia, London, 1985.
25. A. B. Vasil'eva, V. F. Butazov, and L. Kalatchev, *The boundary function method for singular perturbation problems*, Studies in Applied Mathematics, vol. 14, SIAM, Philadelphia, 1995.
26. Z. X. Wang and D. R. Guo, *Special Functions*, World Scientific Publishing Co. Inc., Teaneck, New-Jersey, 1989.
27. G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions. Reprint of the second (1944) edition. Cambridge Mathematical Library.*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.