

Elements finis  
d'ordre élevé  
sur simplexes  
pour l'électromagnétisme numérique :  
degrés de liberté et générateurs en dualité

Francesca RAPETTI

Laboratoire J.A. Dieudonné  
Université de Nice Sophia-Antipolis  
frapetti@math.unice.fr

JOSO Conf., Pau, 10 Mars 2016

# Les mots du titre

## Méthode des Éléments finis :

technique basée sur la méthode de Galerkin pour la discrétisation d'une EDP réformulée sous forme variationnelle. L'espace discret est décrit par des fonctions (**générateurs**) polynomiales sur un maillage du domaine, univoquement déterminées dans chaque élément du maillage par des formes linéaires (**degrés de liberté**)

## Ordre élevé

convergence de la solution numérique  $u_\delta$  à la solution exacte  $u$   
*algébrique* par rapport à la taille  $h$  des éléments du maillage utilisé  
*exponentielle* par rapport au degré  $p$  d'approximation polynomiale (si  $u$  très régulière)

## $p$ -Simplexes de $\mathbb{R}^d$ , avec $p$ entier, $0 \leq p \leq d$

enveloppe convexe non vide de  $p+1$  points de  $\mathbb{R}^d$  qui ne sont pas contenus sur un même hyperplan de  $\mathbb{R}^d$  (0-simplexe, nœud, 1-simplexe, arête....)

## Électromagnétisme numérique

Eqs de Maxwell comme point de départ : le but est de les utiliser dans la modélisation mathématique (mettre en eqs, vérifier que ces eqs constituent un pb bien posé, discrétiser et résoudre sur ordinateur) afin de résoudre des pbs concrets

Interpolation nodale d'une fonction scalaire sur un  $p$ -simplexe de  $\mathbb{R}^d$

## Sur un intervalle $I$

Interpolation polynomiale de  $f$  en  $n = N + 1$  points  $x_k \in I$  sur la **base canonique**  $\{x^{j-1}\}_{j=1,\dots,n}$

$$f(x) \approx I_N f(x) = \sum_{j=0}^N a_j x^j \quad \text{with} \quad f_k := f(x_k) = I_N f(x_k)$$

Les coefficients  $a_j$  sont solution du **système linéaire de Vandermonde**

$$V \mathbf{a} = \mathbf{f}, \quad V_{kj} = x_k^{j-1} \quad (\text{ici, } \det(V) = \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k))$$

**En termes de fonctions cardinales**,  $\phi_i(x) \in \mathbb{P}_N(I)$  définies par  $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$  on a

$$f(x) \approx I_N(f)(x) = \sum_{k=1}^n f_k \phi_k(x) \quad \text{avec} \quad \phi_k(x) = \sum_{j=1}^n c_{kj} \psi_j(x)$$

Les coefficients  $\mathbf{c}_k = (c_{k1}, c_{k2}, \dots, c_{kn})^t$  sont solution du **système linéaire généralisé de Vandermonde**

$$V \mathbf{c}_k = \mathbf{e}_k, \quad V_{kj} = \psi_j(x_k) \quad (\text{ici, } (\mathbf{e}_k)_j = \delta_{kj}).$$

**Le conditionnement de  $V$  est sensible au choix de la base  $\{\psi_j\}_{j=1,n}$  pour  $\mathbb{P}_N(I)$**   
(le meilleur choix est prendre une base  $\{\psi_i\}_{i=1,n}$  qui soit  $L^2$ -orthogonal sur  $I$ ).

# Sur un intervalle

- **Runge's phenomenon (1901)**

Polynomial fitting **on equally spaced nodes**

may lead to unbounded and oscillatory interpolation

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |f(x) - \Pi_N^{ES} f(x)| \neq 0$$

To reduce oscillations, combine :

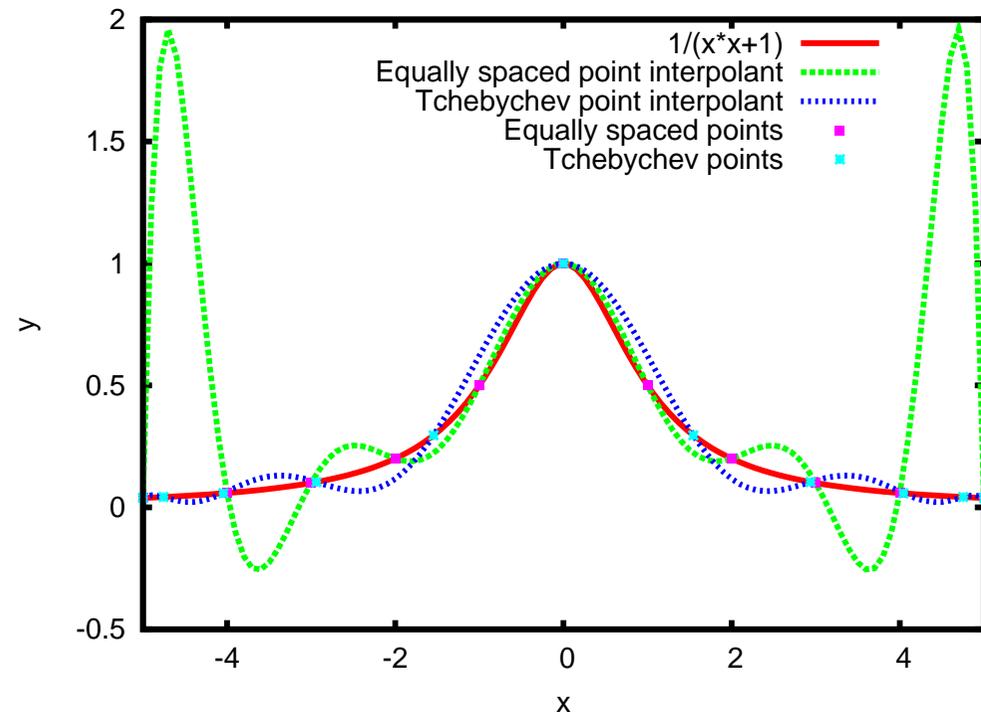
- Partitioning of the interpolation interval into **"elements"**

- Clever choice of interpolation points (e.g., **Gauss-Lobatto (GL) points** of Chebyshev or Legendre type)

$$\|f(x) - \Pi_N^{Tch} f(x)\|_{L_w^2} \leq N^{-s} \|f\|_{H_w^s}$$

Straightforward extension to higher dimension on tensorial domains (products of 1D intervals)

**Which points on triangles or tetrahedra ???**  
(this is another story to tell!!)



## Éléments nodaux sur un $p$ -simplexe $v$ , $1 \leq p \leq d$

$$v = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, 0 \leq \lambda_j(\mathbf{x}) \leq 1, 1 \leq j \leq p+1 \right\}.$$

$\lambda_j(\mathbf{x})$ ,  $1 \leq j \leq p+1$ , coordonnées barycentriques de  $\mathbf{x} \in v$  par rapport aux  $p+1$  sommets de  $v$

$$T_r(v) = \left\{ \mathbf{x} \in v, \lambda_j(\mathbf{x}) \in \left\{ 0, \frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \dots, \frac{(r-1)}{r}, 1 \right\}, 1 \leq j \leq p+1 \right\}$$

Etant donné des degrés de liberté (ddl) de type Lagrange

$$\sigma_i : f \rightarrow \sigma_i(f) := f(\mathbf{x}_i) \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}_i \in T_r(v)$$

pour l'espace discret choisi dans  $v$ , ici  $\mathbb{P}_r(v)$ , **on cherche** :

générateurs  $\phi_j \in \mathbb{P}_r(v)$  tels que  $\sigma_i(\phi_j) = \delta_{ij}$  (*dualite*)

$r = 1$  : on a  $\phi_k = \lambda_k$

$r = 2$  : on a  $\phi_k = \lambda_k(2\lambda_k - 1)$ ,  $1 \leq k \leq p+1$ , et  $\phi_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j$ ,  $1 \leq i < j \leq p+1$

$r = 3$  : ..... (formule générale à page 84 du Raviart-Thomas)

Dualité entre  $\phi_j$  et  $\sigma_i$  se traduit matriciellement par

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}, \quad \text{où } (\mathbf{V})_{ij} = \sigma_i(\phi_j)$$

On retrouve la  $\mathbf{V}$  matrice de Vandermonde généralisée

Pourquoi avons nous tant besoin de la dualité entre ddls et générateurs ?

(i) Pour définir l'opérateur d'interpolation :

$$f(\mathbf{x}) \approx I_r(f)(\mathbf{x}) = \sum_k f_k \phi_k(\mathbf{x}) \implies f_k \approx \sigma_k(f)$$

(ii) Pour imposer facilement des conditions au bord de type essentiel (Dirichlet) :  $\sigma_k(f) = \sigma_k(g_D)$

(iii) Parce que c'est l'implémentation classique dans des codes d'éléments finis (FreeFEM++, CASTEM2000, Samcef ...)

(iv) Parce que les générateurs sont introduits ainsi dans les livres (même dans le BMR2004 !)

# Elements finis et équations de Maxwell

FEs doivent être capables de représenter un champ à partir d'un nombre fini de ddl's mais la **nature des ddl's**, flux, circulations, etc., va définir des supports pour les ddl's autres que les nœuds

FEs de **type Whitney** (les ddl's sont des intégrales de formes différentielles à reconstruire)

$B, H, E, \dots$  ne sont rien d'autre que les **éléments** (vecteurs) d'une **représentation mathématique** de phénomènes électromagnétiques, et pas nécessairement l'objet le plus approprié à manipuler.

La **forme différentielle** en électromagnétisme est le concept le plus approprié pour une description mathématique qui

- nous informe (parce qu'elle la respecte) de la nature du champ décrit
- est compatible avec la structure géométrique des équations de Maxwell

# Les éléments finis de Whitney sur les simplexes

# Introduction

Les **éléments finis de Whitney** (Whitney 1957, Bossavit, Verité 1982)

- **très populaires** pour résoudre des pbs en électromagnétisme (Bossavit 1998, Monk 2003)

- vérifient un certain nombre de **“bons” critères de discrétisation**

(respect de la nature intrinsèque de certaines quantités, conservation de propriétés d'origine géométrique, implementation numérique aisée, ...)

- leurs proxies appartiennent à la famille d'éléments finis proposée par Nédélec 1980

- permettent de **définir explicitement les fonctions de base** des espaces discrets

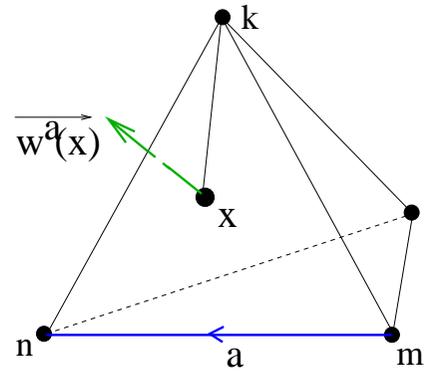
- sont des **interpolants discrets pour les formes différentielles** sur les complexes cellulaires (Kotiuga 1984, Bossavit après), les **ddl exprimés sous forme d'intégrales** ont une signification physique

**Relecture sous un point de vue géométrique** de ces éléments

Définition des éléments de Whitney d'**ordre élevé** (Bossavit, R. 2007-8)

## Les éléments d'arête

$$\begin{aligned}\vec{w}^a(x) &= \vec{\alpha} \times \vec{ox} + \vec{\beta} \\ &= \frac{\vec{kl} \times \vec{kx}}{6 \text{vol}(klmn)}\end{aligned}$$



- Champ de **vecteurs** (Nédélec 1980, Bossavit et Verité 1982)
- **Partie tangentielle continue** au passage d'une facette du maillage
- La **circulation**  $\int_{a'} \vec{w}^a(x) \cdot \vec{dx} = 1$  si  $a' = a$ , sinon 0
- L'espace  $W^1 = \text{span}\{\vec{w}^a, a \in \mathcal{A}\}$  de dimension finie peut jouer le rôle d'espace d'approximation interne (de Galerkin) pour  $H(\text{rot})$ .

Par conséquent, le **champ électrique**  $\vec{E}$  en un point  $x$  est approché par

$$\vec{E}(x) \approx \sum_{a \in \mathcal{A}} E_a \vec{w}^a(x), \quad \text{où} \quad E_a = \int_a \vec{E}(x) \cdot \vec{dx} \quad (\text{f.é.m})$$

- **En coordonnées barycentriques**  $\lambda_i(x)$ ,  $i = m, n, k, l$ , du point  $x$

$$\vec{w}^a(x) = \lambda_m(x) \vec{\nabla} \lambda_n - \lambda_n(x) \vec{\nabla} \lambda_m$$

# Valeurs propres de Maxwell dans une cavité

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  une cavité vide à parois métalliques non excitée

Trouver les valeurs  $\omega^2$  et les champs électriques non nuls  $\mathbf{u}$  tels que

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{u} \right) - \omega^2 \epsilon \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u}) = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

Soit  $X_h \subset H_0(\text{rot}; \Omega)$  un espace discret de dimension finie

trouver  $(\omega_h^2, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{R} \times X_h$  tels que :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{u}_h \nabla \times \mathbf{v}_h = \omega_h^2 \int_{\Omega} \epsilon \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h, \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h.$$

Si l'on pose  $\mathbf{v}_h = \nabla \varphi_h \implies \int_{\Omega} \epsilon \mathbf{u}_h \cdot \nabla \varphi_h = 0, \forall \varphi_h \in \Phi_h \subset H_0^1(\Omega)$   
(forme faible de  $\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u}_h) = 0$ )

Ceci comporte  $\nabla \Phi_h \subset X_h$  avec  $\Phi_h$  assez grand :

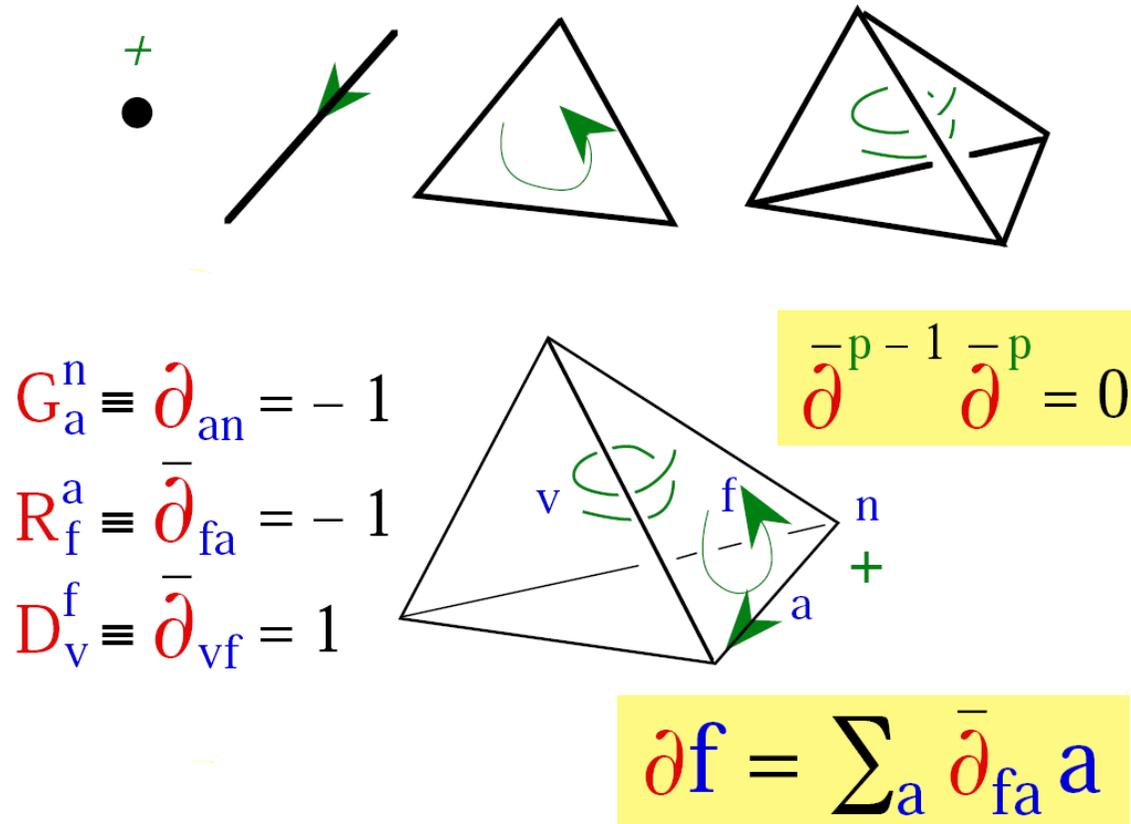
OK si  $X_h$  espace d'éléments d'arête

pas vrai si  $X_h$  est un espace d'éléments finis nodaux vectoriels

# Matrices d'incidence

Etant donné un domaine borné  $\Omega \in \mathbb{R}^3$ , un **maillage simplicial**  $m$  dans  $\Omega$  est un pavage conforme de  $\overline{\Omega}$  par des tétraèdres.

Position des nœuds, connectivité, orientation interne

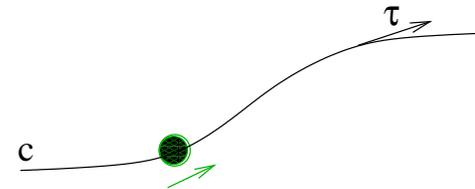


Opérateur de bord  $\partial$  sur les chaînes ( $\partial \circ \partial = 0$ ) représenté par  $G^t$ ,  $R^t$  ou  $D^t$  selon la dimension

# Les champs physiques comme $p$ -formes différentielles

Le champ électrique est une 1-forme différentielle  $e$ ,  
i.e., une application linéaire et continue par rapport à  $c$

$$e : \begin{array}{ccc} \text{courbe orientée} & \rightarrow & \text{réel} \\ c & & \int_c e \end{array}$$



La représentation mathématique du champ  $E$  dépend de la métrique alors que  
sa circulation ne dépend pas de la métrique et c'est le véritable objet d'intérêt ( $\int_c e = \int_c E \cdot \tau$ )

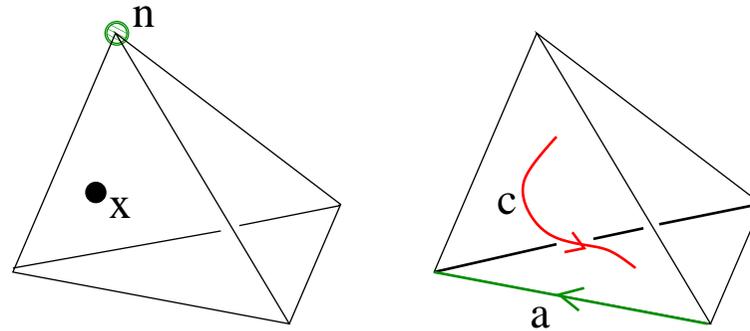
Dualité courbe-forme : courbes sont les détecteurs,  $e$  le champ lui même,  $\int_c e$  la mesure

Au niveau discret ,

une courbe orientée est représentée par une 1-chaîne  $c = \sum_{s \in \mathcal{S}^p} \alpha_s s$   
(somme formelle d'arêtes du maillage à coefficients entiers ou réels)

le champ  $E$  est représenté par une 1-cochaîne  $e : c \longrightarrow \int_c e = \sum_{s \in \mathcal{S}^p} \alpha_s \int_s e$   
(dual d'une 1-chaîne)

# Les interpolants des champs : un point de vue géométrique



Idée : exprimer point, ligne, surface, ..., comme somme pondérée de nœuds, arêtes, faces, ...

$$c \approx \sum_{a \in \mathcal{A}} w^a(c) a \quad \Rightarrow \quad \int_c e \approx \sum_{a \in \mathcal{A}} w^a(c) \int_a e \quad \Rightarrow \quad e \approx \sum_{a \in \mathcal{A}} e_a w^a$$

Réprésentation d'une  $p$ -surface par une  $p$ -chaîne ?  $\Rightarrow$  Les formes de Whitney

Pour les nœuds,  $x \approx \mathcal{P}^t x = \sum_{n \in \mathcal{N}} \lambda_n(x) n$ , et alors  $\varphi \approx \mathcal{P}\varphi = \sum_{n \in \mathcal{N}} \varphi_n w^n$  pour quel  $w^n$  ??

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \mathcal{P}^t x \rangle &= \langle \varphi, \sum_{n \in \mathcal{N}} \lambda_n(x) n \rangle = \sum_{n \in \mathcal{N}} \lambda_n(x) \langle \varphi, n \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathcal{N}} \lambda_n(x) \varphi_n = \langle \sum_{n \in \mathcal{N}} \varphi_n \lambda_n, x \rangle = \langle \mathcal{P}\varphi, x \rangle \end{aligned}$$

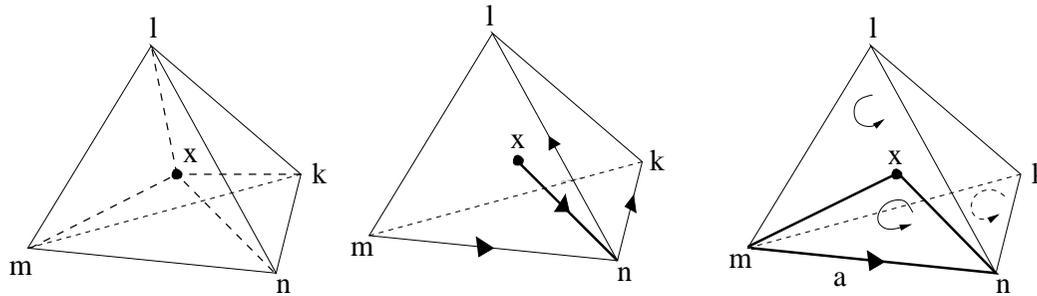
$$\begin{aligned} w^n &= \lambda_n && \text{Whitney 0-forme associée à } n, \\ \langle w^n, x \rangle &= \lambda_n(x) && \text{poids de } x \text{ dans la 0-chaîne } \mathcal{P}^t x \end{aligned}$$

# Les interpolants des champs : un point de vue géométrique

Pour un **segment orienté**  $xy$  du point  $x$  au point  $y$

$$\mathcal{P}^t y = \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle w^n, y \rangle n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}^t xy = \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle w^n, y \rangle \mathcal{P}^t xn$$

Une seule façon raisonnable d'exprimer  $xn$  comme somme pondérée  $\mathcal{P}^t xn$  d'arêtes



$$\mathcal{P}^t xn = \lambda_m(x)nm - \lambda_l(x)nl - \lambda_k(x)nk = \sum_{n \in \mathcal{N}} \mathbf{G}_a^n \lambda_{a-n}(x)a$$

... et pour une **face orientée** ....

$$\mathcal{P}^t(x \vee a) = \lambda_l(x)lmn + \lambda_k(x)kmn = \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{R}_f^a \lambda_{f-a}(x)f$$

$$\mathcal{P}^t xy = \sum_{k \in \mathcal{N}, a \in \mathcal{A}} G_a^k \lambda_{a-k}(x) \langle w^k, y \rangle a \equiv \sum_{a \in \mathcal{A}} \langle w^a, xy \rangle a$$

Or,  $\langle w^a, xx \rangle = 0$  et  $d$  est le dual de  $\partial$ , on obtient

$$\begin{aligned} \langle w^a, xy \rangle &= \sum_{k \in \mathcal{N}} G_a^k \lambda_{a-k}(x) \langle w^k, y - x \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathcal{N}} G_a^k \lambda_{a-k}(x) \langle w^k, \partial(xy) \rangle = \sum_{k \in \mathcal{N}} G_a^k \lambda_{a-k}(x) \langle dw^k, xy \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^a &= \sum_{k \in \mathcal{N}} G_a^k \lambda_{a-k} dw^k && \text{1-forme de Whitney} \\ \langle w^a, xy \rangle &&& \text{poinds de } xy \text{ dans } \mathcal{P}^t xy \end{aligned}$$

Double rôle des formes de Whitney :

elles construisent une forme à partir d'un vecteur de scalaires ( $\mathcal{P}$ )

elles approchent une  $p$ -variété par une  $p$ -chaîne ( $\mathcal{P}^t$ )

# Les $p$ -formes de Whitney de degré polynomial 1

## Définition récursive des $p$ -formes de Whitney sur un $p$ -simplexe $s \subset v$

(Bossavit 2002)

$$w^s(x) = \sum_{\sigma \in \{(p-1)\text{-simplexes}\}} \bar{\partial}_{s\sigma} \lambda_{s-\sigma}(x) dw^\sigma, \quad W_1^p(v) = \text{span}\{w^s\}$$

$\bar{\partial}_{s\sigma}$  est l'élément de la matrice d'incidence reliant le  $(p-1)$ -simplexe  $\sigma$  au  $p$ -simplexe  $s$

$d$  est l'opérateur de dérivée extérieure  $W^{p-1} \rightarrow W^p$  dual de  $\partial$

$$\text{(Théoreme de Stokes : } \int_{\partial c} w = \int_c dw \quad \forall c \in C_p \text{ et } \forall w \in W^{p-1})$$

$$w^n = \lambda_n,$$

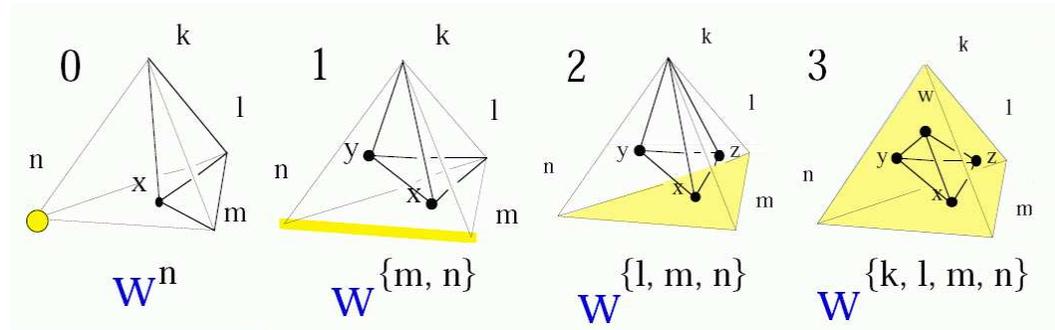
$$w^e = \sum_{n \in \mathcal{N}} \mathbf{G}_a^n \lambda_{a-n} dw^n = \lambda_\ell \nabla \lambda_m - \lambda_m \nabla \lambda_\ell, \quad a = \{\ell, m\}$$

$$w^f = \sum_{a \in \mathcal{E}} \mathbf{R}_f^a \lambda_{f-a} dw^a = 2 \lambda_\ell \nabla \lambda_m \times \nabla \lambda_k + \dots \quad (\text{deux termes}), \quad f = \{\ell, m, k\}$$

$$w^t = \sum_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{D}_t^f \lambda_{t-f} dw^f = 6 \lambda_\ell \nabla \lambda_m \times \nabla \lambda_k \cdot \nabla \lambda_n + \dots \quad (\text{trois termes}), \quad t = \{\ell, m, k, n\}$$

# Le calcul des poids

Le poids d'une  $p$ -surface  $M$  par rapport à un  $p$ -simplexe  $s$  est  $\langle w^s, M \rangle = \int_M w^s$



**Proposition** : Soit  $v = \{k, l, m, n\}$  de volume unitaire  $|klmn|$ . Alors

$$\langle w^n, x \rangle = |xklm|, \quad x \in v$$

$$\langle w^a, xy \rangle = |xykl|, \quad xy \subset v, \quad a = \{m, n\}$$

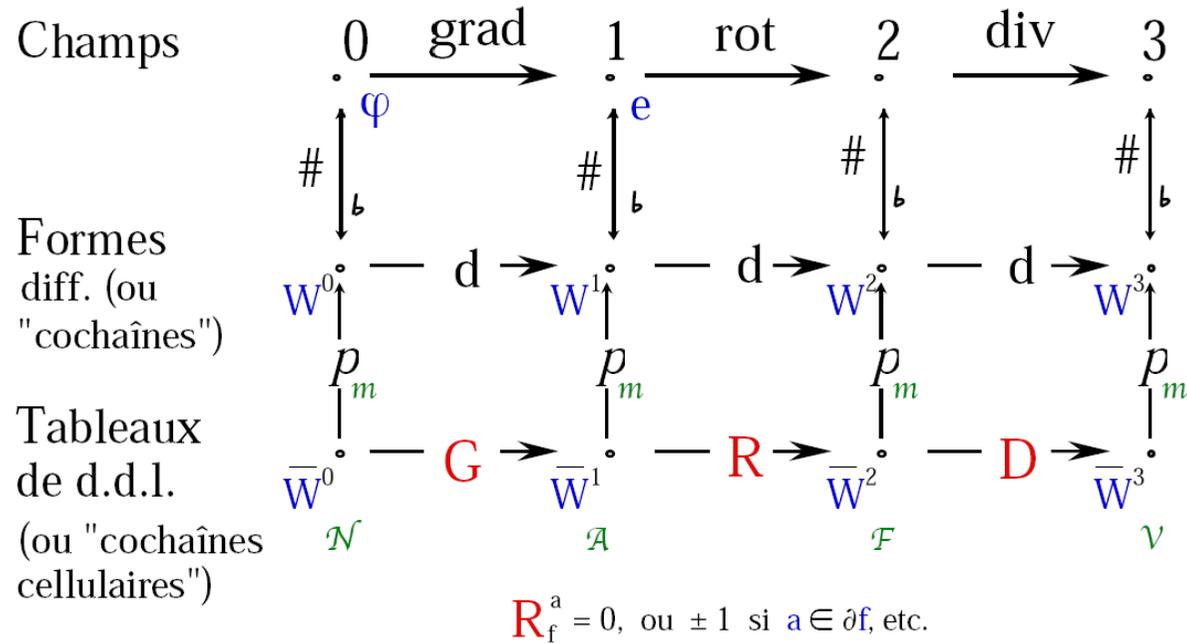
$$\langle w^f, xyz \rangle = |xyzl|, \quad xyz \subset v, \quad f = \{m, n, k\}$$

$$\langle w^v, xyzt \rangle = |xyzt|, \quad xyzt \subset v.$$

Les poids correspondent à des volumes qui sont des déterminants (récursivité!!)

(R., CRAS 2004)

# Diagramme commutatif, suites exactes, topologie



$$\mathcal{P}(\{\mathbf{h}_a; a \in \mathcal{A}\}) = \sum_a \mathbf{h}_a w^a \equiv h, \quad \nabla \times w^a = \sum_f R_f^a w^a, \quad \nabla \times h = \sum_f (Rh)_f w^f$$

**Exactitude** :  $\text{Im}(d, W^{p-1}) = \text{Ker}(d, W^p)$ ,  $1 \leq p \leq d$  (on a toujours  $d \circ d = 0$ )

**Nombres de Betti** :  $b_i = \dim \mathcal{H}_i(\Omega) = \dim(\text{Ker}(d, W^p) / \text{Im}(d, W^{p-1}))$ ,  $0 \leq i \leq d$

**Caractéristique d'Euler-Poincaré** :  $\chi(\Omega) = b_0 - b_1 + b_2 - b_3$  (**invariant topologique**)

$\chi(\Omega) = 1$  si  $\Omega$  est contractile,  $\chi(\Omega) = 0$  si  $\Omega$  est un tore plein à un trou

# Vers les ordres polynomiaux élevés

Pourquoi? Parce que **convergence et précision sont meilleures** à parité de nombre de ddls mais **pas de définition universale pour les fonctions de base** (Ainsworth, Arnold, Demkowicz, Graglia, Hiptmair, Ren, Schorbel, Webb ... )

**Heuristique** : les  $p$ -formes d'ordre élevé dans un volume  $v$

- sont **plus nombreuses** donc **associées à une discrétisation plus fine** dans  $v$
- satisfont la **propriété de partition de l'unité**
- engendrent des espaces qui constituent une **sequence exacte**

On propose de **réconstruire un champ** dans chaque volume  $v$  en se basant **sur un ensemble de sous-simplexes choisis dans  $v$**  inspiré du Treillis principal.

Les sous-simplexes n'existent pas en réalité mais constituent une astuce mathématique pour définir les  $p$ -formes d'ordre élevé.

Dans chaque volume  $v$ , **les  $p$ -formes d'ordre  $k + 1$  sont obtenues comme produits des  $p$ -formes d'ordre 1 avec un monôme homogène de degré  $k$  dans les fonctions barycentriques**

(R., Bossavit, SINUM 2009)

# Définition géométrique d'un ensemble de sous-simplexes dans $v$

Notation :

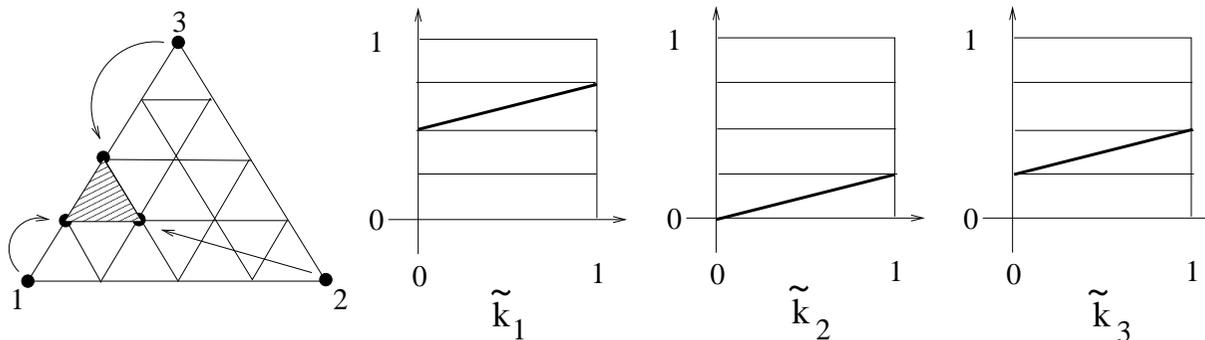
$\mathbf{k} = (k_0, \dots, k_d)$  vecteur d'entiers  $k_i \geq 0$ , et  $|\mathbf{k}| = \sum_{i=0}^d k_i$ .

$\mathcal{I}(d+1, k) = \{\mathbf{k} = (k_0, \dots, k_d), |\mathbf{k}| = k\}$  et  $\#\mathcal{I}(d+1, k) = \frac{(k+d)!}{d! k!}$ .

Pour chaque  $\mathbf{k} \in \mathcal{I}(d+1, k)$ ,  $\lambda^{\mathbf{k}} = \prod_{i=0}^d (\lambda_i)^{k_i}$ .

Pour chaque multi-entier  $\mathbf{k} \in \mathcal{I}(d+1, k)$ , on définit une homothétie  $\tilde{\mathbf{k}} : v \rightarrow v$

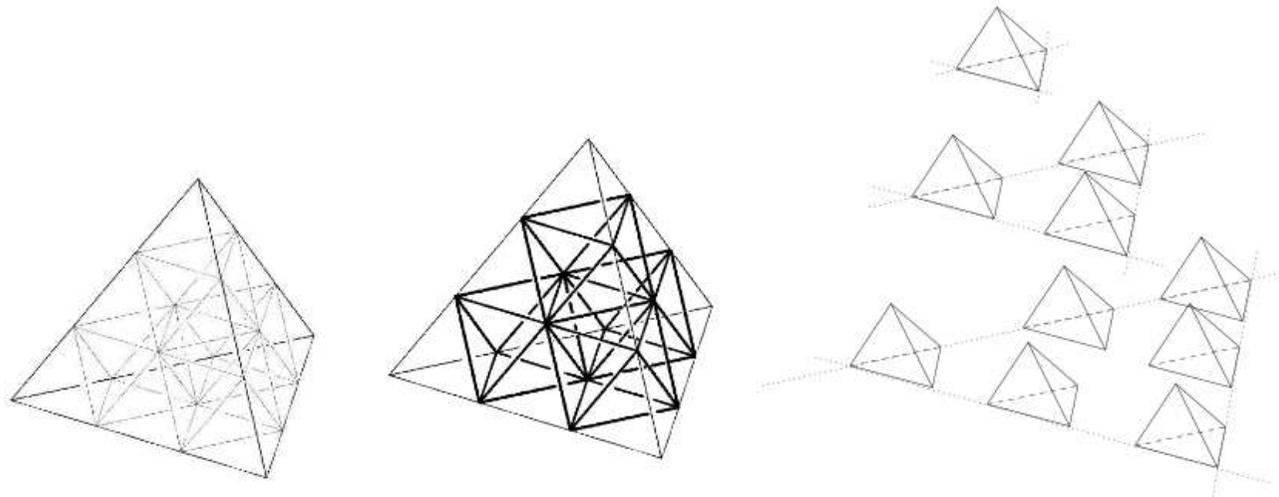
Soit  $\tilde{k}_i$  la fonction affine qui envoie  $[0, 1]$  sur  $[\frac{k_i}{k+1}, \frac{1+k_i}{k+1}]$ . Si  $\lambda_i(x)$  est la  $i$ ème coordonnée barycentrique d'un point  $x \in v$ , son image  $\tilde{\mathbf{k}}(x)$  a coordonnées barycentriques  $0 \leq \tilde{k}_i(\lambda_i(x)) \leq 1$  avec  $\tilde{k}_i(\lambda_i(x)) = \frac{\lambda_i(x) + k_i}{k+1}$



Dans l'exemple,  $d = 2$  et  $\mathbf{k} = (2, 0, 1)$ .

# Les $p$ -formes de Whitney de degré polynomiale $k + 1$

On appelle **petits  $p$ -simplexes de  $v$** ,  $0 \leq p \leq d$ , les images  $\tilde{\mathbf{k}}(S)$  pour tout (grand)  $p$ -simplexe  $S \in \mathcal{S}^p(v)$  et tout multi-entier  $\mathbf{k} \in \mathcal{I}(d + 1, k)$ , et on les denote par  $s = \{\mathbf{k}, S\}$ .



Les  $p$ -formes de Whitney de degré polynomiale  $k + 1$  sur  $v$  sont  $w^s = \lambda^{\mathbf{k}} w^S$ ,  $s = \{\mathbf{k}, S\}$  pour tout multi-entier  $\mathbf{k} \in \mathcal{I}(d + 1, k)$  et tout (grand)  $p$ -simplexe  $S \subset v$ ,  $w^S$  est la  $p$ -forme de Whitney de degré polynomiale 1 associée à  $S$  (cf. définition récursive)

$$W_{k+1}^p(t) = \text{span}\{\lambda^{\mathbf{k}} w^S\}$$

**Ddl pour les  $p$ -formes  $w^s$  sont localisés sur les petits simplexes  $s = \{\mathbf{k}, S\}$  de dimension  $p$  équivalents aux moments type Nédélec**

# Les moments pour les éléments d'arête

Soit  $\mathbf{w} \in W_{h,r}^1(v)$ ,  $r \geq 1$  : les moments de  $\mathbf{w}$  sont les formes linéaires

$$\sigma_e : \mathbf{w} \mapsto \frac{1}{|e|} \int_e (\mathbf{w} \cdot \mathbf{t}_e) u \quad \forall u \in \mathbb{P}_{r-1}(e), \forall e \in \mathcal{E}(v) \quad (1)$$

$$\sigma_f : \mathbf{w} \mapsto \frac{1}{|f|} \int_f (\mathbf{w} \times \mathbf{n}_f) \cdot \mathbf{q} \quad \forall \mathbf{q} \in (\mathbb{P}_{r-2}(f))^2, \forall f \in \mathcal{F}(v) \quad (2)$$

$$\sigma_v : \mathbf{w} \mapsto \frac{1}{|v|} \int_v \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} \quad \forall \mathbf{z} \in (\mathbb{P}_{r-3}(v))^3 \quad (3)$$

avec  $\mathbf{t}_e$  (resp.  $\mathbf{n}_f$ ) le vecteur de longueur  $|e|$  (resp. 1), tangent à  $e$  (resp. normal à  $f$ ).

# Propriétés des $p$ -formes de Whitney de degré $r = k + 1$

## Aspects à améliorer

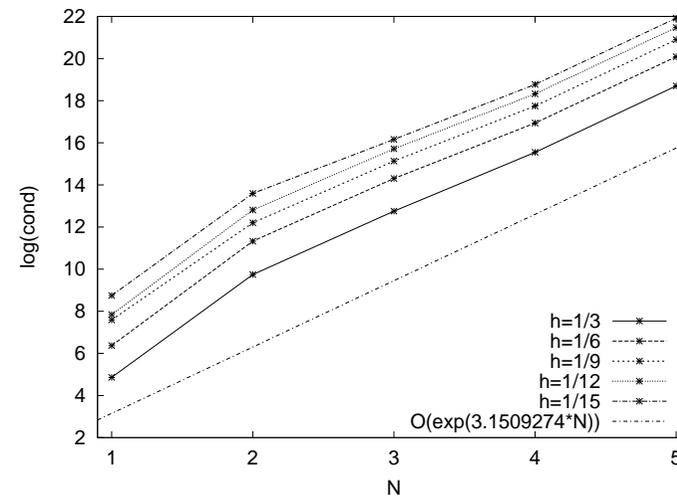
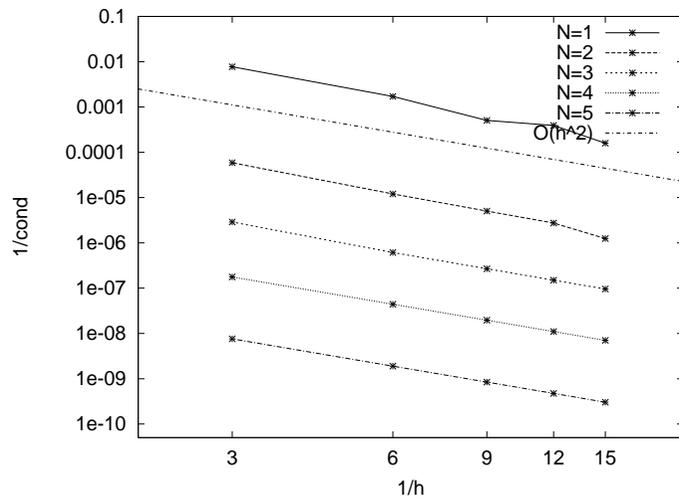
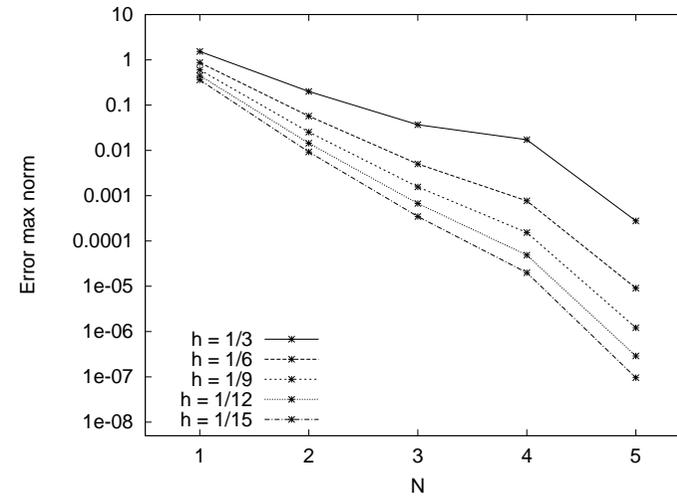
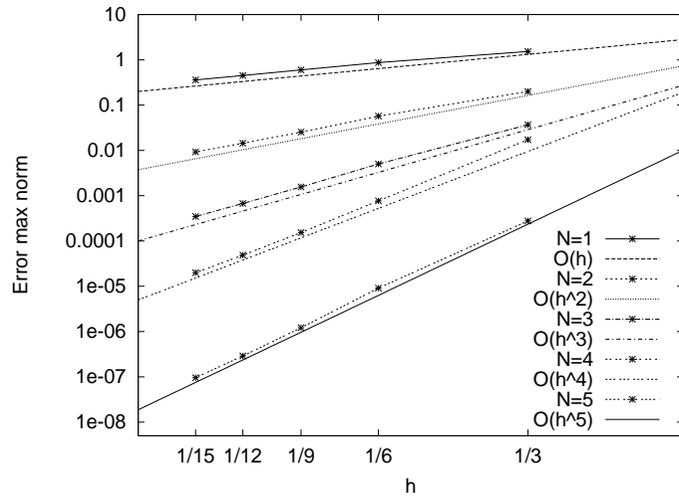
- les  $p$ -formes  $w^s$  sont génératrices de  $W_{k+1}^p(t)$  mais **ne sont pas libres si  $k > 0$** , il y a un choix à faire dicté par les ddl
- **la matrice de Vandermonde généralisée associée n'est pas l'identité**
- **matrices de Galerkin mal conditionnées**

## Aspects positifs :

- les fonctions de base de  $W_{k+1}^p(t)$  sont définies explicitement
- les  $p$ -formes  $w^s$  constituent une **partition de l'unité**
- les  $p$ -formes  $w^s$  vérifient des propriétés de **continuité** ( $p = 0$ ) et de **conformité** ( $p = 1, 2$ )
- la **sequence**  $\{0\} \longrightarrow W_{k+1}^0 \xrightarrow{\text{grad}} W_{k+1}^1 \xrightarrow{\text{curl}} W_{k+1}^2 \xrightarrow{\text{div}} W_{k+1}^3 \longrightarrow \{0\}$  est **exacte** à tous les niveaux  $p$  sauf  $p = 0$
- numériquement, la **convergence est de type  $hk$**  (spectrale en  $k$  et algébrique en  $h$ ) pour l'erreur d'approximation associée à ces éléments

# Convergence $hk$ et conditionnement

$\text{rot rot } \mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{f}$  sur  $\Omega = [0.5, 1.5] \times [0.25, 0.75]$  avec  $\mathbf{u} = (2\pi \sin(\pi x) \cos(2\pi y), -\pi \cos(\pi x) \sin(2\pi y))^t$



# Comment recouperer la dualité (en une dimension, par exemple)

## Données au départ

$\{\psi_i\}$  une base de  $\mathbb{P}_r(I)$  qui vous plait et  $\{\sigma_k\}$  un ensemble de ddls qui convient !

## Ce qu'on cherche

$\{\phi_j\}$  la base cardinale (de Lagrange) de  $\mathbb{P}_r(I)$  :  $\phi_j(x) \in \mathbb{P}_r(I)$ ,  $\sigma_k(\phi_j) = \delta_{kj}$

On prend  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et on y applique  $\sigma_\ell$  (tout est linéaire) :

$$f \approx I_r(f) = \sum_{j=1}^{N_r} u_j \psi_j = \sum_{k=1}^{N_r} f_k \phi_k, \quad \sum_{j=1}^{N_r} u_j \sigma_\ell(\psi_j) = \sum_{k=1}^{N_r} f_k \sigma_\ell(\phi_k) f_k \quad (\ell = k).$$

Donc

$$\sum_{j=1}^{N_r} u_j \psi_j = \sum_{k=1}^{N_r} \left( \sum_{j=1}^{N_r} u_j (\mathbf{V})_{kj} \right) \phi_k, \quad \sum_{j=1}^{N_r} u_j \psi_j = \sum_{j=1}^{N_r} u_j \left( \sum_{k=1}^{N_r} (\mathbf{V}^t)_{jk} \phi_k \right).$$

On obtient le lien entre les deux ensembles de coefficients  $u_j$ ,  $f_k$ , et les deux bases :

$$\mathbf{V}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{et} \quad \psi_j = \sum_{k=1}^{N_r} (\mathbf{V}^t)_{jk} \phi_k$$

avec  $\mathbf{V}$  la matrice de Vandermonde généralisée dont les éléments sont  $(\mathbf{V})_{ij} = \sigma_i(\psi_j)$ .

Donc,  $\phi_k(x) = \sum_{j=1}^N c_{kj} \psi_j(x)$ , avec  $\mathbf{c}_k = (c_{k1}, c_{k2}, \dots, c_{kN})^t$  la  $k$ -ème colonne de  $\mathbf{V}^{-1}$ .

# Propriétés de la matrice $\mathbf{V}$

Les propriétés de la matrice  $\mathbf{V}$  dépendent

- du choix de la base de l'espace discret et
- du choix des ddls utilisés pour sélectionner un champ de l'espace discret.

Si  $\mathbf{w}^s = \lambda^{\mathbf{k}} \mathbf{w}^S$  (R., Bossavit, SINUM 2009) sont les **générateurs**

Si les moments (Nédélec, Num. Math. 1980, Def. 6 et 7) sont les **ddls**

- les coefficients sont rationnels et peuvent être calculés à la main (formule combinatoire)
- les coefficients ne dépendent pas de la métrique de  $v$
- la matrice  $\mathbf{V}$  est triangulaire inférieure par blocs  
avec des matrices de Toeplitz comme blocs diagonaux (invertibles en  $O(m^2)$  op.)
- les coefficients de  $\mathbf{V}^{-1}$  sont entiers

# References

Ma page web (LJAD, Nice), pour plus de détails

Implementation dans FreeFEM++ d'éléments d'arête d'ordre 2 et 3  
faite par Marcella Bonazzoli (LJAD, Nice) et Frédéric Hecht (LJLL, Paris)

Applications aux guides d'ondes (ANR MEDIMAX du LEAT à Sophia-Antipolis)  
en collaboration avec Marcella Bonazzoli et Victorita Dolean (LJAD, Nice)

Page web de Alain Bossavit (LGEP, Paris)

Page web de Snorre Christiansen (Oslo Univ.)

Page web de Mathieu Desbrun (Caltech Univ.) .....

Grazie per l'attenzione!