Bases de Mathématiques

Carole Delenne

EGC 3 - 2015-2016

Table des matières

Fiche

1

EGC3 - Bases de Mathématiques - 2015/2016

Géométrie et fonctions

Résumé de cours

1.1 Théorème de Thalès

On considère dans le plan deux droites D_1 et D_2 concourantes dont O est l'intersection. A et A' sont deux points de D_1, B et B′ deux points de D_2 tels que (AB) ∥ (A′B′). Alors

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA'}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OB'}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}} \tag{1.1}$$

⟼ **Exercice 1.1**

1.2 Fonction affine, équation de droite

Soient a et b deux réels ; l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y = ax + b$ est une droite, représentation graphique de la fonction affine f qui à x associe $ax + b$.
a est le coefficient directeur de la droite ; $a = \tan\theta$ si θ est l'angle d'inclinaison de la droite ;
b l'ordonnée à l'origine.

Propriétés : Soit une droite (D) d'équation $y = ax + b$

1. Si la droite passe par les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \quad b = \frac{y_A x_B - y_B x_A}{x_B - x_A} \qquad \text{ou (autre écriture) :} \quad y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A$$

2. Un vecteur directeur de la droite est $(1; a)$
3. La droite (D') d'équation $y = a'x + b'$ est parallèle à (D) si et seulement si $a = a'$
4. Dans un repère orthonormal, les droites (D) et (D') sont perpendiculaires si et seulement si $aa' = -1$.

⟼ **Exercices 1.2 , 1.3 et 1.4**

Système linéaire de deux équations à deux inconnues : graphiquement, il s'agit de trouver l'intersection entre deux droites du plan.
⟼ **Exercices 1.5 et 1.6**

1.3 Fonctions Exponentielle et Logarithme

Il existe une unique fonction f vérifiant $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$. Elle est appelée **fonction exponentielle de base** e et notée e^x ou $\exp(x)$.
On appelle fonction **logarithme népérien**, notée ln, la réciproque de la fonction exponentielle, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a donc :

$$\ln(e^x) = x \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad e^{\ln x} = x \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

On en déduit $\ln(e) = 1$ et $\ln(1) = 0$.

Propriétés :

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad \text{et} \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Fonction logarithme de base a : Soit a un réel strictement positif différent de 1 ; on appelle logarithme de base a, la fonction notée $\log_a$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

La fonction logarithme décimal est la plus souvent utilisée, et notée log au lieu de $\log_{10}$.
$\longmapsto$ **Exercices 1.7 et 1.8**

1.4 Trigonométrie

Dans le plan (x, y), on place le point O de coordonnnées $(0, 0)$ et on trace un cercle de centre O et de rayon R. Soit M un point de ce cercle, A la projection de M sur (Ox) et B la projection de M sur (Oy). L'angle α entre la direction (Ox) et la droite (OM) est caractérisé par son sinus et son cosinus :

$$\cos\alpha = \frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathrm{OA}}{R} = \frac{x_\mathrm{A}}{R} = \frac{x_\mathrm{M}}{R} \tag{1.2a}$$

$$\sin\alpha = \frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathrm{OB}}{R} = \frac{y_\mathrm{B}}{R} = \frac{y_\mathrm{M}}{R} \tag{1.2b}$$

Propriétés de périodicité et de parité (k est un entier relatif) :

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \tag{1.3a}$$

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \tag{1.3b}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \tag{1.3c}$$

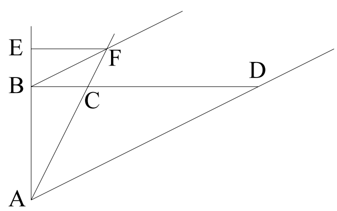
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \tag{1.3d}$$

$\longmapsto$ **Exercices 1.9 et 1.10**

Exercices

Exercice 1.1 Théorème de Thalès

1. Représenter graphiquement l'énoncé du théorème de Thalès.
2. Soient deux segments [AB] et [CD] sécants en O, avec : OA=12, OB=21, OC=8, OD=14. Montrer que AC est parallèle à BD.
3. On considère le triangle (ABD) rectangle en B (*cf.* Figure suivante). On choisit un point C entre B et D. On construit le point F comme l'intersection entre la droite (AC) et la droite parallèle à (AD) passant par B. E est la projection de F sur la droite (AB).



Exprimer la distance AE en fonction de AB, BD et BC.

Exercice 1.2 Thalès et équation de droite
A l'aide du théorème de Thalès, retrouver l'équation de la droite passant par les points A $(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A})$ et B $(x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B})$.

Exercice 1.3 Equations de droite
Déterminer l'équation de la droite

1. passant par $A(-2; 1)$ et $B(3; -1)$. (Rep. $y = -2x/5 + 1/5$)
2. de pente $2/3$ passant par le point $A(-4, 5)$. (Rep. $3y = 2x + 23$)
3. passant par les deux points $A(3, -1)$ et $B(0, 6)$. (Rep. $y = -7/3x - 6$)
4. équidistante des droites $x + 5 = 0$ et $x - 2 = 0$. (Rep. $2x + 3 = 0$)

5. passant par $A(-3;-2)$ et perpendiculaire à $y = 2x - 1$. (Rep. $2y = -x - 7$)
6. passant par $A(2,-1)$ et perpendiculaire à la droite passant par $C(4,3)$ et $D(-2,5)$. (Rep. $y = 3x + 5$)

Exercice 1.4 Inclinaison et pente d'une droite
Trouver la pente a et l'angle d'inclinaison θ des droites passant par les deux points suivants (faire un schéma) :

1. $A(-8,-4)$ et $B(5,9)$. (Rep. $a = 1$, $\theta = 45°$)
2. $A(10,-3)$ et $B(14,-7)$. (Rep. $a = -1$, $\theta = 135°$)
3. $A(-11,4)$ et $B(-11,10)$. (Rep. $a = \infty$, $\theta = 90°$)
4. $A(8,6)$ et $B(14,6)$. (Rep. $a = 0$, $\theta = 0°$)

Exercice 1.5 Intersection de droites
Résoudre les systèmes suivant :

$$(S_1)\begin{cases} 0.5x + y - 1 & = 0 \\ 0.5x - y + 0.5 & = 0 \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} 0.5x + y - 1 & = 0 \\ 0.5x + y + 0.5 & = 0 \end{cases} \quad (S_3)\begin{cases} 0.5x + y - 1 & = 0 \\ -0.5x - 1.1y + 1.1 & = 0 \end{cases} \quad (S_4)\begin{cases} 0.5x + y - 1 & = 0 \\ -0.5x - 1.1y + 1 & = 0 \end{cases}$$

Exercice 1.6 Rentabilité des machines à eau gazeuse
On souhaite acquérir une machine à eau gazeuse (60€). Sachant qu'il faut une recharge de gaz (12€) pour 50l et que l'eau gazeuse en bouteille se trouve à 0.25€/l, à partir de combien de bouteilles la machine sera amortie ? même question si l'eau en bouteille coûte 0.26€/l ?

Exercice 1.7 Fonction exponentielle

1. Tracer l'allure de la fonction exponentielle
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leq e^x$

Exercice 1.8 Papier logarithmique

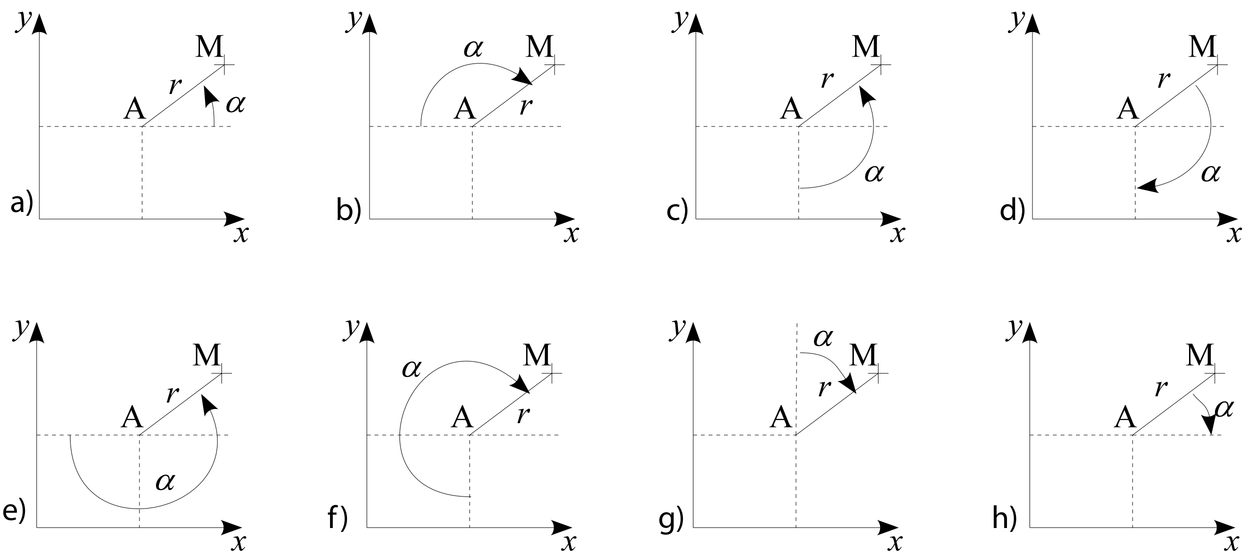
1. Tracer sur le papier lin-log les fonctions $y = e^x$, $y = 2e^x$ et $y = x$.
2. Tracer sur le papier log-log les fonctions $y = x$, $y = 2x$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$, $y = x^3$. Attention, on ne peut les tracer que sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ puisqu'il faut prendre log(x).

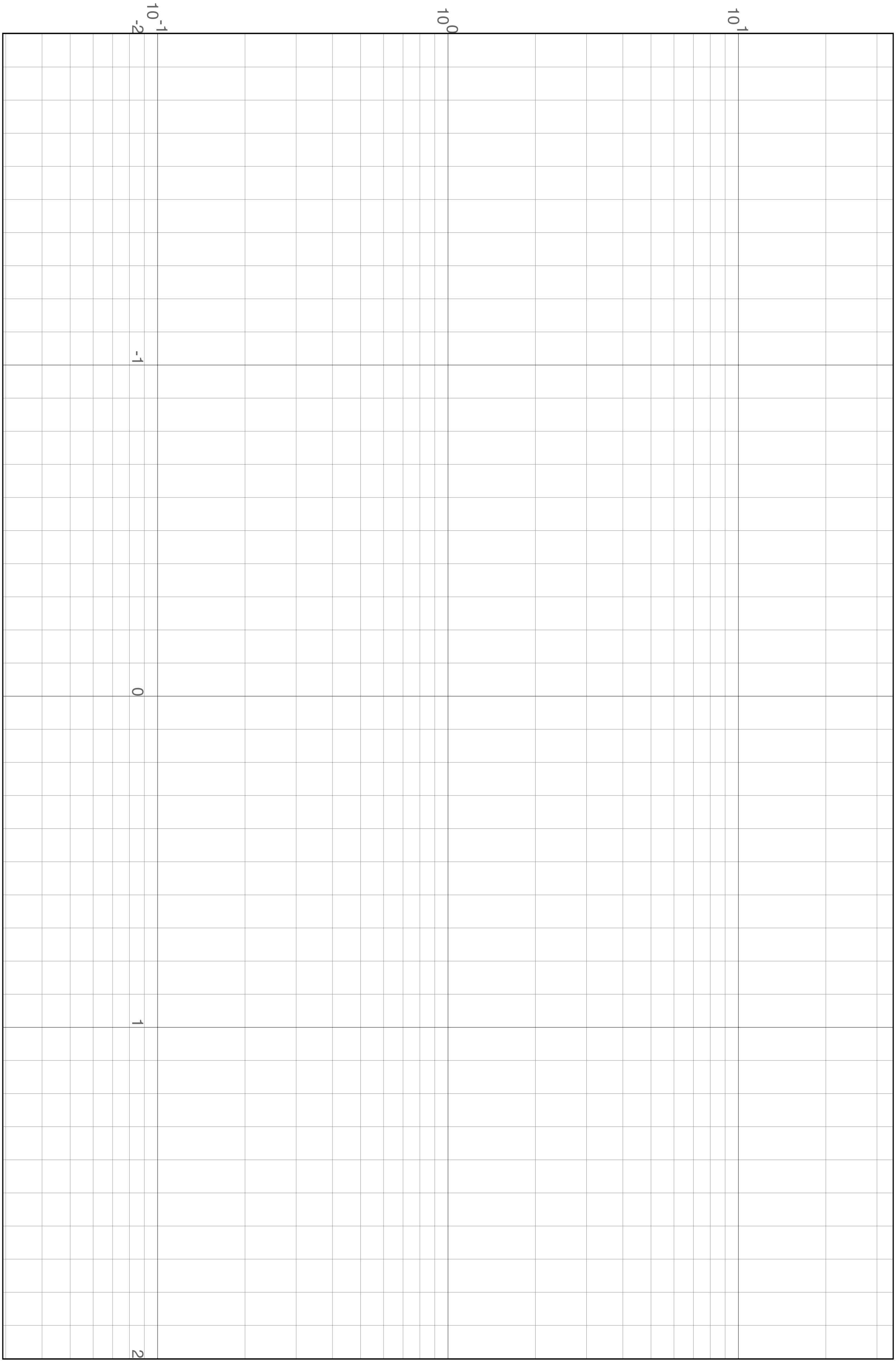
Exercice 1.9 Théorème de Pythagore
(ABC) est un triangle rectangle en A. H est la projection orthogonale de A sur l'hypoténuse [BC].

1. Exprimer BH en fonction de AB et BC, ainsi que CH en fonction de AC et BC.
2. En déduire la formule classique de Pythagore.

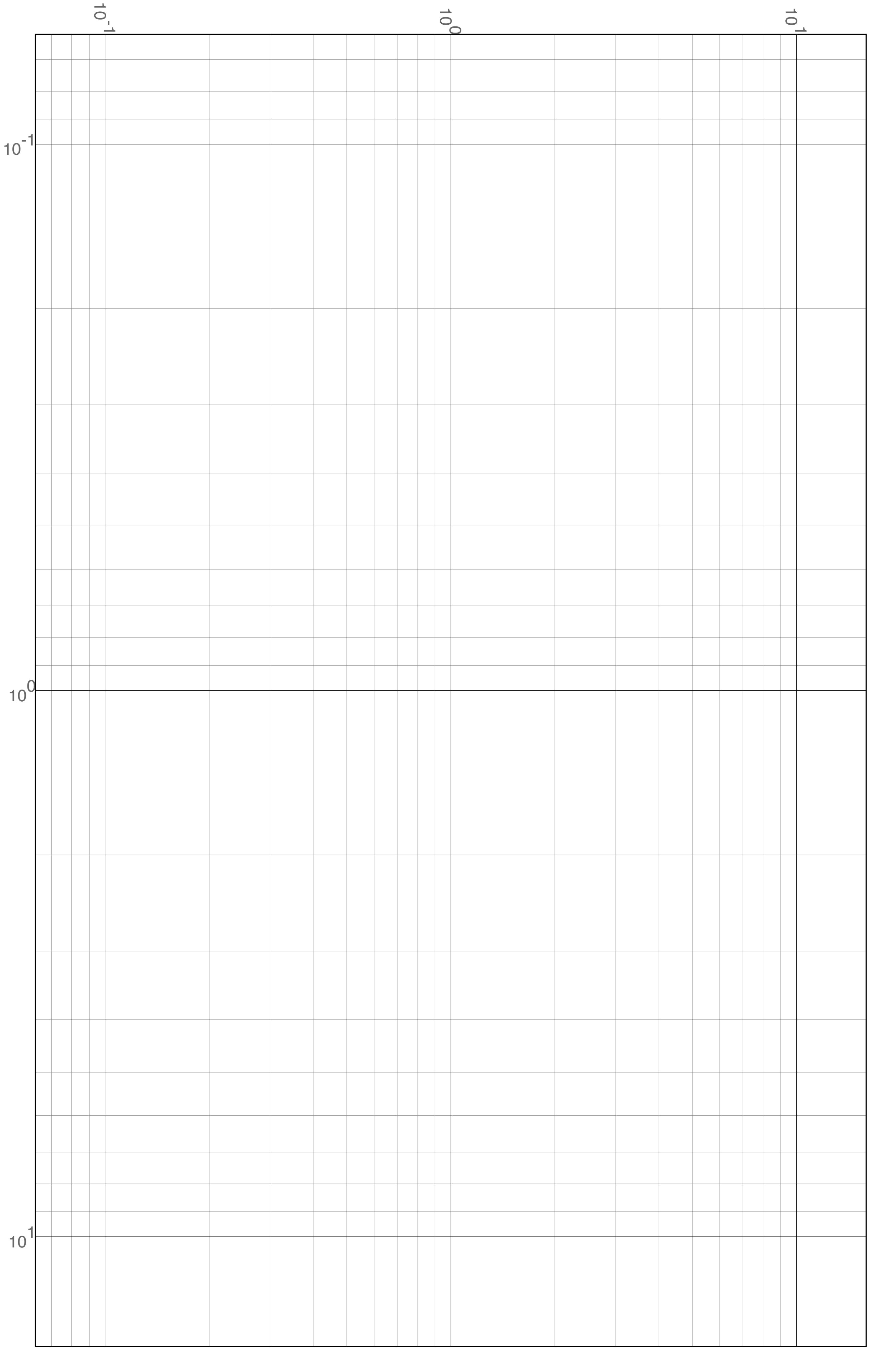
Exercice 1.10 Trigonométrie

1. Sur le cercle trigonométrique, représenter les différents angles, les définitions données par les équations (1.2), la tangente et les formules trigonométriques de base. Que vaut $\tan(\alpha + \pi)$?
2. Exprimer les coordonnées x_M et y_M de M en fonction de R et de l'angle α. En déduire y_M en fonction de x_M et α.
3. Pour chacune des figures, exprimer les coordonnées du point $\mathrm{M}(x, y)$ en fonction de celles de $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A})$ et de l'angle α. Attention : α est orienté (dans le sens direct ou indirect selon les cas).



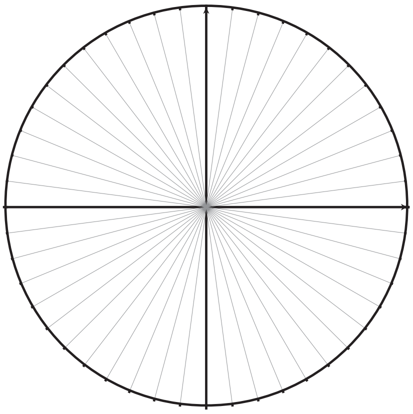


10^-1
10^0
10^1
-2
-1
0
1
2

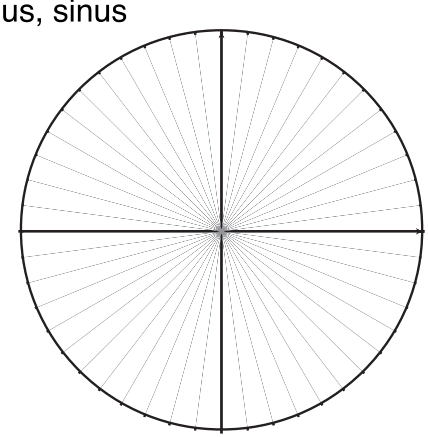

10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}

Le cercle trigonométrique

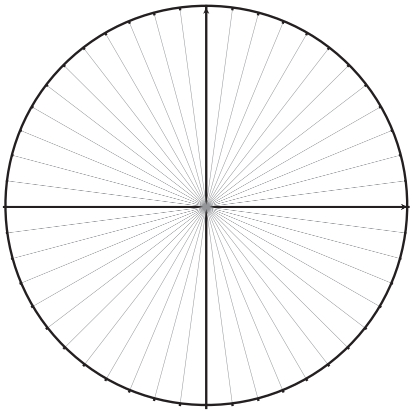
Angles:



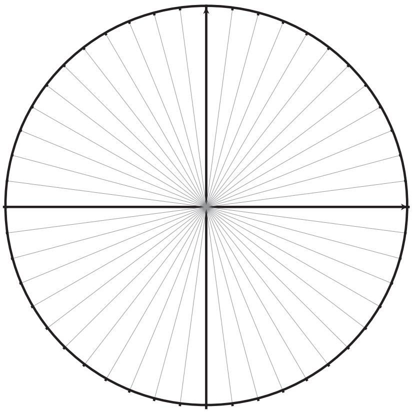
Cosinus, sinus



Tangente



Formules



FICHE

2

EGC3 - Bases de Mathématiques - 2015/2016

Systèmes de coordonnées, Vecteurs

Résumé de cours

2.1 Vecteurs - opérations de base

Un vecteur $\mathbf{u}$ (ou : $\vec{u}$) de taille m est un ensemble de m valeurs réelles u_k, appelées composantes :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Un vecteur particulier est le vecteur nul : $\mathbf{u} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow u_k = 0 \;\; \forall k = 1, \ldots, m$

Egalité :
Deux vecteurs de taille m sont égaux si et seulement si leurs composantes sont égales deux à deux :

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \Longleftrightarrow u_k = v_k \;\; \forall k = 1, \ldots, m \tag{2.2}$$

Opérations :
Addition de deux vecteurs : $(\mathbf{u} + \mathbf{v})_k = u_k + v_k \;\; \forall k = 1, \ldots, m$
Multiplication par un réel : $(a\mathbf{u})_k = au_k \;\; \forall k = 1, \ldots, m \;\; a \in \mathbb{R}$
Vecteurs opposés : $\mathbf{u} = -\mathbf{v} \Longleftrightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$
Vecteurs colinéaires : $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$; $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$; et $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \Longleftrightarrow \exists\, a \in \mathbb{R}*, \mathbf{u} = a\mathbf{v}$

Norme

La norme du vecteur $\mathbf{u}$ est sa longueur dans l'espace à m dimensions :

$$\|\mathbf{u}\| = \left(u_1^2 + \cdots + u_m^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{m} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

Remarque : la valeur absolue (pour un réel) et le module (pour un nombre complexe) sont des cas particuliers de la norme (pour des espaces de dimension 1 et 2 respectivement).

Barycentre

Soit un ensemble de points $\mathrm{A}_k, k = 1, \ldots, P$ de l'espace. Le point G vérifiant la relation suivante

$$\sum_{k=1}^{P} \alpha_k \overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{G}} = \overrightarrow{0} \tag{2.4}$$

est appelé barycentre des points A_k affectés des coefficients (ou poids) α_k. Dans cette définition, il faut qu'au moins un des coefficients α_k soit non nul.

Relation de Chasles

Soient A, B, C, trois points de l'espace

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \tag{2.5}$$

$\longmapsto$ **Exercices 2.1, 2.2.**

2.2 Systèmes de coordonnées

Cartésien. Un système cartésien est constitué d'un repère orthonormé direct, de centre O et d'axes (Ox), (Oy), (Oz), portés par les vecteurs unitaires $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$, $\vec{e_z}$. Dans ce repère, le point M est représenté par ses coordonnées (x_M, y_M, z_M). Soit $\vec{OM} = x_M\vec{e_x} + y_M\vec{e_y} + z_M\vec{e_z}$.

Polaire. Dans un système polaire, $\vec{OM} = r\vec{e_r}$ où r est la distance entre O et M et $\vec{e_r}$ est le vecteur unitaire porté par $\vec{OM}$ (faisant un angle θ avec l'axe horizontal).

$\longmapsto$ **Exercices 2.3, 2.4 et 2.5.**

2.3 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ est défini de la façon suivante

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos\theta \tag{2.6}$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs.

Dans un repère cartésien de dimension 3 :

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T\,, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T \Longrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \tag{2.7}$$

Propriétés :

Commutativité : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

Distributivité : $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

Multiplication par un scalaire : $a\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = (a\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$

Orthogonalité : $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Longleftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0,\ \mathbf{u} \neq 0, \mathbf{v} \neq 0$

Relation avec la norme : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$

$\longmapsto$ **Exercices 2.6, 2.7, 2.8, 2.9 et 2.10.**

2.4 Produit vectoriel

Le produit vectoriel de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ (noté $\times$ par les anglo-saxons et $\wedge$ en France) est défini comme :

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin\theta \, \mathbf{n} \tag{2.8}$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal au plan formé par $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Le sens de $\mathbf{n}$ est tel que le repère $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$ est un repère orienté direct.

Dans un repère cartésien de dimension 3 :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Propriétés :

Antisymétrie : $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

Distributivité : $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$

Multiplication par un scalaire : $a\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (a\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (a\mathbf{v})$

Colinéarité : $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \Longleftrightarrow \mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0,\ \mathbf{u} \neq 0, \mathbf{v} \neq 0$

$\longmapsto$ **Exercices 2.11, 2.12, 2.13, 2.14 et 2.15.**

Exercices

Exercice 2.1 Relation de Chasles
Soit ABC un triangle quelconque.

1. Construire le point M tel que $\vec{BM} = \frac{1}{3}\vec{BC}$. Démontrer que $\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$.
2. Construire le point N tel que $\vec{AN} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$. Montrer que les points A, M, N sont alignés.

Exercice 2.2 Barycentre de 3 points
Soient A, B et C trois points du plan. On désigne par G le barycentre des 3 points affectés du même coefficient :

$$\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}} = \overrightarrow{0} \tag{2.10}$$

1. Montrer que, quel que soit le point M, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{MG}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right) \tag{2.11}$$

2. On désigne respectivement par A′, B′ et C′ les points milieux de [BC], [AC] et [AB].
   (a) Exprimer $\vec{\mathrm{AG}}$ en fonction de $\vec{\mathrm{AB}}$ et $\vec{\mathrm{AC}}$ et en déduire $\vec{\mathrm{AG}}$ en fonction de $\vec{\mathrm{AA}}'$.
   (b) En déduire que les trois segments [AA′], [BB′] et [CC′] se coupent en un seul point et que ce point est précisément le barycentre G du triangle.
3. Est-il possible de trouver trois coefficients α, β, γ non nuls, tels que

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{GB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{GC}} = \overrightarrow{0} \tag{2.12}$$

   et que G soit situé sur l'un des segments [BC], [AC] et [AB] ?

Exercice 2.3 Systèmes de coordonnées

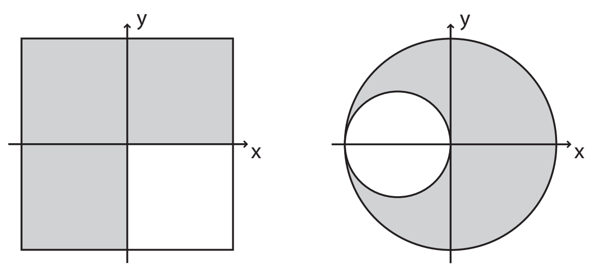
1. Représenter graphiquement un point M dans un système : a) cartésien de dimension 2 ; b) cartésien de dimension 3 ; c) polaire.
2. Un point est représenté en coordonnées polaires par $\vec{OM} = r\vec{e_r}$. Exprimer les coordonnées de M dans un repère cartésien.
3. Représenter un vecteur $\vec{AB}$ dans un repère cartésien de dimension 3. Donner ses coordonnées en fonction de celles des points A et B.

Exercice 2.4 Opérations de bases sur les vecteurs

1. Représenter dans l'espace $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ les points suivants : $O(0,0,0)$, $P(2,0,0)$, $Q(2,0,1)$, $R(0,0,1)$, $S(0,1,0)$, $T(2,1,0)$, $U(2,1,1)$ et $V(0,1,0)$. Quelle forme géométrique ces points constituent-ils ?
2. Soient les points $A(5,-3,1)$; $B(-1,6,1)$ et $C(7,2,0)$. Calculer les coordonnées et la norme des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$.

Exercice 2.5 Barycentre d'une plaque
Soit une plaque homogène carrée de 2m de côté et de masse 4kg centrée sur (0,0) à laquelle on supprime le quatrième quadrant (*cf.* figure de gauche)

1. Calculer son centre de masse :
   (a) en considérant la plaque coupée et un poids de 1 affecté au centre de chacun des quadrants restants
   (b) en affectant un poids négatif au quatrième quadrant
2. Appliquer la deuxième méthode à la plaque circulaire de la figure de droite.



Exercice 2.6 Définitions du produit scalaire
A partir de la définition (2.6) :

1. démontrer que les expressions suivantes sont des définitions du produit scalaire :
   (a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$ où $\vec{v}'$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.
   (b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
   (c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_u x_v + y_u y_v)$ dans un repère cartésien de dimension 2, où $\vec{u} = (x_u, y_u)^T$ et $\vec{v} = (x_v, y_v)^T$
2. retrouver la formule d'Al-Kashi, ou Pythagore généralisé.

Exercice 2.7 Vecteurs et trigonométrie
En utilisant le produit scalaire, démontrer la formule $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Exercice 2.8 Identités remarquables

1. Calculer : $(\vec{u}+\vec{v})^2$ et $(\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}-\vec{v})$
2. En déduire l'identité du parallélogramme : $\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BD}^2 = 2(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2)$, où ABCD forme un parallélogramme de côtés AB $\parallel$ CD et CB $\parallel$ DA.

Exercice 2.9 Hauteurs d'un triangle
Démontrer à l'aide du produit scalaire, que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 2.10 Bissectrice
On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de même norme, mais d'orientation quelconque.

1. Montrer que les vecteurs $\frac{1}{2}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})$ et $\frac{1}{2}(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})$ sont orthogonaux.
2. Montrer que l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et le vecteur $\frac{1}{2}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})$ est le même qu'entre $\frac{1}{2}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{v}$.

Exercice 2.11 Propriétés de base des produits scalaire et vectoriel

1. Donner les conditions sur le produit scalaire et le produit vectoriel pour que deux vecteurs soient
   ▷ colinéaires et de sens opposés,
   ▷ colinéaires et de même sens.
2. Utiliser une de ces propriétés pour déduire l'équation de la droite passant par les points $\mathrm{A}\,(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}\,(x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B})$.
3. On considère deux vecteurs quelconques $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Que valent les produits $\overrightarrow{u}\,.\,(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$, $\overrightarrow{v}\,.\,(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$ et $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\,.\,(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$?
4. Montrer que $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w}$. En déduire l'identité de Jacobi : $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) + \vec{v}\times(\vec{w}\times\vec{u}) + \vec{w}\times(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{0}$.

Exercice 2.12 Calcul de produits scalaires et vectoriels

1. Calculer les produits scalaires et vectoriels des vecteurs suivants. Certains sont-ils orthogonaux ou parallèles ?

$$a)\,\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad b)\,\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$c)\,\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad d)\,\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u} = (2, 2, 3)^T$.

Exercice 2.13 Equation d'un plan
Le vecteur $\vec{n} = (a, b, c)^T$ est normal au plan (P) défini par :

$$ax + by + cz + d = 0$$

1. Connaissant un point O du plan, donner une condition pour que le point M appartienne également à (P).
2. Soient trois points A, B, C non alignés dans le plan (P), donner l'expression d'un vecteur $\vec{n}$.

Exercice 2.14 Propriété géométrique du produit vectoriel

1. On considère un triangle quelconque (ABC). Interpréter géométriquement la quantité
$$\left\| \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}} \times \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right) \right\| \tag{2.13}$$
2. Si M est un point à l'intérieur du triangle (ABC), que vaut
$$\left\| \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} \times \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} \times \overrightarrow{\mathrm{MC}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} \times \overrightarrow{\mathrm{MA}}\right) \right\| \tag{2.14}$$

Exercice 2.15 Lieux géométriques

1. Quelle est la forme du lieu géométrique (ensemble des positions pouvant être occupées par un point M) qui vérifie la relation suivante :
$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}.\overrightarrow{\mathrm{BM}} = k^2, k \in \mathbb{R} \tag{2.15}$$
où A et B sont deux points du plan ? Remarque : on conseille d'introduire le point I, milieu du segment [AB].
2. Même question pour le lieu
$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}.\overrightarrow{\mathrm{AB}} = C, \;\; C \in \mathbb{R} \tag{2.16}$$
(on conseille d'introduire H, projection orthogonale de M sur [AB]).
3. Même question pour
$$\mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2 = k^2 \tag{2.17}$$
4. Même question pour
$$\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = k^2 \tag{2.18}$$
5. Identifier le lieu géométrique vérifiant
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{MC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} \times \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \vec{0} \tag{2.19}$$
(deux possibilités : soit exprimer $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et trouver une condition sur les coefficients ; soit utiliser la distibutivité et l'antisymétrie du produit vectoriel).
6. Même question pour
$$\left(2\overrightarrow{\mathrm{MA}} - 3\overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right) \times \left(\overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right) = \overrightarrow{0} \tag{2.20}$$

FICHE

3

Dérivation

Résumé de cours

3.1 Dérivée d'une fonction d'une variable

Accroissement moyen et nombre dérivé :

Soit $y = f(x)$ une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$. A une variation Δx de x correspond une variation Δy de y. On appelle **accroissement moyen** de f en x_0 la quantité :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{3.1}$$

La fonction f est dite **dérivable** en x_0 lorsque l'accroissement moyen de f en x_0 admet une limite finie :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = l \tag{3.2}$$

Cette limite, également notée $f'(x_0)$ s'appelle **nombre dérivé** de f en x_0.

Fonction dérivable à droite ou à gauche de x_0 lorsque l'acroissement moyen n'admet pas de limite en x_0, il se peut qu'il en admette une à droite ou à gauche de x_0. On dit alors que f est dérivable à droite ou à gauche. La fonction peut également admettre une dérivée à droite ET à gauche de x_0 avec des valeurs différentes. La fonction est donc dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche avec les mêmes valeurs.

$\longmapsto$ **Exercices 3.1, 3.2.**

Fonction dérivée

Une fonction f est dite dérivable sur un intervalle I si et seulement si elle admet un nombre dérivé en tout point $x_0 \in I$. On définit alors la **fonction dérivée**, notée f' ou $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ qui a tout point $x_0 \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x_0)$.
La quantité $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\mathrm{d}x$ est appelé **accroissement infinitésimal** ou **différentielle** de f en x_0.

Formules usuelles de dérivation

1. somme : $(u+v)' = u' + v'$
2. produit : $(uv)' = u'v + uv'$ => $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
3. fonction composée : $[f(u)]' = f'(u)u'$
4. fonction réciproque : si $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$ et $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

Lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I :

1. f est constante sur I ssi $f'(x) = 0\, \forall x \in I$
2. f est croissante (resp. décroissante) sur I ssi $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) sur I
3. f est strictement croissante sur I ssi $f' \geq 0$ et l'ensemble des x tels que $f'(x) = 0$ ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide

$\longmapsto$ **Exercices 3.3, 3.4, 3.5, 3.6.**

3.2 Dérivées partielles et dérivée totale d'une fonction de plusieurs variables

Si f dépend de plusieurs variables $(x_1, .., x_n)$, une dérivée partielle, notée ∂ est la dérivée de f par rapport à une variable x_i, **toutes les autres étant gardées constantes**. La différentielle de f est alors :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \tag{3.3}$$

La **dérivée totale** par rapport à la variable x_i est

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}x_i} \tag{3.4}$$

$\longmapsto$ **Exercices 3.7, 3.8.**

Application au calcul d'incertitude

Soit une fonction f dépendant de paramètre $a, b, c\ldots$ que l'on mesure avec incertitude $a \pm \Delta a, \ldots$ On utilise la définition de la différentielle pour estimer l'incertitude totale de f en fonction des incertitudes de chaque paramètre :

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right|\Delta a + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right|\Delta b + \ldots$$

NB : l'erreur de mesure pouvant être positive ou négative, on se place dans le cas le plus défavorable en prenant la valeur absolue des dérivées partielles.

$\longmapsto$ **Exercices 3.9, 3.10, 3.11.**

Application à la description du mouvement

Voir le cours de Math. pour la physique.

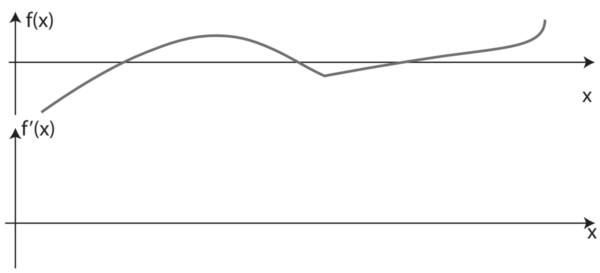
$\longmapsto$ **Exercices 3.12 et 3.13.**

Exercices

Exercice 3.1 Représenter graphiquement les définitions 3.1 et 3.2.

Exercice 3.2 Dessiner la courbe représentative de : a) une fonction dont les dérivées à droite et à gauche en x_0 sont différentes, b) une fonction discontinue ; c) une fonction continue mais non dérivable (donner des exemples de fonctions classiques).

Exercice 3.3 Dessiner la courbe de la dérivée de la fonction suivante



Exercice 3.4

1. Utiliser la définition du nombre dérivé pour calculer la dérivée en $x_0 = 0$ de $y = \sqrt{x}$ et de $y = |x|$
2. Utiliser la définition de la fonction dérivée pour calculer la dérivée de $y = a\sqrt{x}$.
3. Utiliser la définition des fonctions exponentielles et logarithme pour calculer la dérivée de ln(x).

Exercice 3.5 Soit $f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 3$. Quelle est l'équation de T, la tangente à la courbe représentative Γ de $f(x)$, au point d'abscisse $a = 1$? Où T recoupe-t-elle Γ ? Démontrer que T est aussi tangente à Γ en ce point (une telle droite s'appelle une bitangente).

Exercice 3.6 Calculer la dérivée et la dérivée seconde par rapport à la variable x des fonctions $f(x)$ suivantes (tout autre paramètre étant supposé constant)

$$f_1(x) = (ax+b)\sin(ax+b) \qquad f_2(x) = x(ax+b)^3 \qquad f_3(x) = \exp\left(-x^2\right)$$
$$f_4(x) = \frac{ax}{x+1} \qquad f_5(x) = (x-1)(x+3) \qquad f_6(x) = \sin^2(ax^2+bx)$$

Exercice 3.7 Pour chacune des fonctions f suivantes :

$$f_1 = xe^y + yz \quad f_2 = \cos x + y^3 z^2 + 3 \quad f_3 = \ln x + z/y - z^3$$

Donner l'expression de la dérivée totale de f par rapport au temps si les coordonnées x, y et z varient en fonction du temps.

Exercice 3.8 Exprimer la différentielle totale du volume d'un cylindre de rayon r et hauteur h

Exercice 3.9 On mesure une pièce à rénover. Longueur : $L = 5.4 \pm 0.05$m, largeur : $l = 3.55 \pm 0.05$m et hauteur $h = 2.25 \pm 0.05$m. Calculer, en précisant l'incertitude associée :

1. la longueur des plinthes (=périmètre de la pièce) ;
2. la surface de sol à carreler.
3. la surface de mur à peindre ;

Exercice 3.10 Le rayon d'une sphère est $r = 10 \pm 0.08$ cm. Calculer sa surface et son volume.
Rep : $S = 1256 \pm 20\text{cm}^2$; $V = 4186 \pm 100\text{cm}^3$.

Exercice 3.11 Un tube plein de diamètre 1.62 ± 0.03 cm et de hauteur 3.44 ± 0.05 cm a une masse de $23.2 \pm 0.1g$. Calculer son volume et sa masse volumique.
Rep : $V = 7,09 \pm 0,36\text{cm}^3$; $\rho = 3,27 \pm 0,18\text{g/cm}^3$.

Exercice 3.12 Un randonneur marche sur un relief dont la cote z peut être représentée dans un repère cartésien par :

$$z(x,y) = \frac{1}{2}\left(-x^3 + xy + \cos(y) + x\right) \quad (x,y) \in [-1;1] \times [-1;1]$$

où x, y et $z(x,y)$ sont en km, x représente la direction Ouest/Est et y la direction Sud/Nord.

1. Partant du point de coordonnées (-1,-1), le randonneur se déplace vers l'Est à la vitesse constante u. Donner l'expression de
   (a) la pente que gravit le randonneur en fonction de x.
   (b) sa vitesse verticale.
2. Arrivé au point (1,-1), il décide de partir plein Nord à la vitesse constante v. Mêmes questions qu'en 1.
3. Arrivé au point (1,1) il repart vers le sud/ouest à la vitesse (u, v). Quelle est la condition sur u et v et sur x et y pour que le randonneur passe par (0,0) ? En déduire sa vitesse verticale.

Exercice 3.13 Transport et dégradation
Un contaminant se dégrade au fur et à mesure de son avancée dans un système lagunaire. Sous certaines conditions, l'évolution de la concentration C du contaminant en fonction du temps et de l'espace peut être représentée en une dimension par l'équation

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} + u\frac{\partial C(x,t)}{\partial x} = -kC(x,t)$$

où k est un coefficient de dégradation. Résoudre cette équation pour les conditions initiale et à la limite suivantes :

$$\begin{aligned} C(x,0) &= 0 \;\forall\; x \\ C(0,t) &= C_0 \;\forall\; t \end{aligned}$$

FICHE

4

EGC3 - Bases de Mathématiques - 2015/2016

Intégration

Résumé de cours

4.1 Intégration analytique

Primitive et intégrale

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. F est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et si $\forall\, x \in I\;\; F'(x) = f(x)$.
La fonction $G : I \to \mathbb{R}$ est aussi une primitive de f sur I si et seulement si il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall\, x\, \in I$, $G(x) = F(x) + C$.
Soit F une primitive de f sur I. Soient a, $b \in I$. Alors le nombre $F(b) - F(a)$ est appelé **intégrale** de f sur I.

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{4.1}$$

Interprétation géométrique (intégrale de Riemann) Soit $(x_0, \ldots, x_i, \ldots x_N)$ une subdivision de l'intervalle $[a; b]$ avec $a = x_0$, $b = x_N$, $\Delta x_i = (x_{i+1} - x_i)$ et $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_i \Delta x_i f(\xi_i) \tag{4.2}$$

L'intégrale I est égale à l'aire délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

$\longmapsto$ **Exercice 4.1.**

Utilisation des différentielles :

$$\int f'(u)\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}(f(u)) = f(u)$$

$\longmapsto$ **Exercice 4.2.**

Intégration par parties : Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions dérivables sur un même intervalle $[a, b]$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(x) = u(x)v'(x)$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Quelques primitives classiques :

- $\triangleright$ $f(x) = u'(x)u^\alpha$, $\alpha \neq -1 \to \int f(x)\mathrm{d}x = \frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}$
- $\triangleright$ $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \to \int f(x)\mathrm{d}x = \ln|u\,(x)|$
- $\triangleright$ $f(x) = u'(x)e^{u(x)} \to \int f(x)\mathrm{d}x = e^{u(x)}$

$\longmapsto$ **Exercices 4.3, 4.4 et 4.5.**

Valeur moyenne :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{4.3}$$

Centre de masse : Les coordonnées du centre de masse G sont données par

$$X_G = \frac{1}{M}\int X \mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int \rho X \mathrm{d}V \tag{4.4}$$

où X représente la composante x, y ou z et où $M = \int \mathrm{d}m$.

$\longmapsto$ **Exercices 4.6, 4.7.**

4.2 Méthodes numériques d'intégration

Lorsque l'on ne sait pas intégrer la fonction f analytiquement ou l'orsqu'on souhaite estimer une intégrale à partir de points de mesures, on utilise une méthode numérique d'intégration.

Méthode des rectangles

On utilise la définition de l'intégrale de Riemann (4.2), approchée en utilisant des valeurs finies de Δx_i et en choisissant ξ_i généralement à gauche, au milieu ou à droite de l'intervalle $[x_i; x_{i+1}]$. Méthode des rectangles...

... à gauche : $\xi_i = x_i$ ... à droite : $\xi_i = x_{i+1}$ ... au milieu : $\xi_i = (x_i + x_{i+1})/2$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \simeq \Delta x_i f(x_i) \qquad \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \simeq \Delta x_i f(x_{i+1}) \qquad \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \simeq \Delta x_i f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2})$$

$\longmapsto$ **Exercice 4.9.**

Méthode des trapèzes

La plus adaptée lorsque l'on dispose de points de mesure. L'intégrale sur un intervalle $[x_i; x_{i+1}]$ est approchée par l'aire du trapèze défini par les points $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \simeq \Delta x_i \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

$\longmapsto$ **Exercices 4.10, 4.11 et 4.12.**

Application à la résolution d'équation différentielles :

Exercices

Exercice 4.1 Représenter graphiquement l'équation (4.2).

Exercice 4.2 Calculer

$$I = \int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x\cos(x^2)\mathrm{d}x$$

Exercice 4.3 Calculer les primitives suivantes :

$$P_1(x) = \int \frac{1}{x/2+4}\mathrm{d}x \qquad P_2(x) = \int \frac{1}{(3x-2)^2}\mathrm{d}x \qquad P_3(x) = \int \frac{3x^3+2x^2+1}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$P_4(x) = \int \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x \qquad P_5(x) = \int \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x \qquad P_6(x) = \int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

Réponses : $P_1(x) = 2\ln(x+8)$; $P_2(x) = 1/(6-9x)$; $P_3(x) = 3x^2/2+2x-1/x$; $P_4(x) = \ln(x^2-1)$; $P_5(x) = P_6(x) = \ln(1+x)/(1-x)$

Exercice 4.4 Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-1}^{0} (2x+1)\, e^{-x}\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_{-\ln 2}^{\ln 3} (1-2e^t)\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$$

$$I_4 = \int_0^1 \ln t \mathrm{d}t \qquad I_5 = \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x$$

Réponses : $I_1 = e - 3$; $I_2 = \ln(5) - 5$; $I_3 = 2\sqrt{2} - 2$; $I_4 = -1$ (IPP) ; $I_5(x) = L/2$

Exercice 4.5 Aires et volumes de formes élémentaires
On définit π comme le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre. A partir de cette définition, retrouver les formules suivantes :

1. Aire du disque de rayon R.
2. Aire latérale et volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur H.
3. Aire et volume de la sphère de rayon R.

Exercice 4.6 Barycentre d'un système continu
Une barre métallique de longueur L est faite d'un alliage dont la composition n'est pas homogène. La masse par unité de longueur (dite "masse linéique") varie de la façon suivante :

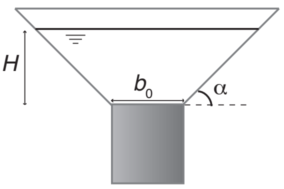
$$\mu = ax + b, \quad a \geq 0, \quad b > 0 \tag{4.5}$$

x étant l'abscisse le long de la barre (x est donc compris entre 0 et L).

1. Donner la position x_{G} du barycentre de la barre en fonction de a et b.
2. Vérifier que l'on retrouve bien le cas particulier $x_{\mathrm{G}} = \frac{L}{2}$ lorsque μ est uniforme.
3. Quelle est l'expression de x_{G} lorsque $b = 0$?
4. Même question pour une plaque rectangulaire de dimensions $L \times l$ avec la masse surfacique σ :

$$\sigma = ax + by + c \tag{4.6}$$

Exercice 4.7 Volume d'un réservoir tronconique



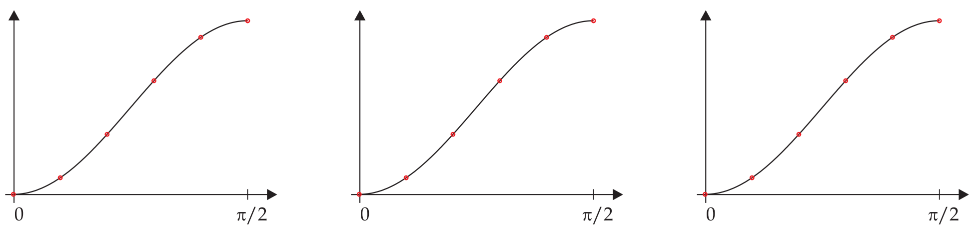
Vue en coupe du réservoir

1. Exprimer l'évolution du volume du réservoir tronconique ci-contre en fonction de la hauteur d'eau.
2. Calculer la position de son centre de masse.
3. Vérifier que l'on retrouve bien celle d'un triangle lorsque $b_0 = 0$.

Exercice 4.8 Pression hydrostatique
En hydraulique, la pression hydrostatique peut être définie par la pression exercée par une colonne d'eau à l'équilibre, soumise à la seule force de gravité. En prenant la pression atmosphérique comme référence ($P_{\mathrm{atm}} = 0$), la pression P (en pascal) au-dessous d'une colonne d'eau de hauteur h est donnée par $P = \rho g h$ où ρ est la masse volumique de l'eau et g la constante d'accélération gravitationnelle. On considère l'effet de l'eau sur une des parois verticales d'un réservoir rectangulaire (piscine) :

1. Tracer le profil de la pression en fonction de la profondeur dans la piscine.
2. Calculer la poussée de l'eau F (résultante des forces de pression) sur une paroi de la piscine.
3. Calculer le point d'application de F sur la paroi.

Exercice 4.9 Calculer l'intégrale de la fonction $\sin^2(x)$ sur l'intervalle $[0; \pi/2]$ par les trois variantes de la méthode des rectangles, en utilisant 6 points équidistants. Comparer les résultats obtenus à la solution exacte et expliquer ces résultats en s'aidant d'une représentation graphique :

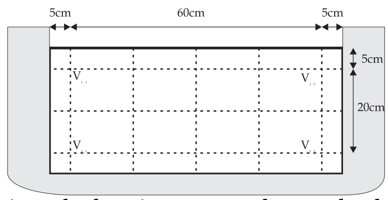


à gauche au milieu à droite

Exercice 4.10 Quantité de polluant dans un canal
On mesure un flux de contaminant passant dans un canal pendant 12h ; calculer la masse de polluant correspondante, par les méthodes des rectangles et des trapèzes.

Heure	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Flux μg/s	0,1	0,52	0,96	1,53	1,86	2,13	2,21	2,18	1,98	1,62	1,25	0,86

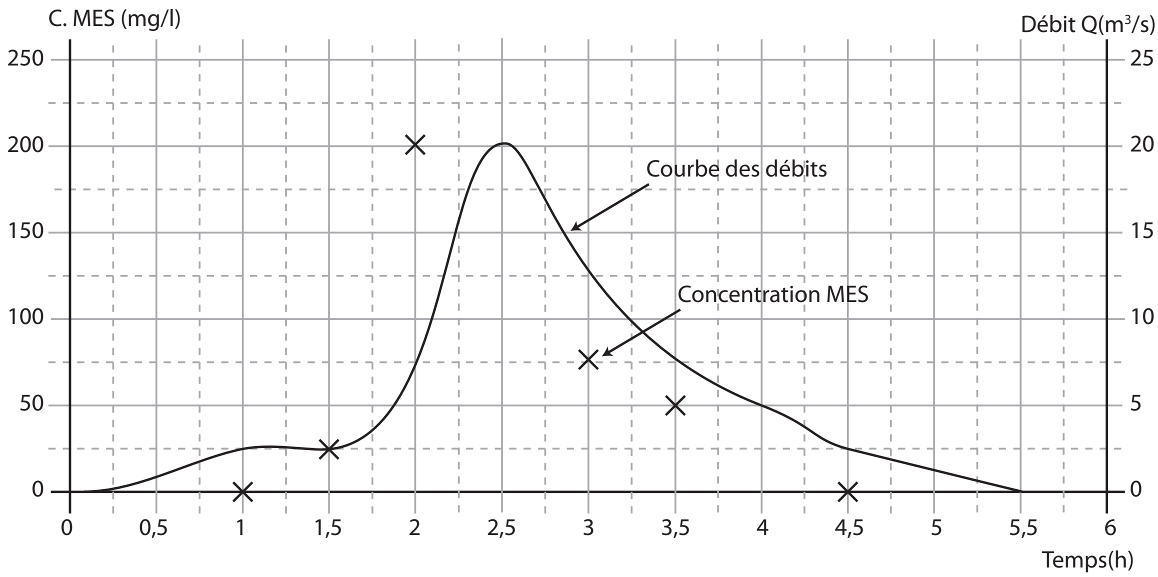
Exercice 4.11 Jaugeage au moulinet
On réalise une série de mesure de vitesse au moulinet dans une section de canal (voir figure ci-contre). Les mesures sont rassemblées dans la matrice V ci-dessous.



$$\mathbf{V} = (v_{i,j}) = \begin{pmatrix} 3,2 & 4,5 & 4,7 & 4 & 3,2 \\ 1,7 & 1,8 & 2,1 & 2,1 & 1,9 \\ 0,6 & 0,65 & 0,7 & 0,67 & 0,64 \end{pmatrix} \mathrm{ms}^{-1} \qquad (4.7)$$

Calculer le débit qui passe dans le canal, à l'aide d'une double intégration de la vitesse par la méthode des trapèzes. Pour prendre en compte le fait qu'il n'y a pas de mesure sur les bords, on prendra un "coefficient de bord" $K_{\text{parois}} = 0,7$ et on considèrera que la vitesse au bord et au fond est égale à K_{parois} fois la vitesse au point de mesure le plus proche. De même, on choisira $K_{\text{SurfaceLibre}} = 0,9$.

Exercice 4.12 Volume de crue et quantité de MES
Dans le cadre d'un diagnostic de réseau d'assainissement, des mesures de débit et de Matière En Suspension (MES) pendant un événement pluvieux ont abouti au graphique suivant :



▷ Evaluer le volume de cette crue
▷ Evaluer la masse de MES véhiculée (on pourra tester plusieurs méthodes)

FICHE

5

EGC3 - Bases de Mathématiques - 2015/2016

Développement en séries Application à la recherche de racine

Résumé de cours

5.1 Développement en série

Différentielle

La différentielle en x_0 d'une fonction f dépendant d'une seule variable x est donnée par :

$$\mathrm{d}f(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)\mathrm{d}x = f'(x_0)\mathrm{d}x \tag{5.1}$$

Développements en série de Taylor Une fonction $f(x)$ infiniment dérivable au voisinage de x_0 admet un développement en série en x_0, donné par :

$$f(x_0 + \mathrm{d}x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,(\mathrm{d}x)^n \tag{5.2}$$

où $f^{(n)}(x_0)$ est la dérivée d'ordre n de la fonction f en x_0. On parle de développement limité à l'ordre N lorsque l'on n'exprime que les $N+1$ premiers termes de la série, les termes d'ordre supérieurs étant regroupés sous la forme d'une fonction $o((\mathrm{d}x)^N)$ qui tend vers zéro plus vite que $(\mathrm{d}x)^N$.

$\longmapsto$ **Exercices 5.1 et 5.2.**

5.2 Méthodes numériques de recherche de racine

On cherche à résoudre $f(x) = 0$ mais on ne sait pas exprimer x de façon analytique. On utilise donc une méthode itérative qui va tendre vers la solution.

Principe de base : avoir une idée de la solution (*e.g.* on ne cherche pas une hauteur d'eau négative !).

$\longmapsto$ **Exercice 5.3.**

Méthode de dichotomie

On cherche la solution de $f(x) = 0$ dans un intervalle $[a, b]$ tel que $f(a)f(b) < 0$ (l'intervalle contient une racine). On pose $c = (a + b)/2$. Si $f(a)f(c) < 0$ alors c devient b sinon, c devient a. On itère jusqu'à ce que $f(c)$ soit proche de zéro.

Méthode du point fixe

On cherche à résoudre l'équation $f(x) = x$. On choisi un point de départ x_0 et on calcule $x_1 = f(x_0)$ jusqu'à ce que $x_i \approx x_{i+1}$ (NB : la convergence n'est pas garantie ; la démonstration de la condition de convergence se fait à l'aide des développements limités).

$\longmapsto$ **Exercice 5.4**

Méthode de Newton, ou méthode de la tangente

Sous certaines conditions la suite suivante converge vers la solution de $f(x) = 0$ (démonstration à l'aide des développements limités) :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{5.3}$$

$\longmapsto$ **Exercice 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10.**

Exercices

Exercice 5.1 Retrouver le développement limité en zéro à l'ordre n de la fonction $\sin(x)$. Sur un logiciel de graphique ou sur excel, tracer la fonction $\sin(x)$ et ses développements limités successifs (jusqu'à $n = 7$).

Exercice 5.2 Estimation de la valeur de e.
La fonction exponentielle est définie comme la fonction égale à sa dérivée et qui passe par 1 en zéro : $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$. A l'aide d'un développement limité de la fonction exponentielle au voisinage de $x = 0$, estimer la valeur de $f(1) = e$.

Exercice 5.3 Tracer la courbe représentative d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle $I = [a, b]$ si : 1) $f(x)$ a une racine sur I ; 2) $f'(x)$ s'annule mais pas de racine sur I ; 3) $f(x)$ a un nombre pair de racines sur I

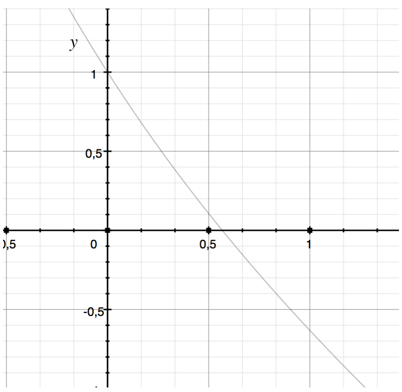
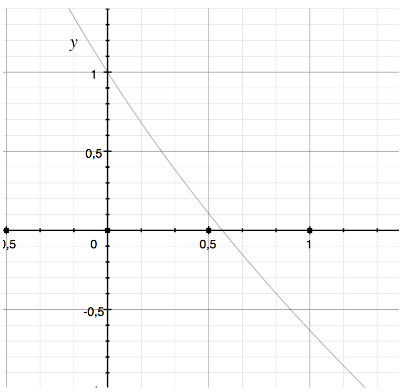
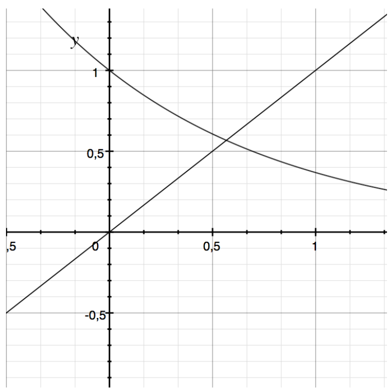
Exercice 5.4 Théorème du point fixe
Démontrer le théorème suivant :
Soit f une fonction dérivable de fonction dérivée f' continue sur un intervalle I contenant un point fixe x_{sol} de f (c'est-à-dire $f(x_{\text{sol}}) = x_{\text{sol}}$) et telle que $\left|f^{'}(x)\right| < 1 \, \forall x \in I$, alors la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = f\,(x_n)$ converge vers x_{sol} dès que x_0 est choisi dans I.
Indice : définir l'erreur e_n à chaque étape et réaliser un développement limité à l'ordre 1 de $f(x_n + e_n)$.

Exercice 5.5 Méthode de Newton
Soit une fonction $f(x)$ dont on cherche la racine x_{sol} vérifiant $f(x_{\text{sol}}) = 0$

1. Soit un point x_0 ; donner l'équation de la tangente $T(x)$ à $f(x)$ en x_0.
2. Calculer l'intersection x_1 de la droite $T(x)$ avec l'axe des abscisses en fonction de x_0.
3. Montrer que la suite (x_n) définie par la question 2 peut converger vers la solution x_{sol} de $f(x) = 0$ et donner la condition de convergence (utiliser le développement en série à l'ordre 2 de $f(x_{n+1})$).

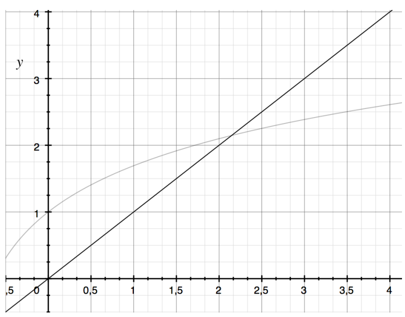
Exercice 5.6 Interprétation graphique des méthodes de recherche de racine
On cherche la solution de l'équation $f(x) = 0$. Représenter graphiquement (sans calcul) les étapes des méthodes de dichotomie, Newton et point fixe, pour les fonctions suivantes :

▷ $f_1(x) = e^{-x} - x$.

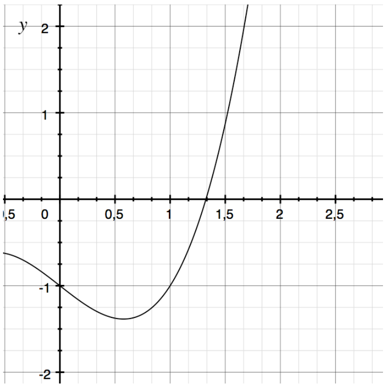




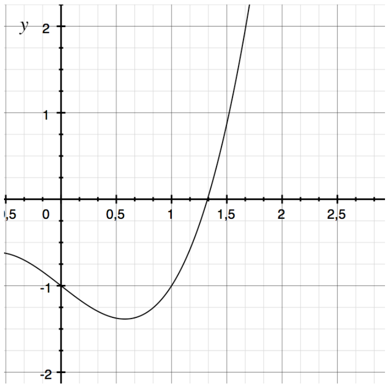
▷ $f_2(x) = \ln(x + 1) - x + 1 = 0$ (racine positive).

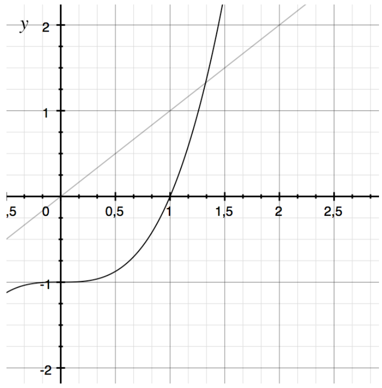




▷ $f_3(x) = x^3 - x - 1 = 0$.







Exercice 5.7 Comparaison des méthodes de recherche de racine.
On cherche la solution de l'équation $f(x) = 0$ avec $f(x) = e^{-x} - x$. Sachant que la solution appartient à l'intervalle [0 ;1], résoudre le problème par les méthodes de dichotomie, point fixe, Newton et comparez la rapidité de convergence.

Exercice 5.8 Calcul de la perte de charge linéaire dans une conduite.
La perte de charge linéaire le long d'une conduite circulaire de diamètre D peut s'écrire : $j = \lambda V^2/2gD$, où V est la vitesse de l'écoulement et λ est un coefficient qui peut être estimé par la formule de Colebrook (1939) :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right) \tag{5.4}$$

avec k le coefficient de rugosité et R_e le nombre de Reynolds : $R_e = VD/\nu$ où ν est la viscosité cinématique.
Résoudre l'équation 5.4 par la méthode qui vous paraît la plus adaptée et en déduire j, avec $D = 250$ mm ; $k = 1,5$ mm ; $Q = 0,015$ m^3/s ; $\nu = 1 \cdot 10^{-6}$ m^2/s.

Exercice 5.9 Calcul de la hauteur critique dans un canal
Soit un canal trapézoïdal de largeur à la base $B_0 = 2$m, de pente de berge 1/1 et transitant un débit $Q = 10\,\mathrm{m}^3$/s. La hauteur critique h_c est définie telle que le nombre de Froude est égal à 1, soit :

$$\frac{Q^2 B}{gS^3} = 1$$

où B est la largeur au miroir et S la surface mouillée.
Ecrire l'équation vérifiée par h_c et la résoudre par la méthode de Newton.

Exercice 5.10 Equation de la charge
En hydraulique à surface libre, dans un canal de section rectangulaire, l'équation de la charge peut s'écrire :

$$H = y + z + \frac{Q^2}{2g(yb)^2} \tag{5.5}$$

où y est la hauteur d'eau, z la cote du fond et b la largeur du canal. Dans un canal dont la cote du fond et la largeur peuvent varier, on souhaite connaître la hauteur d'eau en un point A inaccessible. On effectue donc des mesures en un point B, accessible, qui permettent de connaître la charge H_B en ce point. En supposant le régime permanent et que la perte de charge entre les points A et B peut être négligée, en déduire la hauteur d'eau y_A en A, à l'aide des trois méthodes itératives vues dans ce chapitre. Laquelle de ces méthodes vous paraît la plus appropriée dans ce cas ?
Valeurs numériques : $H_B = 0.8\,\mathrm{m}$, $z_A = 0\,\mathrm{m}$, $Q = 0.5\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$, $b_A = 1\,\mathrm{m}$, $g = 9.81\,\mathrm{ms}^{-2}$.

FICHE

6

EGC3 - Bases de Mathématiques - 2015/2016

Optimisation/Régression

Résumé de cours

6.1 Extremum

- ▷ Le nombre $f(c)$ est un maximum (*resp.* minimum) local de la fonction f s'il existe un intervalle I contenant c tel que $f(x) \leq f(c)$ (*resp.* $f(x) \geq f(c)$) pour tout x dans I. Si I est l'ensemble du domaine de définition de f alors $f(c)$ est un extremum global (ou absolu).
- ▷ Si $f(c)$ est un extremum local et si f est dérivable en c alors $f'(c) = 0$ (*i.e.* c est un point critique de f).
- ▷ La réciproque n'est pas vraie : si c est un point critique sans être un extremum local, il s'agit d'un col.
- ▷ Soit c un point critique de f sur I ; si $f''(c) > 0$ (*resp.* $f''(c) < 0$) la valeur critique $f(c)$ est un minimum (*resp.* maximum) local.

$\longmapsto$ **Exercices 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 et 6.5.**

6.2 Regression / approximation

On cherche à approcher une série de points expérimentaux (x_i, y_i) par une loi du type $y = f(x; a)$, où a est un paramètre de la loi à ajuster (*cf.* "ajouter une courbe de tendance" ou "droitereg" sous Excel). L'ajustement se fait en faisant varier le paramètre de manière à minimiser l'écart entre la fonction $f(x)$ et les n points expérimentaux dont on dispose, généralement estimé par une fonction distance :

$$S_p = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i; a) - y_i|^p \tag{6.1}$$

Si $p = 2$ on parle d'ajustement "aux moindres carrés" (S_2 est le carré de la distance euclidienne dans l'espace de dimension n).
Minimiser S_p revient à déterminer a tel que la dérivée de S_p par rapport à a est nulle. Dans le cas où plusieurs paramètres doivent être déterminés, il faut que les dérivées partielles de S_p par rapport à chacun des paramètres soient nulles.

$\longmapsto$ **Exercices 6.6, 6.7, 6.8.**

Exercices

Exercice 6.1 Soit la fonction

$$f(x) = ax^3 - 3x^2 + 3x$$

existe-t-il une valeur de a pour laquelle f admette un extremum en $x = 1$?

Exercice 6.2 Problème de l'enclos optimal
Un exploitant dispose d'une longueur P de clôture et de quatre piquets d'angle. Il souhaite les utiliser pour délimiter un enclos rectangulaire de dimensions (l, L). Il est de son intérêt de trouver la forme d'enclos pour laquelle la surface occupée est maximale.

1. Exprimer l'aire A du rectangle en fonction de P et de sa dimension l (L ne doit pas apparaître dans l'expression finale).
2. Entre quelles valeurs maximale et minimale l peut-il varier physiquement ?
3. Pour quelle valeur de l (exprimée en fonction de P) l'aire du rectangle est-elle maximale ? Quelle est l'expression de A dans ce cas particulier ? Quelle est la forme de l'enclos ? (faire un graphique).
4. Que devient le rectangle d'aire maximale si l'enclos peut être adossé à un mur ?

Exercice 6.3 Volume maximal d'un réservoir
On souhaite construire un réservoir cylindrique de rayon r et hauteur h, ouvert au-dessus, avec une quantité de béton fixée (et donc une surface imposée). Quel volume maximal peut avoir le réservoir ? pour quelles valeurs de r et h ?

Exercice 6.4 Surface minimale d'un réservoir
On souhaite construire un réservoir cylindrique fermé de rayon r et hauteur h, d'un volume V fixé. Quelles sont les dimensions du réservoir qui permettent de minimiser sa surface ?

Exercice 6.5 Quelles sont les dimensions à donner à un rectangle inscrit à un demi-cercle de rayon 1 pour obtenir une surface maximale ?

Exercice 6.6 Régression linéaire
On dispose de n points de mesure (x_i, y_i) que l'on souhaite approcher par une loi linéaire : $f(x) = ax$.

1. Donner l'expression de a pour un ajustement aux moindres carrés.
2. Que faudrait-il faire pour ajuster une loi du type $f(x) = ax + b$?

Exercice 6.7 Vidange de réservoir
La loi de vidange d'un réservoir cylindrique peut s'écrire $Q = \alpha\sqrt{H}$. Déterminer le coefficient α par régression à partir des mesures suivantes :

1. directement sur la fonction $a\sqrt{H}$
2. en utilisant la fonction ln pour linéariser le problème (comme le fait Excel)

H(m)	1,32	1,06	0,78	0,45	0,28	0,18	0,12	0,07
Q(l/s)	1,5	1,24	1,08	0,95	0,73	0,61	0,50	0,40

Exercice 6.8 Coefficient de perte de charge linéaire en conduite.
La perte de charge linéaire dans une conduite de longueur L et de diamètre D peut s'écrire en fonction de la vitesse u :

$$\Delta H = jL = \lambda \frac{u^2 L}{2gD} \tag{6.2}$$

Le coefficient λ peut être estimé par la formule de Colebrook (équation 5.4 page 31) mais cette formule nécessite la valeur de rugosité de la conduite, difficile à estimer. On réalise donc une série de mesures de perte de charge en fonction du débit (cf TP de mécanique des fluides), dans une conduite de diamètre$D = 60$mm et de longueur $L = 6$m :

Q(l/s)	0,95	1,45	2,03	2,49	3,06
ΔH(m)	0.027	0.059	0.12	0.18	0.23

On souhaite estimer le coefficient λ pour la conduite, en réalisant une approximation polynomiale de la perte de charge en fonction du débit :

- ▷ Quelles hypothèses peut-on faire sur le polynôme ?
- ▷ Déterminer le polynôme et en déduire la valeur de λ.

FICHE

7

EGC3 - Bases de Mathématiques - 2015/2016

Equations différentielles ordinaires

Résumé de cours

7.1 Equation différentielle ordinaire du premier ordre :

Ecriture générale :

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = f(y;x) \qquad \textit{ou :} \quad y'(x) = f(y;x) \tag{7.1}$$

où f est une fonction quelconque qui dépend de la fonction inconue y et de la variable x.

Méthode de séparation des variables
On écrit l'équation (7.1) sous la forme : $y'(x) = g(x)h(y(x))$. tant que $h(y) \neq 0$, on peut écrire :

$$\frac{1}{h(y)}\mathrm{d}y = g(x)\mathrm{d}x \tag{7.2}$$

On intègre ensuite les deux membres.
$\longmapsto$ **Exercices 7.1, 7.2 et 7.3.**

EDO du premier ordre, linéaire à coefficients variables et avec second membre :

$$\text{(E2)} \quad \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + a(x)y(x) = b(x) \quad \text{ou} \quad y' + ay = b$$

avec a et b variables. Les solutions de (E2) sont données par la somme des solutions de l'équation homogène (sans second membre) et d'une solution particulière.

Solution de l'équation homogène :

$$y_H(x) = Ke^{-A(x)}$$

où K est une constante et $A(x)$ est une primitive de la fonction $a(x)$ (si a est contant, on retrouve $A = ax$).
Solution particulière : Méthode de variation de la constante. On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = k(x)e^{-A(x)}$ (on fait varier la constante). En reportant dans l'équation initiale, on obtient une équation sur $k(x)$.
$\longmapsto$ **Exercices 7.4, 7.5, 7.6, 7.7, 7.8.**

7.2 Résolution numérique

Dans le cas où l'on ne sait pas intégrer l'équation $y^{'} = f(x)$ de façon analytique, on écrit l'intégrale entre 2 points x_1 et x_2 :

$$\int_{x_1}^{x_2} y'(x)\mathrm{d}x = y_2 - y_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x \tag{7.3}$$

On peut estimer l'intégrale de $f(x)$ par une méthode numérique d'intégration. Il suffit donc de connaître un point (x_1, y_1) appelé condition initiale, pour pouvoir évaluer $y_2 = y(x_2)$ et ainsi de suite.
Si l'équation s'écrit $y' = f(y)$, on sépare les variables

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x = x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{y}\mathrm{d}y \tag{7.4}$$

et on estime l'intégrale de droite par une méthode numérique.

$\longmapsto$ **Exercices 7.9, 7.10 et 7.11.**

Exercices

Exercice 7.1 Démontrer la solution de l'équation $f'(x) + af(x) = 0$ avec $f(0) = f_0$.

Exercice 7.2 Cinétique de dégradation d'ordre 1
Dans une station d'épuration, un contaminant dans l'eau usée peut se dégrader à une vitesse proportionnelle à sa concentration ; il existe donc une constante k (coefficient de dégradation) telle que

$$\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} = -kC(t)$$

1. Donner l'expression de $C(t)$ en fonction de C_0, la concentration initiale de contaminant dans le système
2. Il existe deux constantes intéressantes pour caractériser la solution :
   (a) le temps caractéristique $\tau = 1/k$. Si (T) désigne la tangente à l'origine de la courbe de concentration $C(t)$, montrer que le temps caractéristique τ est l'abscisse du point d'intersection de la droite (T) avec l'axe du temps.
   (b) la période de demi-vie : au bout de laquelle la moitié du contaminant s'est dégradée. Exprimer cette période, notée $T_{1/2}$ en fonction de τ.

Exercice 7.3 Chaîne de dégradation 1
On considère le processus de dégradation suivant : un composé A se transforme par dégradation en un nouveau composé B. Les concentrations A et B des composés A et B obéissent aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = & -kA^p \\ \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = & kA^p \end{cases} \qquad \begin{cases} A(t=0) = & A_0 \\ B(t=0) = & 0 \end{cases} \tag{7.5}$$

où A_0 est la concentrations initiale en composé A, k_1 la constante de dégradation (positives) et $p \geq 0$ est l'ordre de la cinétique. A_0, k, et p sont connues.

1. Quelle est la masse totale de composés A et B dans le système ?
2. Déterminer les solutions analytiques $A(t)$ et $B(t)$ pour tout t, en fonction de la valeur de p

Exercice 7.4 Chaîne de dégradation 2
On considère le processus de dégradation suivant : un composé A se transforme par dégradation en un nouveau composé B. Les concentrations A et B des composés A et B obéissent aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = & -k_1A \\ \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = & k_1A - k_2B \end{cases} \qquad \begin{cases} A(t=0) = & A_0 \\ B(t=0) = & 0 \end{cases} \tag{7.6}$$

où A_0 est la concentrations initiale en composé A, k_1 et k_2 les constantes de dégradation (positives). A_0, k_1, et k_2 sont connues.

1. Déterminer les solutions analytiques $A(t)$ et $B(t)$ pour tout t
2. Que se passe-t-il si $k_1 = k_2$?

Exercice 7.5 Trajectoire
On considère le champ de vitesse suivant dans le plan horizontal :

$$\begin{aligned} u &= -a\sin(\omega t) \\ v &= a\cos(\omega t) \end{aligned}$$

où u et v sont les vitesses dans les directions x et y, a est l'amplitude de la fluctuation de la vitesse, et ω est appelée la pulsation. Soit M un point de coordonnées (x_0, y_0) à $t = 0$, soumis à ce champ de vitesse. Donner l'expression de la trajectoire de M et représenter cette trajectoire graphiquement.

Exercice 7.6 Vidange de réservoir
Lors de la vidange d'un réservoir, on montre que la variation de hauteur d'eau h dans le réservoir s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{2gh}\frac{S}{A(h)} \tag{7.7}$$

où S est la section de l'orifice et $A(h)$ est la section du réservoir au niveau h.
Résoudre l'équation (7.7), donner l'expression de la durée de vidange T du réservoir en fonction de la hauteur d'eau initiale h_0 et des autres paramètres du problème et représenter graphiquement $h(t)$:

1. pour un réservoir cylindrique, de rayon R ;
2. pour un réservoir conique, d'angle au sommet 2θ.

Exercice 7.7 Chute d'une goutte d'eau dans le brouillard
Une goutte d'eau, supposée sphérique, tombe à l'intérieur d'une zone de brouillard. A la date $t = 0$, son altitude est z_0 et sa vitesse est nulle ; son rayon initial est r_0. On considère $\vec{g}$ vertical et uniforme. La masse de la goutte n'est pas constante : en tombant, elle grossit en capturant la vapeur d'eau environnante. On supposera que le volume d'eau capturée par unité de temps est proportionnel à la surface de la goutte (on utilisera une constante de proportionnalité k), et qu'il se répartit de façon uniforme sur toute sa surface. Autrement dit, la goutte reste sphérique, seul son rayon varie au cours du temps.

1. Etablir l'équation qui donne l'évolution de la vitesse de chute de la goutte en fonction du temps. Comparer à la vitesse de chute en l'absence de capture de la vapeur d'eau environnante (k=0).
2. Montrer que, pour des durées très grandes, la vitesse de chute est équivalente à Kgt, avec $K \neq 1$ (au lieu de gt lorsqu'il n'y a pas capture du brouillard environnant).

Exercice 7.8 Modèle gravitationnel de Newton
Dans ce problème, vous allez reconstituer le raisonnement de Newton sur le modèle de gravitation universelle. A l'époque de Newton, il était connu que les trajectoires des planètes vérifiaient certaines règles telles que la constance de la vitesse aréolaire et des allures de coniques. Ces deux faits expérimentaux permettent de valider sa théorie. Un point M (une planète) se déplace dans un plan repéré en coordonnées polaires (origine O : le soleil). On définit la vitesse aréolaire comme l'aire balayée par le segment OM par unité de temps (cf. Figure).

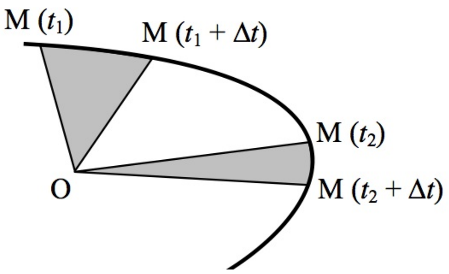


FIGURE 7.1 – Vitesse aréolaire constante pour un point soumis à une force centrale (les deux aires grisées sont égales et sont balayées pendant une même durée Δt).

1. A l'aide du principe fondamental de la dynamique, montrer que, si la vitesse aréolaire de M est constante, cela implique que M est soumis à une force colinéaire à $\vec{OM}$.
2. Montrer que, si cette force est proportionnelle à l'inverse du carré de la distance OM et dirigée vers O, le point M décrit une conique de foyer O. Pour cela, il faut établir une équation différentielle où la variable indépendante est θ et non le temps. Rappel (ou non) : en coordonnées polaires, une conique a pour équation :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \tag{7.8}$$

où θ est l'angle par rapport à la direction (OP), P étant le périhélie (point le plus proche du foyer).

Exercice 7.9 Résoudre l'équation différentielle suivante avec comme condition initiale $y = 2$ pour $x = 1$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$$

Comparer le résultat avec un calcul numérique par la méthode des rectangles, pour différents pas Δx (pour plus de rapidité, utiliser Excel).

Exercice 7.10 Intégrer l'équation suivante entre $x = 0$ et $x = 3$ (avec $\Delta x = 1$ puis $\Delta x = 0.5$), sachant que pour $x = 0$ on a $y = 1$:

$$y' = f(x) = \frac{10 - x^2}{5 - \sqrt{x}}$$

Exercice 7.11 Calcul d'une ligne d'eau
Sous certaines conditions, il est possible de représenter l'évolution de la hauteur d'eau dans un canal rectangulaire par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{S_0 - q^2 n^2 h^{-10/3}}{1 - \frac{q^2}{gh^3}} \tag{7.9}$$

où S_0 est la pente du canal (m/m), q est le débit divisé par la largeur du canal ($\mathrm{m^2s^{-1}}$), n est le coefficient de frottement de Manning ($\mathrm{m^{-1/3}s}$).
A une abscisse x_0, on mesure une hauteur d'eau h_0. Calculer la ligne d'eau à l'aval, c'est à dire la fonction $h(x)$ à différentes abscisses $x > x_0$, par la méthode des rectangles.
On prendra les valeurs suivantes : $x_0 = 0$; $h_0 = 4\mathrm{m}$; $\Delta h = -1\mathrm{cm}$; $S_0 = 0,01$; $q = 26\mathrm{m^2s^{-1}}$; $n = 0,03\mathrm{m^{-1/3}s}$ et $g = 9,81\mathrm{ms^{-2}}$

FICHE

8

Eléments d'algèbre linéaire

Résumé de cours

8.1 Définitions et opérations de base

Matrice de taille $n \times m$:

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

si $n = m$ alors la matrice est dite **Carrée** et les éléments a_{ii} sont appelés **éléments diagonaux**.
si $n = 1$ alors la matrice est une **matrice ligne**; si $m = 1$ alors la matrice est une **matrice colonne**
Identité.
La matrice carrée $n \times n$ dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 ($a_{ii} = 1\ \forall\ i$) et tous les autres éléments égaux à zéro ($a_{ij} = 0\ \forall\ i \neq j$) est la matrice identité, notée $\mathbf{I_n}$.
Si $\mathbf{A}$ est une matrice $n \times m$ alors : $\mathbf{I_m A} = \mathbf{A}$ et $\mathbf{AI_n} = \mathbf{A}$.
Transposée.
La transposée de $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$ est la matrice $\mathbf{A^T} = (a_{ji})_{\substack{j=1,\dots,m\\ i=1,\dots,n}}$

Somme. $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ ont les mêmes dimensions $n \times m$:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$$

Multiplication par un scalaire.

$$\lambda\mathbf{A} = (\lambda a_{ij})_{i,j}$$

Produit (Attention $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$). Le nombre de colonnes de $\mathbf{A}$ doit être égal au nombre de lignes de $\mathbf{B}$. Si $\mathbf{A} = (a_{ij})$ est une matrice $n \times l$ et $\mathbf{B} = (b_{ij})$ est de taille $l \times m$, alors $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ est une matrice de taille $n \times m$ dont les coefficients c_{ij} sont donnés par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj} \tag{8.2}$$

$\longmapsto$ **Exercices 8.1, 8.2, 8.3, 8.4.**

Déterminant et inverse.

Ils ne peuvent être calculés que pour une matrice carrée ($\mathbf{A}$ de taille $n \times n$). On se limite ici au cas $n = 2$:

$$\text{si } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ alors } \det \mathrm{A} = ad - bc \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.

$\longmapsto$ **Exercices 8.5 et 8.6**

8.2 Système d'équations linéaires

La résolution d'un système d'équations linéaires revient à inverser une matrice :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1i}x_i + \dots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ii}x_i + \dots + a_{in}x_n & = b_i \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{ni}x_i + \dots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

Les actions suivantes ne modifient pas la solution du système :
- ▷ permutation de deux lignes simultanément en **A** et **B** ;
- ▷ multiplication de chaque ligne par un scalaire non nul ;
- ▷ addition d'une ligne à une autre ligne de la matrice ;
- ▷ toute combinaison des opérations précédentes.

$\longmapsto$ **Exercices 8.7, 8.8, 8.9, 8.10 et 8.11**

Application de la résolution d'un système à l'interpolation
A partir de n points de mesure (x_i, y_i) sur un intervalle I, on souhaite estimer la valeur de y pour un x quelconque. **L'interpolation** consiste à déterminer une fonction f qui vérifie $f(x_i) = y_i$, $i = 1 \dots n$. Il existe un polynôme de degré n passant par $n+1$ points (x_i, y_i) non alignés, appelé **polynôme de Lagrange**. Plus le degré du polynôme est élevé, plus il a tendance à "osciller" entre les points de mesure (phénomène de Runge). On préfère donc soit **approcher** les points par une seule fonction simple (approximation/régression) soit interpoler les points linéairement "par morceaux" :

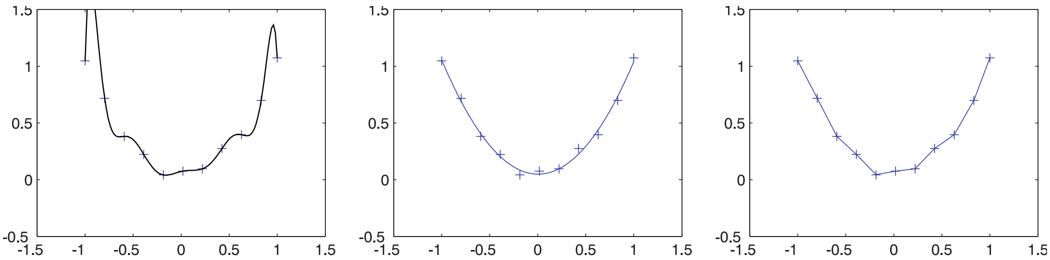


FIGURE 8.1 – Gauche : Interpolation par un polynôme de Lagrange de degré 10. Millieu : Approximation par une loi polynômiale de degré 2. Droite : Interpolation linéaire par morceaux.

NB : **L'extrapolation** consiste à utiliser la fonction d'interpolation ou d'approximation pour estimer la valeur recherchée en un point situé à l'extérieur de l'intervalle I.

$\longmapsto$ **Exercices 8.12, 8.13, 8.14 et 8.15.**

8.3 Application de l'algèbre linéaire à la géométrie

Applications linéaires Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ définie par $f(x_1, \dots, x_n) = (b_1, \dots, b_m)$ est dite linéaire si elle peut s'écrire sous forme matricielle : $f(x) = \mathbf{A}x = \mathbf{B}$ avec $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m,n}$ où **A** est appelée la matrice de l'application linéaire.

Changement de repère Pour passer d'un repère R de vecteurs unitaires $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ à un repère R' de vecteurs unitaires $\left(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\right)$ on utilise une **matrice de passage P**. Celle-ci contient en colonne les vecteurs de R' exprimés dans R. Soit un vecteur de composantes (x_1, x_2, x_3) dans R et (x'_1, x'_2, x'_3) dans R' ; on a :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\longmapsto$ **Exercices 8.16, 8.17, 8.18, 8.19.**

Exercices

Exercice 8.1 Calculs matriciels élémentaires
Soient
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&3\\0&-1\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&-3\\2&-1\end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix}3&0\\-2&1\end{pmatrix}$$
calculer :
$\mathbf{M_1}=\mathbf{A}+3\mathbf{B}$; $\mathbf{M_2}=\mathbf{A^T}$; $\mathbf{M_3}=\mathbf{AB}$; $\mathbf{M_4}=\mathbf{BA}$; $\mathbf{M_5}=\mathbf{AB}+\mathbf{BC}$; $\mathbf{M_6}=\mathbf{A}+\mathbf{B^T}\mathbf{C}$.

Rep. : $\mathbf{M_1}=\begin{pmatrix}5&-6\\6&-4\end{pmatrix}$; $\mathbf{M_2}=\begin{pmatrix}2&0\\3&-1\end{pmatrix}$; $\mathbf{M_3}=\begin{pmatrix}8&-9\\-2&1\end{pmatrix}$; $\mathbf{M_4}=\begin{pmatrix}2&6\\4&7\end{pmatrix}$; $\mathbf{M_5}=\begin{pmatrix}17&-12\\6&0\end{pmatrix}$; $\mathbf{M_6}=\begin{pmatrix}1&5\\-7&-2\end{pmatrix}$;

Exercice 8.2 Calculer :
$$\mathbf{M_1}=\begin{pmatrix}2&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-2\\-2&2\\3&1\end{pmatrix}\qquad \mathbf{M_2}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-2&3&0\end{pmatrix}$$

Exercice 8.3 Produit matriciel / Produit scalaire
Soit $\mathbf{A}$ une matrice ligne (de taille $1\times l$) et $\mathbf{B}$ une matrice colonne (de taille $l\times 1$) :
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_1&\ldots&a_i&\ldots&a_l\end{pmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_i\\\vdots\\b_l\end{pmatrix}$$
Calculer les produits $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{BA}$. Que représente le produit $\mathbf{AB}$?

Exercice 8.4 Produit de matrices

1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\-2&5\end{pmatrix}$; $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&-1\\3&0\end{pmatrix}$. Calculer $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{BA}$; commenter.
2. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&-1\\0&5\end{pmatrix}$; $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&-3\\0&0\end{pmatrix}$. Calculer $\mathbf{AB}$; commenter.
3. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}$; $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$; $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-1&3\\-2&6\end{pmatrix}$. Calculer $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{AC}$; commenter.

Exercice 8.5 Inverse de matrice
Soit
$$\mathbf{A_1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$
retrouver la formule de l'inverse de $\mathbf{A_1}$.

Exercice 8.6 Inverse d'un produit de matrices

1. Montrer que si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux matrices inversibles alors $(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
2. Application : comparer le calcul de $(\mathbf{AB})^{-1}$ et $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ avec les matrices suivantes :
   $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$; $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-9&-4\\2&1\end{pmatrix}$

Exercice 8.7 Résoudre les systèmes suivants :

$$(\mathrm{S1})\ \begin{cases}3x+2y+z=&2\\2x+4y+z=&1\\6x+4y+z=&4\end{cases}\qquad (\mathrm{S2})\ \begin{pmatrix}25&-5&1\\4&-1&3\\4&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9,5\\4,2\\10,8\end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{S3})\ \begin{pmatrix}5,32&-2,2&1\\4,58&-4,6&1\\4,67&4,5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\5\\10\end{pmatrix}\qquad (\mathrm{S4})\ \left\{\begin{array}{ccc}3x&-7y&=&-7\\-1,5x&+3,5y&=&-1\end{array}\right.$$

$$(\mathrm{S5})\ \left\{\begin{array}{cccc}4x&-2y&+7z&=&20\\3x&-y&+3z&=&10\\2x&-3y&-z&=&3\end{array}\right.\qquad (\mathrm{S6})\ \left\{\begin{array}{ccc}x_1+7x_3-2x_4&=&-18\\-x_1+x_2+3x_3-2x_4&=&-2\\x_3+4x_4&=&2\\-4x_1+2x_2+3x_3+x_4&=&11\end{array}\right.$$

Rep : S1 : (3/4 ;-1/8 ;0) ; S2 : (0,927 ; 2,968 ; 1,153) ; S3 : (2,35 ; 0,53 ; -3,33) ; S4 : pas de solution ; S5 : (1 ;-1 ;2) ; S6 : (-3.38 ;0.99 ;-1.82 ;0.95)

Exercice 8.8 Sans résoudre les systèmes suivants, déterminer combien ils ont de solution(s) : aucune, 1 seule, une infinité.

$$(S1)\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +2y & +5z & = & 2 \\ x & +y & -z & = & 4 \\ 2x & +4y & +10z & = & 4 \end{array}\right. \quad (S2)\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +2y & +5z & = & 2 \\ x & +y & -z & = & 4 \\ 2x & +4y & +10z & = & 8 \end{array}\right. \quad (S3)\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 12 \\ 4x & +2y & +z & = & 35 \\ 4x & -2y & +z & = & 27 \end{array}\right.$$

Exercice 8.9 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$(M1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad (M2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad (M3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 8.10 Systèmes régulier, singulier ou mal conditionné
Résoudre les systèmes suivants et les représenter graphiquement :

$$(S1)\quad \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ 0,5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,5 \end{bmatrix}$$

$$(S2)\quad \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,5 \end{bmatrix}$$

$$(S3)\quad \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ 0,5 & 1,1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\epsilon \end{bmatrix}$$

avec $\epsilon = 0$ puis $\epsilon = -0,1$.

Exercice 8.11 Exemple de système mal conditionné : rentabilité des machines à eau gazeuse
On souhaite acquérir une machine à eau gazeuse (60€). Sachant qu'il faut une recharge de gaz (12€) pour 50l et que l'eau gazeuse en bouteille se trouve à 0,26€/l, à partir de combien de bouteilles la machine sera amortie ? Même question si l'eau en bouteille coûte 0,30€/l ?

Exercice 8.12 On dispose de 12 mesures de MES (Matières En Suspension) effectuées toutes les heures dans un réseau d'assainissement pluvial lors d'un événement pluvieux :

Temps (h)	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
MES (mg/l)	100		120	160	210	180			120	90	80	70	

Combler les manques dans le tableau à l'aide d'une interpolation linéaire par morceaux et d'une extrapolation linéaire.

Exercice 8.13 Déterminer le polynôme (degré 1 ou 2) passant par les points suivants :
P1) (1.45 ; 0.034) ; (2.56 ; 0.048)
P2) (-5 ; 9.66) ; (-2 ;4.5) ; (1.9 ;10.2)
P3) (1 ;1312.05) ; (2 ;2257.34)

Rep : $P_1(x) = 0,0126x + 0,0157$; $P_2(x) = 0,46x^2 + 1,5x + 5,67$; $P_3(x) = 945,29x + 366,76$

Exercice 8.14 Interpolation des tables de Colebrook
Lors d'un écoulement dans une conduite de longueur L, on observe une perte de charge linéaire $\Delta H = jL$. La valeur de j peut être estimée par :

$$j = \lambda u^2/(2gD)$$

où le coefficient λ peut être calculé par la formule de Colebrook (équation 5.4 page 31). Pour une conduite circulaire de diamètre $D = 60$mm et un coefficient de rugosité $k = 2 \cdot 10^{-3}$, des abaques donnent :

Q(l/s)	0,51	0,95	1,45	2,03	2,49	3,06	3,56
j(m/m)	$1{,}72 \cdot 10^{-3}$	$5{,}87 \cdot 10^{-3}$	$1{,}36 \cdot 10^{-2}$	$2{,}65 \cdot 10^{-2}$	$3{,}97 \cdot 10^{-2}$	$5{,}99 \cdot 10^{-2}$	$8{,}10 \cdot 10^{-2}$

NB : Vous pouvez vérifier ces valeurs en résolvant l'équation de Colebrook par une méthode itérative
Calculer la perte de charge linéaire j dans la conduite pour un débit de 1,3l/s :

1. par une interpolation linéaire
2. par une interpolation polynomiale de degré 2.

Exercice 8.15 Chromatographie ionique
On se propose de quantifier les ions potassium et calcium présents dans un sel de régime par chromatographie ionique. Une première dissolution dans de l'eau ultra-pure donne une solution S1 qui servira au dosage des ions calcium. Pour les ions potassium, on prépare un solution S2 en diluant 20 fois S1. Une gamme étalon et les deux solutions S1 et S2 sont chromatographiées dans des conditions identiques. Sur les différents chromatogrammes obtenus, on relève les aires des pics correspondant à Ca^{++} et à K^+ :

Ca^{++}			K^+		
Solution	Conc. mg/L	Aire	Solution	Conc. mg/L	Aire
Etalon 1	10	4.2	Etalon 1	10	2.5
Etalon 2	20	8.6	Etalon 2	20	4.9
Etalon 3	50	21.4	Etalon 3	50	12.3
Etalon 4	100	43.2	Etalon 4	100	24.5
S1	?	28.6	S2	?	27.1

1. Estimer les concentrations massiques des solutions S1 et S2.
2. On dispose d'un point supplémentaire dans la gamme étalon :

Ca^{++}			K^+		
Solution	Conc. mg/L	Aire	Solution	Conc. mg/L	Aire
Etalon 5	150	46.5	Etalon 5	150	27.4

   Que peut-on en déduire ?

Exercice 8.16 Donner les matrices des applications linéaires suivantes :
1. réflexion par rapport à l'axe Oy ;
2. réflexion par rapport à l'axe Ox ;
3. réflexion par rapport à la droite $y = x$;
4. projection orthogonale sur l'axe Ox ;
5. homothétie de rapport k.

Exercice 8.17 Rotation dans le plan
1. Soit un point M (r, θ) représenté en coordonnées polaires.
   (a) Donner l'expression des coordonnées x_M et y_M de M dans le repère cartésien R en fonction de r et θ.
   (b) Le point M subit une rotation d'angle α ; exprimer les coordonnées (x_α, y_α) de M après rotation, en fonction de r, α et θ puis en fonction de x, y et α.
   (c) En déduire la matrice de rotation d'angle α
2. Quel est l'inverse de cette matrice de rotation ?
3. On considère un nouveau repère R', issu de la rotation du repère R d'un angle θ. Exprimer la matrice de passage du repère R au repère R'.

Exercice 8.18 Dilatation
Donner les coefficients de la matrice $\mathbf{M}$ qui effectue la dilatation d'un facteur k dans la direction qui fait un angle θ avec l'axe des x, aucune dilatation dans la direction orthogonale.
Chercher des vecteurs particuliers, pour lesquels la transformation correspond à une simple multiplication par un réel. Pour cela, on cherchera les solutions λ de l'équation $\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) = 0$.

Exercice 8.19 Projection oblique
Donner les coefficients de la matrice qui effectue la projection oblique d'un point sur la droite faisant un angle θ avec l'axe des x. L'angle de projection est noté ϕ (cf. Figure). Chercher des vecteurs particuliers, pour lesquels la transformation correspond à une simple multiplication par un réel.