Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur

Polytech Montpellier
STE 3

2018-2019

Carole DELENNE - Samer MAJDALANI

Table des matières

Bibliographie

Nous vous conseillons de consulter les ouvrages suivants qui sont disponibles au secrétariat STE. Le livre [1], contient dans les chapitres 1 à 4, des prérequis indispensables à la matière. Pour réviser les notions de produits scalaire et vectoriel, vous pouvez vous référer au livre [3]. Pour des applications simples à la physique, voir par exemple les livres [4] et [5]. Pour toutes les notions vues au lycée, testez vos connaissances grâce aux différents sites disponibles sur internet : [6, 7, 8].

[1] Géométrie Analytique, cours et problèmes, série Schaum, J. H. Kindle.

[2] Matrices, cours et problèmes, série Schaum, F. Ayres JR.

[3] Mathématiques 1ere S et E, Géométrie statistiques, J. Boudot, J.L. Audirac, Magnard.

[4] Physique TermS obligatoire, édition 2007, collection ESPACE, Bordas.

[5] Physique TermS obligatoire, nouvelle édition, collection Parisi, Belin.

[6] http ://xm1math.net, Mathématiques niveau lycée - logiciels libres, P. Brachet.

[7] http ://exo7.emath.fr/un.html

[8] http ://wims.unice.fr/wims/

Première partie

Analyse

FICHE

1 Différentielles / dérivées à l'ordre n de fonctions d'une variable

1.1 Rappels de cours

Différentielle

La différentielle en x_0 d'une fonction f dépendant d'une seule variable x est donnée par :

$$\mathrm{d}f(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)\mathrm{d}x = f'(x_0)\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

Développements en série de Taylor Une fonction $f(x)$ infiniment dérivable au voisinage de x_0 admet un développement en série en x_0, donné par :

$$f(x_0 + \mathrm{d}x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,(\mathrm{d}x)^n$$

où $f^{(n)}(x_0)$ est la dérivée d'ordre n de la fonction f en x_0. On parle de développement limité à l'ordre N lorsque l'on n'exprime que les $N+1$ premiers termes de la série, les termes d'ordre supérieurs étant regroupés sous la forme d'une fonction $o((\mathrm{d}x)^N)$ qui tend vers zéro plus vite que $(\mathrm{d}x)^N$.

1.2 Exercices de TD

Exercice 1.1 Estimation de la valeur de e.
La fonction exponentielle est définie comme la fonction égale à sa dérivée et qui passe par 1 en zéro : $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$. A l'aide d'un développement limité de la fonction exponentielle au voisinage de $x = 0$, estimer la valeur de $f(1) = e$.

Exercice 1.2 Théorème du point fixe
Démontrer le théorème suivant :

Théorème :
Soit f une fonction dérivable de fonction dérivée f' continue sur un intervalle I contenant un point fixe x_{sol} de f (c'est-à-dire $f(x_{\mathrm{sol}}) = x_{\mathrm{sol}}$) et telle que $\left|f'(x)\right| < 1 \forall x \in I$, alors la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers x_{sol} dès que x_0 est choisi dans I.

Indice : définir l'erreur e_n à chaque étape et réaliser un développement limité à l'ordre 1 de $f(x_n + e_n)$.

Exercice 1.3 Méthode de Newton
Soit une fonction $f(x)$ dont on cherche la racine x_{sol} vérifiant $f(x_{\mathrm{sol}}) = 0$

1. Soit un point x_0 ; donner l'équation de la tangente $T(x)$ à $f(x)$ en x_0.
2. Calculer l'intersection x_1 de la droite $T(x)$ avec l'axe des abscisses en fonction de x_0.
3. Montrer que la suite (x_n) définie par la question 2 peut converger vers la solution x_{sol} de $f(x) = 0$ et donner la condition de convergence (utiliser le développement en série à l'ordre 2 de $f(x_{n+1})$).

1.3 Exercices d'entraînement

Exercice 1.4 Equations de droite
La notion de droite doit absolument être maitrisée, si ce n'est pas le cas, voir par exemple le chapitre 3 du livre [1]. Concernant la tangente, voir le chapitre 10 du même ouvrage. Déterminer l'équation de la droite :

1. passant par $A(-2;1)$ et $B(3;-1)$. (Rep. $y = -2x/5 + 1/5$)

2. de pente $2/3$ passant par le point $A(-4,5)$. (Rep. $3y = 2x + 23$)
3. passant par les deux points $A(3,-1)$ et $B(0,6)$. (Rep. $y = -7/3x - 6$)
4. équidistante des droites $x + 5 = 0$ et $x - 2 = 0$. (Rep. $2x + 3 = 0$)
5. passant par $A(-3;-2)$ et perpendiculaire à $y = 2x - 1$. (Rep. $2y = -x - 7$)
6. passant par $A(2,-1)$ et perpendiculaire à la droite passant par $C(4,3)$ et $D(-2,5)$. (Rep. $y = 3x + 5$)

Exercice 1.5 Inclinaison et pente d'une droite

Trouver la pente a et l'angle d'inclinaison θ des droites passant par les deux points suivants (faire un schéma) :

1. $A(-8,-4)$ et $B(5,9)$. (Rep. $a = 1$, $\theta = 45°$)
2. $A(10,-3)$ et $B(14,-7)$. (Rep. $a = -1$, $\theta = 135°$)
3. $A(-11,4)$ et $B(-11,10)$. (Rep. $a = \infty$, $\theta = 90°$)
4. $A(8,6)$ et $B(14,6)$. (Rep. $a = 0$, $\theta = 0°$)

Exercice 1.6 Développements limités

1. Retrouver le développement limité en zéro à l'ordre n de la fonction $\sin(x)$. Sur un logiciel de graphique (tel que Quick Graph, gratuit sur l'ipad), tracer la fonction $\sin(x)$ et ses développements limités successifs jusqu'à $n = 7$.
2. Même question pour d'autres fonctions classiques telles que cosinus, exponentielle, logarithme.
3. Même question pour la fonction polynomiale : $P(x) = 3x^5 + 6x^3 - x^2 + 10x - 20$; commenter.

Exercice 1.7 Equation de la tangente

1. Déterminer l'équation de la tangente à $f(x)$ en x_0.
2. En quel point la tangente coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

FICHE

2 Méthodes numériques de recherche de racine

2.1 Rappels de cours

Principe de base : avoir une idée de la solution (*e.g.* on ne cherche pas une hauteur d'eau négative !)

Méthode de dichotomie

On cherche la solution de $f(x) = 0$ dans un intervalle $[a, b]$ tel que $f(a)f(b) < 0$ (l'intervalle contient une racine). On pose $c = (a + b)/2$. Si $f(a)f(c) < 0$ alors c devient b sinon, c devient a. On itère jusqu'à ce que $f(c)$ soit proche de zéro.

Méthode du point fixe

On cherche à résoudre l'équation $f(x) = x$. On choisi un point de départ x_0 et on calcule $x_1 = f(x_0)$ jusqu'à ce que $x_i \approx x_{i+1}$ (NB : la convergence n'est pas garantie *cf.* exercice 1.2).

Méthode de Newton

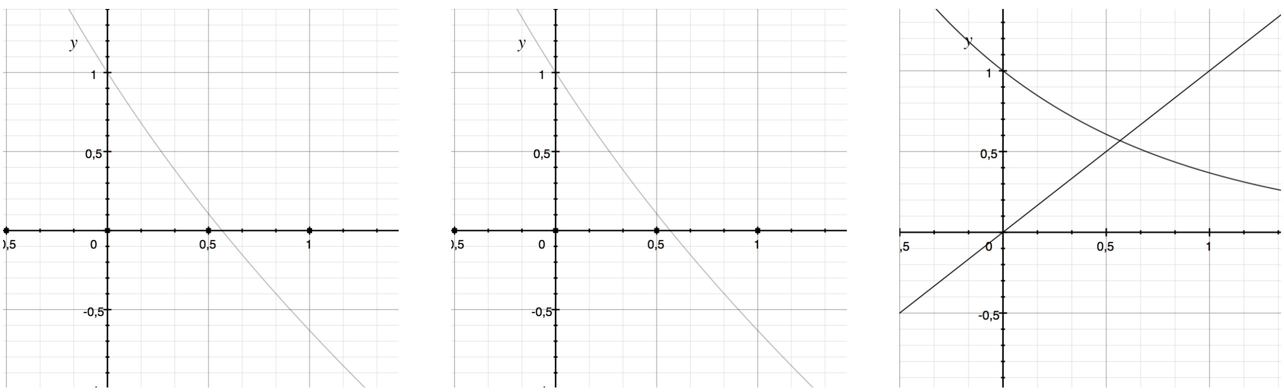
Sous certaines conditions (*cf.* exercice 1.3) la suite suivante converge vers la solution de $f(x) = 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.1}$$

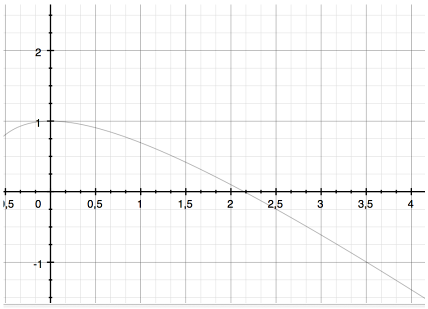
2.2 Exercices de TD

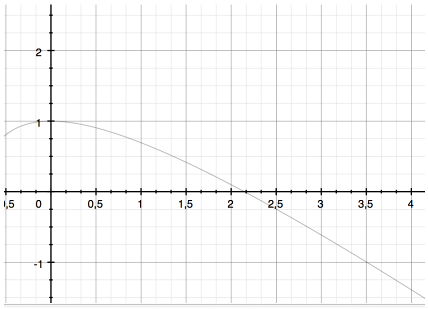
Exercice 2.1 Interprétation graphique des méthodes de recherche de racine
On cherche la solution de l'équation $f(x) = 0$. Représenter graphiquement (sans calcul) les étapes des méthodes de dichotomie, Newton et point fixe, pour les fonctions suivantes :

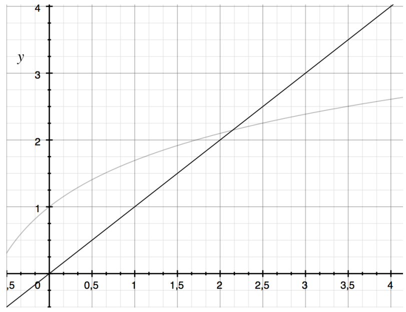
— $f_1(x) = e^{-x} - x$.



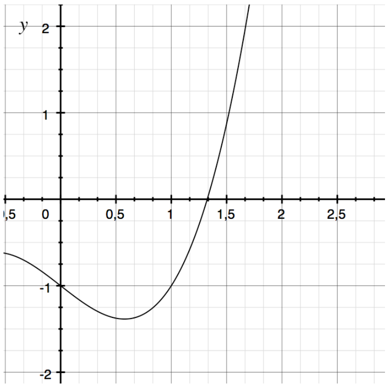
— $f_2(x) = \ln(x+1) - x + 1 = 0$ (racine positive).

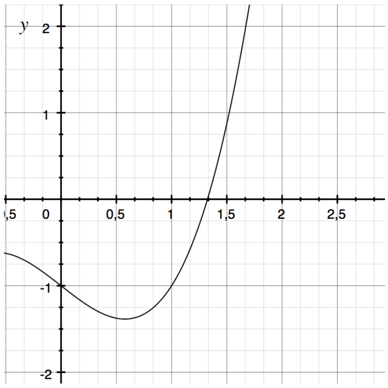


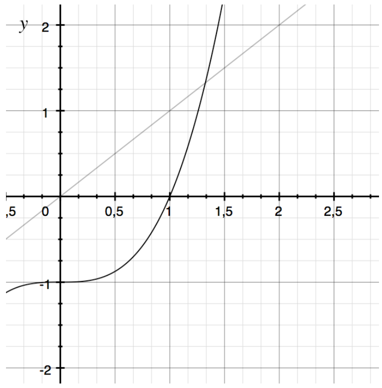




— $f_3(x) = x^3 - x - 1 = 0$.







Exercice 2.2 Calcul de la perte de charge linéaire dans une conduite.
La perte de charge linéaire le long d'une conduite circulaire de diamètre D peut s'écrire : $j = \lambda V^2/2gD$, où V est la vitesse de l'écoulement et λ est un coefficient qui peut être estimé par la formule de Colebrook (1939) :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right) \tag{2.2}$$

avec k le coefficient de rugosité et R_e le nombre de Reynolds : $R_e = VD/\nu$ où ν est la viscosité cinématique.
Résoudre l'équation 2.2 par la méthode qui vous paraît la plus adaptée et en déduire j, avec $D = 250$ mm ; $k = 1,5$ mm ; $Q = 0,015$ m^3/s ; $\nu = 1 \cdot 10^{-6}$ m^2/s.

Exercice 2.3 Calcul de la hauteur critique dans un canal
Soit un canal trapézoïdal de largeur à la base $B_0 = 2$m, de pente de berge 1/1 et transitant un débit $Q = 10\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$.
La hauteur critique h_c est définie telle que le nombre de Froude est égal à 1, soit :

$$\frac{Q^2 B}{g S^3} = 1$$

où B est la largeur au miroir et S la surface mouillée.
Ecrire l'équation vérifiée par h_c et la résoudre par la méthode de Newton.

2.3 Exercices d'entraînement

Exercice 2.4 Comparaison des méthodes de recherche de racine.
On cherche la solution de l'équation $f(x) = 0$ avec $f(x) = e^{-x} - x$. Sachant que la solution appartient à l'intervalle [0 ;1], résoudre le problème par les méthodes de dichotomie, point fixe, Newton et comparez la rapidité de convergence.

Exercice 2.5 Calculer l'intersection entre les fonctions f et g suivantes :

1. $f(x) = x^2 + 3x + 5$; $g(x) = x^3 + 6x - 3$
2. $f(x) = 3x^2 + 5x - 20$; $g(x) = 2\,|x| + 6x - 3$ (trouver les 2 solutions)
3. $f(x) = 2\,|x|\,x + 1$; $g(x) = 3x + 5$

Rep : 1) $x_{sol} \in [1,8;1,81]$; 2) $x_1 \in [-2,56;-2,55]$ $x_2 \in [2,93;2,94]$; 3) $x_{sol} \in [2,35;2,36]$

Exercice 2.6 Equation de la charge
En hydraulique à surface libre, dans un canal de section rectangulaire, l'équation de la charge peut s'écrire :

$$H = y + z + \frac{Q^2}{2g(yb)^2} \tag{2.3}$$

où y est la hauteur d'eau, z la cote du fond et b la largeur du canal. Dans un canal dont la cote du fond et la largeur peuvent varier, on souhaite connaître la hauteur d'eau en un point A inaccessible. On effectue donc des mesures en un point B, accessible, qui permettent de connaître la charge H_B en ce point. En supposant le régime permanent et que la perte de charge entre les points A et B peut être négligée, en déduire la hauteur d'eau y_A en A, à l'aide des trois méthodes itératives vues dans ce chapitre. Laquelle de ces méthodes vous paraît la plus appropriée dans ce cas ?
Valeurs numériques : $H_B = 0,8\,\mathrm{m}$, $z_A = 0\,\mathrm{m}$, $Q = 0,5\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$, $b = 1\,\mathrm{m}$.

Exercice 2.7 Estimation de $\sqrt{2}$.

1. En utilisant une méthode de recherche de racine, retrouver une estimation à 4 chiffres après la virgule de $\sqrt{2}$ (solution de l'équation $x^2 - 2 = 0$).
2. Donner l'expression du développement limité de $\sqrt{x_0 + \mathrm{d}x}$ et en déduire une estimation de $\sqrt{2}$ à 4 chiffres après la virgule.

FICHE

3 Différentielles de vecteurs

3.1 Rappels de cours

Définition

La définition de la dérivée peut s'appliquer à un vecteur $\vec{v}(t)$ dépendant d'une variable t :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

La dérivée d'un vecteur est un vecteur.

Interprétation graphique : soit un point M de l'espace, décrivant une trajectoire M(t) (et donc une courbe paramétrique), la dérivée du vecteur $\vec{\mathrm{OM}}(t)$ est le vecteur tangent à la courbe.

Dérivée par rapport au temps des systèmes de coordonnées
Coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e_x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{e_y}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{e_z}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \tag{3.1}$$

Coordonnées cylindriques/polaires :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t} &= +\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e_\theta} \\ \frac{\mathrm{d}\vec{e_\theta}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e_r} \\ \frac{\mathrm{d}\vec{e_z}}{\mathrm{d}t} &= \vec{0} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Vitesse et accélération Le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur position par rapport au temps et le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps (voir l'aide mémoire pour les expressions en coordonnées cartésiennes et cylindriques) :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{OM}}{\mathrm{d}t} \tag{3.3}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{OM}}{\mathrm{d}t^2} \tag{3.4}$$

3.2 Exercices de TD

Exercice 3.1 Un point M est repéré dans le plan par ses coordonnées cartésiennes (x, y).

1. Donner l'expression du vecteur position $\vec{\mathrm{OM}}$ selon les vecteurs unitaires $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$.
2. Le point M est soumis à un déplacement infinitésimal $\mathrm{d}\vec{\mathrm{M}}$. Donner
   (a) l'expression du déplacement et de sa norme
   (b) l'aire balayée par le segment $[OM]$ durant le déplacement infinitésimal
   (c) les expressions de la vitesse et de l'accélération du point M
3. Mêmes questions en coordonnées polaires, pour lesquelles les vecteurs unitaires $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ varient lorsque le point se déplace.

Exercice 3.2 Un point M décrit une trajectoire dans le plan. Il est repéré en coordonnées polaires par $\vec{OM} = r\vec{e_r}$ avec :

$$r = r_0 \cos(2\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

où r_0 est une constante.

1. Déterminer le vecteur tangent à la courbe aux points remarquables ($\theta = k\pi/4, k \in N$). En déduire la forme de la courbe.
2. Déterminer l'aire délimitée par cette courbe.

3.3 Exercices d'entraînement

Revoir les chapitres 1-4, 8 et 9 du livre [1].

Exercice 3.3 Faire un schéma explicatif de la formule (3.2).

Exercice 3.4 Déterminer les vecteurs vitesse et accélération d'un point M repéré par ses coordonnées $(x, y, z)(t)$ dans un système cartésien.

Exercice 3.5 Dans le repère cylindrique/polaire la position est donnée par $\vec{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$ où le vecteur $\vec{e_r}$ est variable dans le temps (en fonction de l'angle θ). En déduire les vecteurs vitesse et accélération du point M.

Exercice 3.6 En coordonnées polaire, utiliser la formule du cosinus pour répondre aux questions suivantes. Ne pas oublier de faire un schéma !

1. donner la distance du point $P_1(r_1, \theta_1)$ au point $P_2(r_2, \theta_2)$.
2. trouver l'équation du cercle de centre (r_1, θ_1) et de rayon a.
3. trouver l'équation du cercle de centre $(a, 0°)$ et de rayon a.

Exercice 3.7 Trouver l'équation de chacun des cercles suivants :

1. de centre $(3, 0°)$, passant par le pôle (point (0,0)).
2. de centre $(4, 45°)$, passant par le pôle.
3. de centre $(5, 90°)$, passant par le pôle.
4. assant par le pôle, par $(3, 90°)$ et $(4, 0°)$.

Rép. 1 : $r = 6\cos\theta$ *; 2 :* $r = 8\cos(\theta - 45°)$ *; 3 :* $r = 10\sin\theta$ *; 4 :* $r = 4\cos\theta + 3\sin\theta$

Exercice 3.8 Courbe paramétrée en coordonnées polaires
On considère la courbe suivante en coordonnées polaires : $\vec{OM} = r\vec{e_r}$ avec

$$r = \cos(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

1. Déterminer le vecteur tangent à la courbe aux points remarquables ($\theta = k\pi/4, k \in N$). En déduire la forme de la courbe.
2. Déterminer l'aire délimitée par cette courbe.

Exercice 3.9 Courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes
On considère la courbe suivante en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = \cos(3t) \\ y = \sin(t) \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$$

1. Déterminer le vecteur tangent à la courbe aux points remarquables ($t = k\pi/4, k \in N$). En déduire la forme de la courbe.
2. Déterminer l'aire délimitée par cette courbe.

FICHE

4 Dérivées partielles et dérivée totale

4.1 Rappels de cours

Si f dépend de plusieurs variables $(x_1, .., x_n)$, une dérivée partielle, notée ∂ est la dérivée de f par rapport à une variable x_i, **toutes les autres étant gardées constantes**. La différentielle de f est alors :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \tag{4.1}$$

La **dérivée totale** par rapport à la variable x_i est

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}x_i} \tag{4.2}$$

Application au calcul d'incertitude (approche physique)

Soit une fonction f dépendant de paramètre $a, b, c \ldots$ que l'on mesure avec incertitude $a \pm \Delta a, \ldots$ On utilise la définition de la différentielle pour estimer l'incertitude totale de f en fonction des incertitudes de chaque paramètre :

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| \Delta b + \ldots$$

NB : l'erreur de mesure pouvant être positive ou négative, on se place dans le cas le plus défavorable en prenant la valeur absolue des dérivées partielles.

Application à la description du mouvement

On considère un point $\mathrm{M}(x, y, z)$ de l'espace et une variable $f(x, y, z, t)$ liée à ce point.

Approche Eulérienne : l'observateur est en un point fixe de l'espace et la dérivée de la variable par rapport au temps est une dérivée partielle : $\partial f/\partial t$.

Approche Lagrangienne : l'observateur se déplace en même temps que le point (*cf.* observateur dans le train *vs* hors du train). Au cours d'une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$, il se déplace de $\mathrm{d}x = u\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = v\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}z = w\mathrm{d}t$, et observe une variation $\mathrm{d}f$ de la variable, qui est par définition des dérivées partielles :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{4.3}$$

On retrouve alors la dérivée totale $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ appelée dans le cas de la description du mouvement, *dérivée Lagrangienne* ou *dérivée particulaire*

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}$$

4.2 Exercices de TD

Exercice 4.1 Un randonneur marche sur un relief dont la cote z peut être représentée dans un repère cartésien par :

$$z(x, y) = \frac{1}{2}\left(-x^3 + xy + \cos(y) + x\right) \quad (x, y) \in [-1; 1] \times [-1; 1]$$

où x, y et $z(x, y)$ sont en km, x représente la direction Ouest/Est et y la direction Sud/Nord.

1. Partant du point de coordonnées (-1,-1), le randonneur se déplace vers l'Est à la vitesse constante u. Donner l'expression de
   (a) la pente que gravit le randonneur en fonction de x.
   (b) sa vitesse verticale.
2. Arrivé au point (1,-1), il décide de partir plein Nord à la vitesse constante v. Mêmes questions qu'en 1.
3. Arrivé au point (1,1) il repart vers le sud/ouest à la vitesse (u, v). Quelle est la condition sur u et v et sur x et y pour que le randonneur passe par (0,0) ? En déduire sa vitesse verticale.

Exercice 4.2 Transport et dégradation
Un contaminant se dégrade au fur et à mesure de son avancée dans un système lagunaire. Sous certaines conditions, l'évolution de la concentration C du contaminant en fonction du temps et de l'espace peut être représentée en une dimension par l'équation

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} + u\frac{\partial C(x,t)}{\partial x} = -kC(x,t)$$

où k est un coefficient de dégradation. Résoudre cette équation pour les conditions initiale et à la limite suivantes :

$$\begin{aligned} C(x,0) &= 0 \ \forall\ x \\ C(0,t) &= C_0 \ \forall\ t \end{aligned}$$

4.3 Exercices d'entraînement

Faire les exercices des livres [4], chapitre 9 et [5], chapitre 7

Exercice 4.3 On mesure une pièce à rénover. Longueur : $L = 5.4 \pm 0.05$m, largeur : $l = 3.55 \pm 0.05$m et hauteur $h = 2.25 \pm 0.05$m. Calculer, en précisant l'incertitude associée :

1. la longueur des plinthes (=périmètre de la pièce) ;
2. la surface de mur à peindre ;
3. la surface de sol à carreler.

Exercice 4.4 Le rayon d'une sphère est $r = 10 \pm 0.08$ cm. Calculer sa surface et son volume.

Exercice 4.5 Pour chacune des fonctions f suivantes :

$$f_1 = xe^y + yz \quad f_2 = \cos x + y^3z^2 + 3 \quad f_3 = \ln x + z/y - z^3$$

1. Donner l'expression des dérivées partielles de f en fonction de x, y et z.
2. Donner l'expression de la dérivée totale de f par rapport au temps si les coordonnées x, y et z varient en fonction du temps.

Exercice 4.6 Exprimer la différentielle totale du volume d'un cylindre de rayon r et hauteur h

Exercice 4.7 Un tube plein de diamètre 1.62 ± 0.03 cm et de hauteur 3.44 ± 0.05 cm a une masse de $23.2 \pm 0.1g$. Calculer son volume et sa masse volumique.

FICHE

5 Opérateurs différentiels

5.1 Rappels de cours

Gradient :

Soit f une fonction de l'espace : $f(M)$ avec $M(x, y, z, t)$. Si le point M se déplace d'un vecteur infinitésimal $\mathrm{d}\vec{M}$, la fonction f varie d'une quantité infinitésimale $\mathrm{d}f$. Le gradient vérifie, de façon indépendante du système de coordonnées :

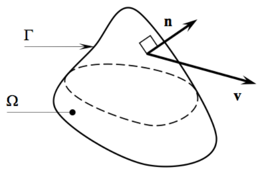
$$\mathrm{d}f = \vec{\mathrm{Grad}} f \cdot \mathrm{d}\vec{M} \tag{5.1}$$

Remarque : si $\mathrm{d}\vec{M}$ est un vecteur unitaire, $\mathrm{d}f$ est la dérivée directionnelle de f dans la direction $\mathrm{d}\vec{M}$.
Le gradient de f est orthogonal aux lignes d'isovaleur de f.

Divergence :

La divergence d'un vecteur $\vec{v}$ vérifie le théorème de Green-Ostrogradski, sur un volume Ω de frontière Γ et de vecteur normal $\vec{n}$:

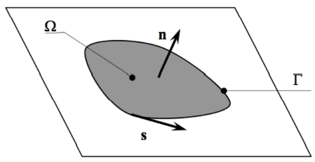
$$\int_\Omega \mathrm{Div}\vec{v}\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \vec{v} \cdot \vec{n}\mathrm{d}\Gamma \tag{5.2}$$



Rotationnel :

On considère dans l'espace une portion de surface plane Ω de frontière (contour) Γ et de vecteur normal unitaire $\vec{n}$. Le vecteur unitaire tangentà Γ est noté $\vec{s}$. Le rotationnel d'un champ vecteur $\vec{v}$ vérifie :

$$\int_\Omega \left(\vec{\mathrm{Rot}}\vec{v}\right) \cdot \vec{n}\mathrm{d}\Omega = \oint_\Gamma \vec{v} \cdot \vec{s}\mathrm{d}\Gamma \tag{5.3}$$



Laplacien :

Le Laplacien d'une fonction scalaire f de l'espace est la divergence du gradient de cette fonction

$$\Delta f = \mathrm{Div}\left(\vec{\mathrm{Grad}} f\right) \tag{5.4}$$

En coordonnées cartésiennes :

On défini l'opérateur **Nabla** par :

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{5.5}$$

Le gradient d'une fonction f est le vecteur $\vec{\nabla} f$ (application de l'opérateur Nabla à la fonction)

$$\vec{\nabla} f(x, y, z, t) = \vec{\mathrm{Grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z} \tag{5.6}$$

La divergence d'un vecteur $\vec{v}$ est le **produit scalaire** de l'opérateur Nabla et du vecteur.

$$\mathrm{Div}\vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{5.7}$$

Le rotationnel d'un vecteur $\vec{v}$ est le **produit vectoriel** de l'opérateur Nabla et du vecteur.

$$\vec{\mathrm{Rot}}\vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right]\vec{e_x} + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right]\vec{e_y} + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right]\vec{e_z} \tag{5.8}$$

Le Laplacien est la divergence du gradient

$$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{5.9}$$

5.2 Exercices de TD

Exercice 5.1 On considère les champs de vitesse suivants :

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} ky \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v_2} = \begin{bmatrix} ay \\ ax \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour chacun de ces deux champs :

1. Représenter graphiquement le champ de vecteurs.
2. Déterminer les expressions de la divergence et du rotationnel de $\vec{v}$.
3. Existe-t-il un champ potentiel ϕ dont $\vec{v}$ est le gradient ?

Exercice 5.2 On considère le champ de vitesse suivant :

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Quelle est la symétrie du problème ? (faire un graphique)
2. Calculer la divergence de $\vec{v}$.
3. On considère un domaine Ω du plan, qui contient le point $(0,0)$; d'après l'équation (5.2) que peut-on dire de l'intégrale de la divergence sur le domaine Ω ?

5.3 Exercices d'entraînement

Exercice 5.3 Gradient
A partir de l'équation (5.1), retrouver l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes et polaires.
Indice : écrire l'expression du vecteur déplacement dans le système de coordonnées, puis écrire la définition générale du gradient et identifier les expressions dans chacune des directions de l'espace. Faire tendre le déplacement vers zéro et introduire la définition de la dérivée.

Exercice 5.4 Divergence
A partir de l'équation (5.2), retrouver l'expression de la divergence en coordonnées cartésiennes et polaires.
Indice : définir un domaine infinitésimal élémentaire ($\mathrm{d}x \times \mathrm{d}y$ en coordonnées cartésiennes, $\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta$ en coordonnées polaires) et lui appliquer la définition générale de la divergence. Puis faire tendre les dimensions du domaine vers zéro, ce qui permettra d'introduire la définition de la dérivée.

Exercice 5.5 Rotationnel
Reprendre l'exercice ci-dessus pour le rotationnel en utilisant la définition générale donnée par l'équation (5.3).

Exercice 5.6 Calculer le gradient des fonctions suivantes :

1. $f_1 = 2x^3 + xy^2 + z\sin x$
2. $f_2 = e^y(z + 3x^2)$
3. $f_3 = \frac{2z^2}{x+y}$

Exercice 5.7 Donner l'expression de la divergence et du rotationel des champs de vecteurs suivants (en coordonnées cartésiennes)

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} -ay \\ ax \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \vec{v_2} = \begin{bmatrix} ax \\ ay \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \vec{v_3} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\begin{bmatrix} ax \\ ay \\ az \end{bmatrix}$$

FICHE

6 Recherche d'optimum - Régression

6.1 Rappels de cours

Extremum

- Le nombre $f(c)$ est un maximum (*resp.* minimum) local de la fonction f s'il existe un intervalle I contenant c tel que $f(x) \leq f(c)$ (*resp.* $f(x) \geq f(c)$) pour tout x dans I. Si I est l'ensemble du domaine de définition de f alors $f(c)$ est un extremum global (ou absolu).
- Si $f(c)$ est un extremum local et si f est dérivable en c alors $f'(c) = 0$ (*i.e.* c est un point critique de f). *N.B : La réciproque n'est pas vraie.*
- Soit c un point critique de f sur I ; si $f''(c) > 0$ (*resp.* $f''(c) < 0$) la valeur critique $f(c)$ est un minimum (*resp.* maximum) local.

Regression / approximation

A partir de n points de mesure (x_i, y_i) sur un intervalle $[a, b]$, on souhaite déterminer une fonction $y = f(x; a)$, où a est un paramètre de la loi, qui permettra d'estimer la valeur de y pour un x quelconque (*cf.* "ajouter une courbe de tendance" ou "droitereg" sous Excel). L'ajustement du paramètre a se fait en le faisant varier de manière à minimiser l'écart entre la fonction $f(x)$ et les n points expérimentaux, généralement estimé par une fonction distance :

$$S_p = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i; a) - y_i|^p \tag{6.1}$$

NB : si $p = 2$ on parle d'ajustement "aux moindres carrés" (S_2 est le carré de la distance euclidienne dans l'espace de dimension n).
Minimiser S_p revient à déterminer a tel que la dérivée de S_p par rapport à a est nulle. Dans le cas où plusieurs paramètres doivent être déterminés, il faut que les dérivées partielles de S_p par rapport à chacun des paramètres soient nulles.

6.2 Exercices de TD

Exercice 6.1 On dispose de n points de mesure (x_i, y_i) que l'on souhaite approcher par une loi linéaire : $f(x) = ax$.

1. Donner l'expression de a pour un ajustement aux moindres carrés.
2. Que faudrait-il faire pour ajuster une loi du type $f(x) = ax + b$?

Exercice 6.2 Vidange de réservoir
La loi de vidange d'un réservoir cylindrique peut s'écrire $Q = \alpha\sqrt{H}$. Déterminer le coefficient α par régression à partir des mesures suivantes :

1. directement sur la fonction $\alpha\sqrt{H}$
2. en utilisant la fonction ln pour linéariser le problème (comme le fait Excel)

$H(m)$	1,56	1,32	1,06	0,78	0,45	0,28	0,12	0,07	0
$Q(l/s)$	1,67	1,5	1,24	1,08	0,95	0,73	0,5	0,4	0

Exercice 6.3 Coefficient de perte de charge linéaire en conduite.
La perte de charge linéaire dans une conduite de longueur L et de diamètre D peut s'écrire en fonction de la vitesse u :

$$\Delta H = jL = \lambda \frac{u^2 L}{2gD} \tag{6.2}$$

Le coefficient λ peut être estimé par la formule de Colebrook (équation 2.2 page 12) mais cette formule nécessite la valeur de rugosité de la conduite, difficile à estimer. On réalise donc une série de mesures de perte de charge en fonction du débit (cf TP d'hydraulique), dans une conduite de diamètre $D = 60$mm et de longueur $L = 6$m :

$Q(l/s)$	0	0,95	1,45	2,03	2,49	3,06
$\Delta H(m)$	0	0,027	0,059	0,12	0,18	0,23

On souhaite estimer le coefficient λ pour la conduite, en réalisant une approximation polynomiale de la perte de charge en fonction du débit :

- Quelles hypothèses peut-on faire sur le polynôme ?
- Déterminer le polynôme et en déduire la valeur de λ.

6.3 Exercices d'entraînement

Exercice 6.4 Soit un rectangle de dimensions $L \times l$ et de périmètre P. Si P est fixé, déterminer les valeurs de L et l telles que l'aire soit maximale ?

Exercice 6.5 Rechercher les points critiques et déterminer leur nature (maximum local, minimum local, col) pour les fonctions f définies ci-dessous

$$f_1(x) = 4(x-3)^2 + e^{-x} \qquad f_2(x) = (x-1)^3 - x^2 \qquad f_3 = (x-1)^3$$

Exercice 6.6 Soit la fonction

$$f(x) = ax^3 - 3x^2 + 3x$$

existe-t-il une valeur de a pour laquelle f admette un extremum en $x = 1$?

Exercice 6.7 [1]Un serpent long de 49 cm tourne autour d'un carré de 40cm de côté. Quelle est la distance minimale et la distance maximale séparant sa queue de sa tête ? (considérer deux cas en fonction de la position de sa tête).

Exercice 6.8 Dimensionnement d'un réservoir.
On souhaite dimensionner un réservoir cylindrique fermé de volume V fixé. On note R le rayon du réservoir et h sa hauteur. Déterminer la valeur de R_m pour que la surface totale du réservoir soit minimale. En déduire le rapport h_m/R_m.
Astuce : exprimer la hauteur h en fonction de V et R puis la surface S en fonction de V et R.

1. Exercice issu du livre *Mathématiques Générales* de Jacques Vélu.

FICHE

7 Intégration / Equations différentielles ordinaires

7.1 Rappels de cours

EDO du premier ordre, linéaire à coefficients variables et avec second membre :

$$\text{(E1)} \quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + a(x)f(x) = b(x) \quad \text{ou} \quad y' + ay = b \tag{7.1}$$

avec a et b variables. Les solutions de (E1) sont données par la somme des solutions de l'équation homogène (sans second membre) et d'une solution particulière. Pour déterminer une solution unique, il faut disposer d'une condition à la limite ou initiale (généralement pour $x = 0$).

Solution de l'équation homogène :

$$f_0(x) = Ke^{-A(x)}$$

où K est une constante et $A(x)$ est une primitive de la fonction $a(x)$ (si a est contant, on retrouve $A = ax$).
Solution particulière : Méthode de variation de la constante. On cherche une solution particulière de la forme : $k(x)e^{-A(x)}$ (on fait varier la constante), en reportant dans (7.1), on obtient une équation sur k

$$\frac{\mathrm{d}k(x)}{\mathrm{d}x} = b(x)e^{A(x)}$$

Si B une primitive de $b(x)e^{A(x)}$ et C une nouvelle constante, $k(x)$ s'exprime sous la forme $k(x) = B(x) + C$ et

$$f(x) = (B(x) + C)e^{-Ax}$$

où C est une constante quelconque. Pour trouver C il faut une condition initiale.

Méthode de séparation des variables

Si la fonction à intégrer s'écrit sous la forme d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre telle que :

$$\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} = g(x)h(u(x)) \tag{7.2}$$

tant que $h(u) \neq 0$, on peut écrire :

$$\frac{\mathrm{d}u}{h(u)} = g(x)\mathrm{d}x \tag{7.3}$$

On intègre ensuite les deux membres :

$$\int \frac{1}{h(u)}\mathrm{d}u = \int g(x)\mathrm{d}x \tag{7.4}$$

Applications en cinématique (cf mécanique des fluides)

On défini la **trajectoire** comme l'ensemble des positions $(x, y, z)(t)$ occupées par M au cours du temps. L'équation de la trajectoire est donnée par les 3 équations suivantes, satisfaites simultanément :

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 + \int_{t=0}^{t} u(x,y,z,t)\mathrm{d}t \\ y(t) &= y_0 + \int_{t=0}^{t} v(x,y,z,t)\mathrm{d}t \\ z(t) &= z_0 + \int_{t=0}^{t} w(x,y,z,t)\mathrm{d}t \end{cases} \tag{7.5}$$

La **ligne de courant** est la courbe issue du point M dont la tangente est parallèle au vecteur vitesse en tout point. Par définition :

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{u(x,y,z;t)} = \frac{\mathrm{d}y(t)}{v(x,y,z;t)} = \frac{\mathrm{d}z(t)}{w(x,y,z;t)} \tag{7.6}$$

La **ligne d'émission** est la ligne formée par les particules qui sont passées au cours du temps par un point M donné et qui ont été transportées à la vitesse de l'écoulement.

7.2 Exercices de TD

Exercice 7.1 Lois de Kepler et Modèle gravitationnel de Newton
Dans ce problème, vous allez reconstituer le raisonnement de Newton sur le modèle de gravitation universelle (1687) et démontrer les 3 lois empiriques de Kepler, publiées entre 1609 et 1618 :

1. Les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers.
2. Le rayon vecteur reliant le centre de la planète au foyer décrit des aires égales en des temps égaux.
3. Les cubes des demi-grand axes des orbites sont proportionnels au carré des périodes de révolution.

Les principes de Newton sont :

1. Force gravitationnelle : deux corps de masses m_1 et m_2 s'attirent par une force inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.
2. Principe d'inertie : un corps soumis à aucune force est soit au repos soit en mouvement rectiligne uniforme.
3. Principe Fondamental de la dynamique : une force $\vec{F}$ appliquée à un corps pendant un temps dt change sa quantité de mouvement de $\mathrm{d}(m\vec{v}) = \vec{F}\mathrm{d}t$.
4. Principe de l'action et de la réaction : $\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$

Pour répondre à ce problème, on considère un point M (une planète) qui se déplace dans un plan repère en coordonnées polaires (origine O : le soleil). On définit la vitesse aréolaire comme l'aire balayée par le segment OM par unité de temps (cf. Figure).

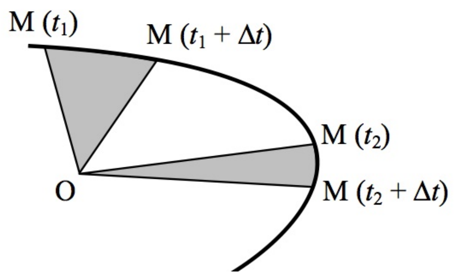


FIGURE 7.1 – Vitesse aréolaire constante pour un point soumis à une force centrale (les deux aires grisées sont égales et sont balayées pendant une même durée Δt).

1ere loi. Montrer que la vitesse aréolaire est constante, i.e. que 2 aires ballayées en un même laps de temps sont les mêmes.

2eme loi. A l'aide du principe fondamental de la dynamique, montrer que M est soumis à une force colinéaire à $\vec{OM}$. Montrer que, si cette force est proportionnelle à l'inverse du carré de la distance OM et dirigée vers O, le point M décrit une conique de foyer O. Pour cela, il faut établir une équation différentielle où la variable indépendante est θ et non le temps. Rappel (ou non) : en coordonnées polaires, une conique a pour équation :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \tag{7.7}$$

où θ est l'angle par rapport à la direction (OP), P étant le périhélie (point le plus proche du foyer).

3eme loi. En supposant en première approximatoin que le mouvement est circulaire de vitesse angulaire constante, démontrer que $T^2 = cr^3$.

Exercice 7.2 Cinétique de dégradation d'ordre 1.
Dans une station d'épuration, un contaminant dans l'eau usée peut se dégrader à une vitesse proportionnelle à sa concentration ; il existe donc une constante k (coefficient de dégradation) telle que

$$\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} = -kC(t) \tag{7.8}$$

1. Donner l'expression de $C(t)$ en fonction de C_0, la concentration initiale de contaminant dans le système

2. Il existe deux constantes intéressantes pour caractériser la solution :
   (a) le temps caractéristique $\tau = 1/k$. Si (T) désigne la tangente à l'origine de la courbe de concentration $C(t)$, montrer que le temps caractéristique τ est l'abscisse du point d'intersection de la droite (T) avec l'axe du temps.
   (b) la période de demi-vie : au bout de laquelle la moitié du contaminant s'est dégradée. Exprimer cette période, notée $T_{1/2}$ en fonction de τ.

Exercice 7.3 Chaîne de dégradation
On considère le processus de dégradation suivant : un composé A se transforme par dégradation en un nouveau composé B. Les concentrations A et B des composés A et B obéissent aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = & -k_1 A^p \\ \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = & k_1 A^p - k_2 B^p \end{cases} \qquad \begin{cases} A(t=0) = & A_0 \\ B(t=0) = & 0 \end{cases} \tag{7.9}$$

où A_0 est la concentrations initiale en composé A, k_1 et k_2 les constantes de dégradation (positives) et $p \geq 0$ est l'ordre de la cinétique. A_0, k_1, k_2 et p sont connues.

1. Dans le cas où $k_2 = 0$ et p est quelconque
   (a) Quelle est la masse totale de composés A et B dans le système ?
   (b) Déterminer les solutions analytiques $A(t)$ et $B(t)$ pour tout t, en fonction de la valeur de p
2. Dans le cas où $k_2 \neq 0$ et $p = 1$
   (a) Déterminer les solutions analytiques $A(t)$ et $B(t)$ pour tout t
   (b) Que se passe-t-il si $k_1 = k_2$?

Exercice 7.4 Chute d'une goutte d'eau dans le brouillard.
Une goutte d'eau, supposée sphérique, tombe à l'intérieur d'une zone de brouillard. A la date $t = 0$, son altitude est z_0 et sa vitesse est nulle ; son rayon initial est r_0. On considère $\vec{g}$ vertical et uniforme. La masse de la goutte n'est pas constante : en tombant, elle grossit en capturant la vapeur d'eau environnante. On supposera que le volume d'eau capturée par unité de temps est proportionnel à la surface de la goutte (on utilisera une constante de proportionnalité k), et qu'il se répartit de façon uniforme sur toute sa surface. Autrement dit, la goutte reste sphérique, seul son rayon varie au cours du temps.

1. Etablir l'équation qui donne l'évolution de la vitesse de chute de la goutte en fonction du temps. Comparer à la vitesse de chute en l'absence de capture de la vapeur d'eau environnante (k=0).
2. Montrer que, pour des durées très grandes, la vitesse de chute est équivalente à Kgt, avec $K \neq 1$ (au lieu de gt lorsqu'il n'y a pas capture du brouillard environnant).

Exercice 7.5 On considère le champ de vitesse suivant dans le plan horizontal :

$$\begin{aligned} u &= -a\sin(\omega t) \\ v &= a\cos(\omega t) \end{aligned}$$

où u et v sont les vitesses dans les directions x et y, a est l'amplitude de la fluctuation de la vitesse, et ω est appelée la pulsation.
On considère un point M de coordonnées (x_0, y_0) à $t = 0$.

1. Donner l'expression de la trajectoire de M en résolvant les équations (7.5) et représenter cette trajectoire graphiquement.
2. Donner l'expression de la ligne de courant passant par le point M à la date t et la représenter graphiquement
3. Donner l'expression de la ligne d'émission du point M entre $t = 0$ et $t = T$ et la représenter graphiquement.

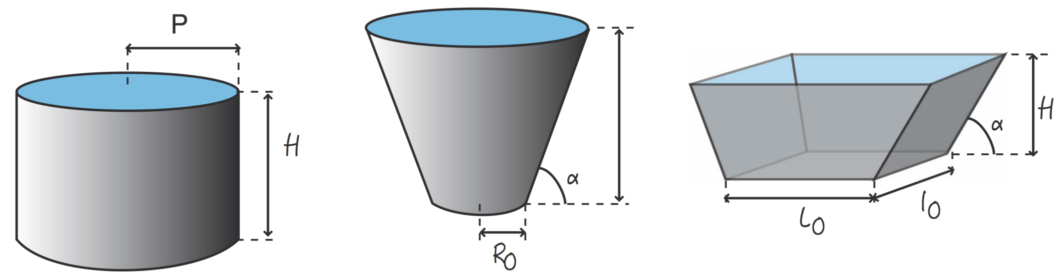
Exercice 7.6 Reprendre l'exercice précédent pour le champ de vitesse suivant, en régime permanent (varie dans l'espace mais pas dans le temps)

$$\begin{aligned} u &= -\omega y \\ v &= \omega x \end{aligned}$$

7.3 Exercices d'entraînement

Exercice 7.7 Pompage dans un réservoir.
Un débit constant est pompé dans un réservoir afin de combattre un incendie.

1. Calculer la variation de hauteur d'eau dans le réservoir si celui-ci est (voir figure) :
   (a) cylindrique de rayon R et de hauteur H.
   (b) tronconique de rayon de base b_0, de hauteur H et d'angle α par rapport à l'horizontale.
   (c) trapézoïdal de base rectangulaire $L_0 \times l_0$, de hauteur H et d'angle α par rapport à l'horizontale.
2. A quelle date t le réservoir sera-t-il vide s'il était plein avant le début du pompage à $t = 0$?



Exercice 7.8 Matières en suspension dans un réservoir (cf TD de mécanique des fluides).
La concentration de matières en suspension (MES) dans un réservoir augmente linéairement de 0 g/l à C g/l en fonction de la profondeur.
Calculer la masse totale que doit supporter le réservoir dans chacun des cas de l'exercice précédent.

Exercice 7.9 Vidange de réservoir
Lors de la vidange d'un réservoir, on montre que la variation de hauteur d'eau h dans le réservoir s'écrit sous la forme suivante (voir TD de mécanique des fluides) :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{2gh}\frac{S}{A(h)} \tag{7.10}$$

où S est la section de l'orifice et $A(h)$ est la section du réservoir au niveau h.

1. On suppose que le réservoir est cylindrique, de rayon R.
   (a) Résoudre l'équation (7.10),
   (b) représenter graphiquement $h(t)$,
   (c) donner l'expression de la durée de vidange T du réservoir en fonction de la hauteur d'eau initiale h_0 et des autres paramètres du problème.
2. Mêmes questions si le réservoir est conique, d'angle au sommet 2θ.

Exercice 7.10 Champ de vitesse variable
Soit le champ de vitesse suivant dans un plan horizontal

$$\begin{aligned} u &= a\sin(\omega t) \\ v &= b\cos(\omega t) \end{aligned}$$

où u et v sont les vitesses dans les directions x et y, a est l'amplitude de la fluctuation de la vitesse et ω est appelée la pulsation.

1. Donner l'expression de la trajectoire d'un point M situé en (x_0, y_0) à $t = 0$ et la représenter graphiquement.
2. Donner les composantes normale et tangentielle de l'accélération.

Exercice 7.11 Intégrales doubles.
Tracer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de chacune des fonctions $f(x, y)$ suivantes, puis calculer l'intégrale double de f sur $\mathcal{D}$: $\int\int_{\mathcal{D}} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

1. $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$ et $f(x, y) = xy$
2. $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq y \leq 1\right\}$ et $f(x, y) = xe^{-y}$
3. $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| \leq 1, |x + y| \leq 1\right\}$ et $f(x, y) = e^{x+y}$

Fiche 8

Méthodes numériques d'intégration

8.1 Rappels de cours

Lorsque l'on ne sait pas intégrer la fonction f analytiquement ou l'orsqu'on souhaite estimer une intégrale à partir de points de mesures, on utilise une méthode numérique d'intégration.

Méthode des rectangles

On utilise la définition de l'intégrale de Riemann :

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_i \Delta x_i f(\xi_i) \tag{8.1}$$

où $(x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$ est une subdivision de l'intervalle $[a; b]$ avec $a = x_0$, $b = x_N$, $\Delta x_i = (x_{i+1} - x_i)$ et $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$. L'intégrale est approchée en utilisant des valeurs finies de Δx_i et en choisissant ξ_i généralement à gauche, au milieu ou à droite de l'intervalle $[x_i; x_{i+1}]$. Méthode des rectangles...

... à gauche : $\xi_i = x_i$ ... à droite : $\xi_i = x_{i+1}$ ... au milieu : $\xi_i = (x_i + x_{i+1})/2$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \simeq \Delta x_i f(x_i) \qquad \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \simeq \Delta x_i f(x_{i+1}) \qquad \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \simeq \Delta x_i f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2})$$

Méthode des trapèzes

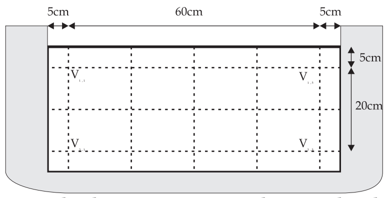
La plus adaptée lorsque l'on dispose de points de mesure. L'intégrale sur un intervalle $[x_i; x_{i+1}]$ est approchée par l'aire du trapèze défini par les points $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \simeq \Delta x_i \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

8.2 Exercices de TD

Exercice 8.1 Jaugeage au moulinet

On réalise une série de mesure de vitesse au moulinet dans une section de canal (voir figure ci-contre). Les mesures sont rassemblées dans la matrice V ci-dessous.



$$\mathbf{V} = (v_{i,j}) = \begin{pmatrix} 3,2 & 4,5 & 4,7 & 4 & 3,2 \\ 1,7 & 1,8 & 2,1 & 2,1 & 1,9 \\ 0,6 & 0,65 & 0,7 & 0,67 & 0,64 \end{pmatrix} \mathrm{ms}^{-1} \tag{8.2}$$

Calculer le débit qui passe dans le canal, à l'aide d'une double intégration de la vitesse par la méthode des trapèzes. Pour prendre en compte le fait qu'il n'y a pas de mesure sur les bords, on prendra un "coefficient de bord" $K_{\text{parois}} = 0,7$ et on considèrera que la vitesse au bord et au fond est égale à K_{parois} fois la vitesse au point de mesure le plus proche. De même, on choisira $K_{\text{SurfaceLibre}} = 0,9$.

Exercice 8.2 Calcul d'une ligne d'eau

Sous certaines conditions, il est possible de représenter l'évolution de la hauteur d'eau dans un canal rectangulaire par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{S_0 - q^2 n^2 h^{-10/3}}{1 - \frac{q^2}{gh^3}} \tag{8.3}$$

où S_0 est la pente du canal (m/m), q est le débit divisé par la largeur du canal ($\mathrm{m^2s^{-1}}$), n est le coefficient de frottement de Manning ($\mathrm{m^{-1/3}s}$).

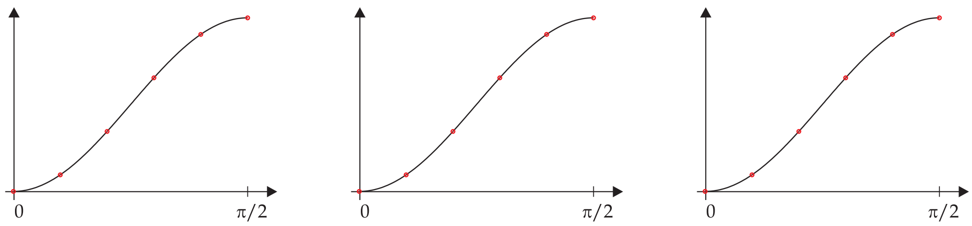
A une abscisse x_0, on mesure une hauteur d'eau h_0. Calculer la ligne d'eau à l'aval, c'est à dire la fonction $h(x)$ à différentes abscisses $x > x_0$, par la méthode des rectangles.

On prendra les valeurs suivantes : $x_0 = 0$; $h_0 = 4\mathrm{m}$; $\Delta h = -1\mathrm{cm}$; $S_0 = 0,01$; $q = 26\mathrm{m^2s^{-1}}$; $n = 0,03\mathrm{m^{-1/3}s}$ et $g = 9,81\mathrm{ms^{-2}}$

8.3 Exercices d'entraînement

Voir livre [4] chapitre 10 et fiche "Méthode d'Euler" p.324.

Exercice 8.3 Calculer l'intégrale de la fonction $\sin^2(x)$ sur l'intervalle $[0; \pi/2]$ par les trois variantes de la méthode des rectangles, en utilisant 6 points équidistants. Comparer les résultats obtenus à la solution exacte et expliquer ces résultats en s'aidant d'une représentation graphique :



à gauche — au milieu — à droite

Exercice 8.4 Quantité de polluant dans un canal

On mesure un flux de contaminant passant dans un canal pendant 12h ; calculer la masse de polluant correspondante, par les méthodes des rectangles et des trapèzes.

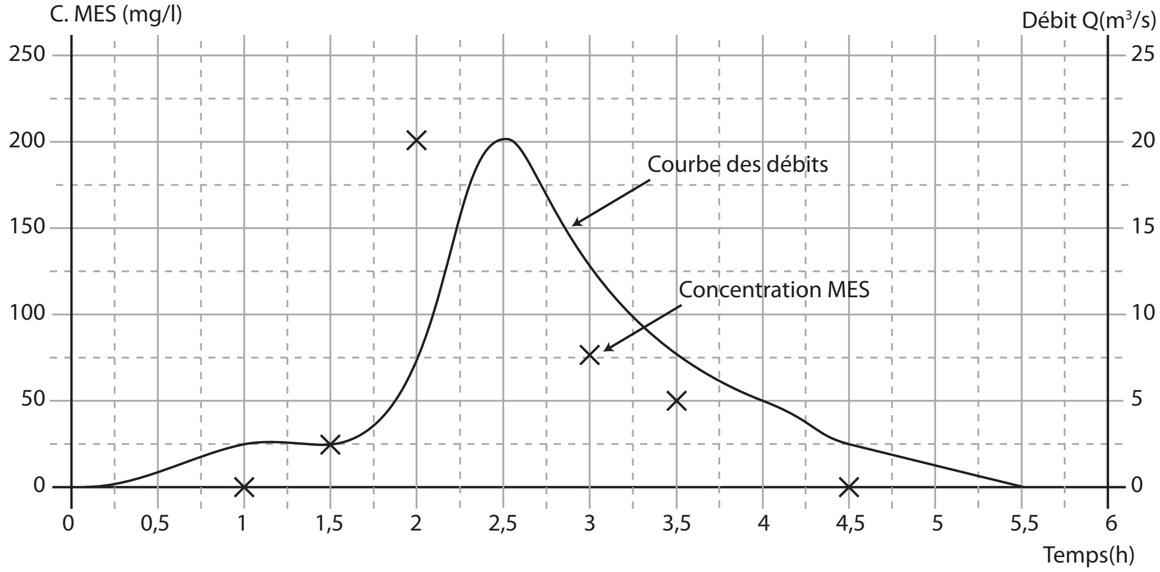
Heure	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Flux μg/s	0,1	0,52	0,96	1,53	1,86	2,13	2,21	2,18	1,98	1,62	1,25	0,86

Exercice 8.5 Intégrer l'équation suivante entre $x = 0$ et $x = 3$ (avec $\Delta x = 1$ puis $\Delta x = 0.5$), sachant que pour $x = 0$ on a $y = 1$:

$$y' = f(x) = \frac{10 - x^2}{5 - \sqrt{x}}$$

Exercice 8.6 Volume de crue et quantité de MES

Dans le cadre d'un diagnostic de réseau d'assainissement, des mesures de débit et de Matière En Suspension (MES) pendant un événement pluvieux ont abouti au graphique suivant :



— Evaluer le volume de cette crue
— Evaluer la masse de MES véhiculée (on pourra tester plusieurs méthodes)

Deuxième partie

Algèbre linéaire

FICHE

9 Opérations matricielles de base - résolution de systèmes

9.1 Rappels de cours

Matrice de taille $n \times m$:

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

si $n = m$ alors la matrice est dite **Carrée** et les éléments a_{ii} sont appelés **éléments diagonaux**.
si $n = 1$ alors la matrice est une **matrice ligne** ; si $m = 1$ alors la matrice est une **matrice colonne**

Somme. $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ ont les mêmes dimensions $n \times m$: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$

Multiplication par un scalaire. $\lambda\mathbf{A} = (\lambda a_{ij})_{i,j}$

Produit (Attention $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$). Le nombre de colonnes de $\mathbf{A}$ doit être égal au nombre de lignes de $\mathbf{B}$. Si $\mathbf{A} = (a_{ij})$ est une matrice $n \times l$ et $\mathbf{B} = (b_{ij})$ est de taille $l \times m$, alors $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ est une matrice de taille $n \times m$ dont les coefficients c_{ij} sont donnés par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj} \tag{9.2}$$

Déterminant et inverse

ne peuvent être calculés que pour une matrice carrée ($\mathbf{A}$ de taille $n \times n$). On se limite ici au cas $n = 2$:

$$\text{si } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ alors } \det \mathrm{A} = ad - bc \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{9.3}$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.

Système d'équations

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1i}x_i + \dots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ii}x_i + \dots + a_{in}x_n & = b_i \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{ni}x_i + \dots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \iff \mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

Les actions suivantes ne modifient pas la solution du système :
- permutation de deux lignes simultanément en $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$;
- multiplication de chaque ligne par un scalaire non nul ;
- addition d'une ligne à une autre ligne de la matrice ;
- toute combinaison des opérations précédentes.

9.2 Exercices de TD

Exercice 9.1 Produit matriciel / Produit scalaire
Soit $\mathbf{A}$ une matrice ligne (de taille $1 \times l$) et $\mathbf{B}$ une matrice colonne (de taille $l \times 1$) :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_i & \dots & a_l \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_l \end{pmatrix}$$

Calculer les produits $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{BA}$. Que représente le produit $\mathbf{AB}$?

Exercice 9.2 Inverses de matrice
Soit

$$\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

retrouver la formule de l'inverse de $\mathbf{A_1}$.

Exercice 9.3 Produit de matrices

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{BA}$; commenter.
2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbf{AB}$; commenter.
3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{AC}$; commenter.

Exercice 9.4 Inverse d'un produit de matrices

1. Montrer que si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux matrices inversibles alors $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
2. Application : comparer le calcul de $(\mathbf{AB})^{-1}$ et $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ avec les matrices suivantes :
   $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -9 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 9.5 Sans résoudre les systèmes suivants, déterminer combien ils ont de solution(s) : aucune, 1 seule, une infinité.

$$(\text{S1}) \left\{ \begin{array}{cccc} x & +2y & +5z & = & 2 \\ x & +y & -z & = & 4 \\ 2x & +4y & +10z & = & 4 \end{array} \right. \quad (\text{S2}) \left\{ \begin{array}{cccc} x & +2y & +5z & = & 2 \\ x & +y & -z & = & 4 \\ 2x & +4y & +10z & = & 8 \end{array} \right. \quad (\text{S3}) \left\{ \begin{array}{cccc} x & +y & +z & = & 12 \\ 4x & +2y & +z & = & 35 \\ 4x & -2y & +z & = & 27 \end{array} \right.$$

Exercice 9.6 Les matrices suivantes sont-elles inversibles (régulières) ?

$$(\text{M1}) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{M2}) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad (\text{M3}) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 9.7 Systèmes régulier, singulier ou mal conditionné
Résoudre les systèmes suivants et les représenter graphiquement :

$$(S1) \quad \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ 0,5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,5 \end{bmatrix}$$

$$(S2) \quad \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,5 \end{bmatrix}$$

$$(S3) \quad \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ 0,5 & 1,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\epsilon \end{bmatrix}$$

avec $\epsilon = 0$ puis $\epsilon = -0,1$.

Exercice 9.8 Exemple de système mal conditionné : rentabilité des machines à eau gazeuse
On souhaite acquérir une machine à eau gazeuse (60€). Sachant qu'il faut une recharge de gaz (12€) pour 50l et que l'eau gazeuse en bouteille se trouve à 0,26€/l, à partir de combien de bouteilles la machine sera amortie ? Même question si l'eau en bouteille coûte 0,30€/l ?

9.3 Exercices d'entraînement

Pour s'entrainer sur les opérations matricielles de base, faire les exercices des chapitres 1 et 2 du livre [2] (on ne s'intéresse pas au produit par bloc, à la conjuguée d'une matrice et aux matrices hermitiennes).

Exercice 9.9 Calculs matriciels élémentaires
Soient

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

calculer :
$\mathbf{M_1} = \mathbf{A} + 3\mathbf{B}$; $\mathbf{M_2} = \mathbf{A^T}$; $\mathbf{M_3} = \mathbf{AB}$; $\mathbf{M_4} = \mathbf{BA}$; $\mathbf{M_5} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC}$; $\mathbf{M_6} = \mathbf{A} + \mathbf{B^T}\mathbf{C}$.

Exercice 9.10 Calculer :

$$\mathbf{M_1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 9.11 Résoudre les systèmes suivants :

$$(S1) \begin{cases} 3x + 2y + z = & 2 \\ 2x + 4y + z = & 1 \\ 6x + 4y + z = & 4 \end{cases} \qquad (S2) \begin{pmatrix} 25 & -5 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,5 \\ 4,2 \\ 10,8 \end{pmatrix}$$

$$(S3) \begin{pmatrix} 5,32 & -2,2 & 1 \\ 4,58 & -4,6 & 1 \\ 4,67 & 4,5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad (S4) \begin{cases} 3x & -7y & = & -7 \\ -1,5x & +3,5y & = & -1 \end{cases}$$

$$(S5) \begin{cases} 4x & -2y & +7z & = & 20 \\ 3x & -y & +3z & = & 10 \\ 2x & -3y & -z & = & 3 \end{cases} \qquad (S6) \begin{cases} x_1 + 7x_3 - 2x_4 & = & -18 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = & -2 \\ x_3 + 4x_4 & = & 2 \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 11 \end{cases}$$

Rep : S1 : (3/4 ;-1/8 ;0) ; S2 : (0,927 ; 2,968 ; 1,153) ; S3 : (2,35 ; 0,53 ; -3,33) ; S4 : pas de solution ; S5 : (1 ;-1 ;2) ; S6 : (-3.38 ;0.99 ;-1.82 ;0.95)

FICHE

10 Interpolation

10.1 Rappels de cours

Interpolation / approximation / extrapolation

A partir de n points de mesure (x_i, y_i) sur un intervalle $[a, b]$, on souhaite déterminer une fonction $y = f(x)$ qui permettra d'estimer la valeur de y pour un x quelconque. On rappelle que **l'approximation** consiste à minimiser la distance entre les points de mesure et une loi de forme déterminée.
L'interpolation consiste à déterminer une fonction f définie sur $[a, b]$ qui vérifie $f(x_i) = y_i$, $i = 1 \ldots n$: la fonction passe par tous les points de mesure - Figure 10.1gauche. **L'extrapolation** consiste à utiliser la fonction d'interpolation ou d'approximation pour estimer la valeur recherchée en un point situé à l'extérieur de l'intervalle $[a, b]$ (Figure 10.1droite).

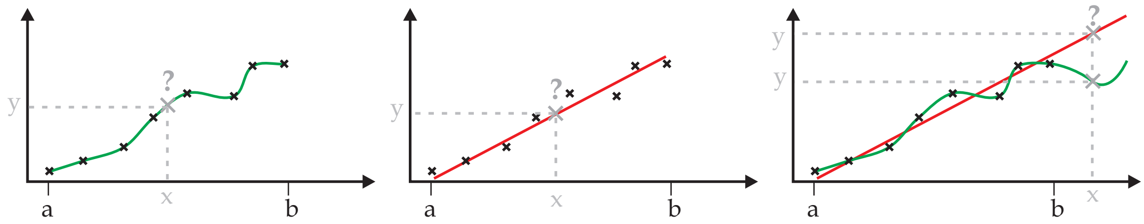


FIGURE 10.1 – Gauche : Interpolation. Millieu : Approximation. Droite : Extrapolation.

Polynôme de Lagrange

Le polynôme de degré au plus n passant par $n+1$ points (x_i, y_i) non alignés est donné par la formule de Lagrange :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right] \tag{10.1}$$

Plus le degré du polynôme est élevé, plus il a tendance à “osciller” entre les points de mesure (phénomène de Runge). Lorsque l'on dispose de nombreux points de mesure, on préférera soit **approcher** les points par une seule fonction simple (regression) soit **interpoler** les points linéairement “par morceaux” (voir figure ci-dessous).

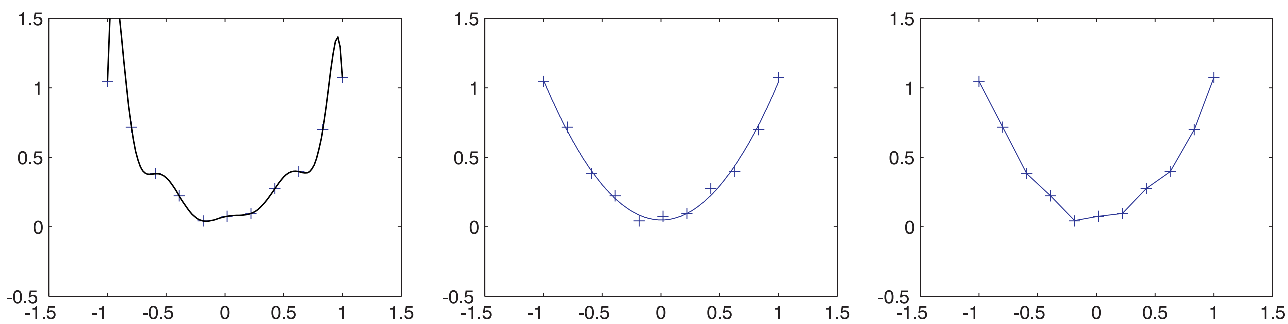


FIGURE 10.2 – Gauche : Interpolation par un polynôme de Lagrange de degré 10. Millieu : Approximation par une loi polynômiale de degré 2. Droite : Interpolation linéaire par morceaux.

10.2 Exercices de TD

Exercice 10.1 Résolution de systèmes : application à l'interpolation
Lors d'un écoulement dans une conduite de longueur L, on observe une perte de charge linéaire $\Delta H = jL$. La valeur de j peut être estimée par :

$$j = \lambda u^2/(2gD)$$

où le coefficient λ peut être calculé par la formule de Colebrook (équation 2.2 page 12). Pour une conduite circulaire de diamètre $D = 60$mm et un coefficient de rugosité $k = 2 \cdot 10^{-3}$, des abaques donnent :

Q(l/s)	0,51	0,95	1,45	2,03	2,49	3,06	3,56
j(m/m)	$1{,}72 \cdot 10^{-3}$	$5{,}87 \cdot 10^{-3}$	$1{,}36 \cdot 10^{-2}$	$2{,}65 \cdot 10^{-2}$	$3{,}97 \cdot 10^{-2}$	$5{,}99 \cdot 10^{-2}$	$8{,}10 \cdot 10^{-2}$

NB : Vous pouvez vérifier ces valeurs en résolvant l'équation de Colebrook par une méthode itérative
Calculer la perte de charge linéaire j dans la conduite pour un débit de 1,3l/s :

1. par une interpolation linéaire
2. par une interpolation polynomiale de degré 2.

Exercice 10.2 Chromatographie ionique
On se propose de quantifier les ions potassium et calcium présents dans un sel de régime par chromatographie ionique. Une première dissolution dans de l'eau ultra-pure donne une solution S1 qui servira au dosage des ions calcium. Pour les ions potassium, on prépare un solution S2 en diluant 20 fois S1. Une gamme étalon et les deux solutions S1 et S2 sont chromatographiées dans des conditions identiques. Sur les différents chromatogrammes obtenus, on relève les aires des pics correspondant à Ca^{++} et à K^+ :

Ca^{++}			K^+		
Solution	Conc. mg/L	Aire	Solution	Conc. mg/L	Aire
Etalon 1	10	4.2	Etalon 1	10	2.5
Etalon 2	20	8.6	Etalon 2	20	4.9
Etalon 3	50	21.4	Etalon 3	50	12.3
Etalon 4	100	43.2	Etalon 4	100	24.5
S1	?	28.6	S2	?	27.1

1. Estimer les concentrations massiques des solutions S1 et S2.
2. On dispose d'un point supplémentaire dans la gamme étalon :

Ca^{++}			K^+		
Solution	Conc. mg/L	Aire	Solution	Conc. mg/L	Aire
Etalon 5	150	46.5	Etalon 5	150	27.4

Que peut-on en déduire ?

10.3 Exercices d'entraînement

Exercice 10.3 Déterminer le polynôme de Lagrange de degré 1 tel que $P(x_0) = y_0$ et $P(x_1) = y_1$. Vérifier qu'il s'agit bien de l'équation de la droite passant par les points (x_0, y_0) et (x_1, y_1)

Exercice 10.4 Déterminer le polynôme de degré 2 passant par les points (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2) à l'aide de la formule du polynôme de Lagrange et par la résolution d'un système linéaire.

Exercice 10.5 On dispose de 12 mesures de MES (Matières En Suspension) effectuées toutes les heures dans un réseau d'assainissement pluvial lors d'un événement pluvieux :

Temps (h)	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
MES (mg/l)	100		120	160	210	180			120	90	80	70	

Combler les manques dans le tableau à l'aide d'une interpolation linéaire par morceaux et d'une extrapolation linéaire.

Exercice 10.6 Déterminer le polynôme (degré 1 ou 2) passant par les points suivants :
P1) (1,45 ; 0,034) ; (2,56 ; 0,048)
P2) (-5 ; 9,66) ; (-2 ;4,5) ; (1,9 ;10,2)
P3) (1 ;1312,05) ; (2 ;2257,34)

Rep : $P_1(x) = 0,0126x + 0,0157$; $P_2(x) = 0,46x^2 + 1,5x + 5,67$; $P_3(x) = 945,29x + 366,76$

FICHE

11 Application de l'algèbre linéaire à la géométrie

11.1 Rappels de cours

Applications linéaires

Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = (b_1, \ldots, b_m)$ est dite linéaire si

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots &\quad \vdots \\ b_m &= a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned} \tag{11.1}$$

soit, sous forme matricielle : $f(x) = \mathbf{A}x = \mathbf{B}$ avec $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m,n}$ où $\mathbf{A}$ est appelée la matrice de l'application linéaire.

Changement de repère

Pour passer d'un repère R de vecteurs unitaires $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ à un repère R' de vecteurs unitaires $\left(\vec{e}_1^{\,\prime}, \vec{e}_2^{\,\prime}, \vec{e}_3^{\,\prime}\right)$ on utilise une **matrice de passage P**. Celle-ci contient en colonne les vecteurs de R' exprimés dans R. Soit un vecteur de composantes (x_1, x_2, x_3) dans R et $(x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'})$ dans R' ; on a :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} x_1^{'} \\ x_2^{'} \\ x_3^{'} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x_1^{'} \\ x_2^{'} \\ x_3^{'} \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

11.2 Exercices de TD

Exercice 11.1 Rotations dans le plan

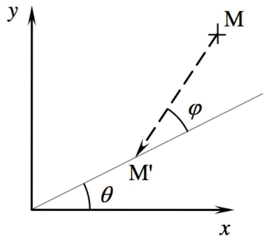
1. Soit un point M (x_M, y_M) représenté en coordonnées polaires.
   (a) Donner l'expression de x_M et y_M dans le repère cartésien R en fonction de r et θ.
   (b) Le point M subit une rotation d'angle α ; exprimer les coordonnées (x_α, y_α) de M après rotation, en fonction de r, α et θ puis en fonction de x_M, y_M et α.
   (c) En déduire la matrice de rotation d'angle α
2. Quel est l'inverse de cette matrice de rotation ?
3. On considère un nouveau repère R', issu de la rotation du repère R d'un angle θ. Exprimer la matrice de passage du repère R au repère R'.

Exercice 11.2 Dilatation

Donner les coefficients de la matrice $\mathbf{M}$ qui effectue la dilatation d'un facteur k dans la direction qui fait un angle θ avec l'axe des x, aucune dilatation dans la direction orthogonale.
Chercher des vecteurs particuliers, pour lesquels la transformation correspond à une simple multiplication par un réel. Pour cela, on cherchera les solutions λ de l'équation $\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

Exercice 11.3 Projection oblique

Donner les coefficients de la matrice qui effectue la projection oblique d'un point sur la droite faisant un angle θ avec l'axe des x. L'angle de projection est noté ϕ (cf. Figure).



Chercher des vecteurs particuliers, pour lesquels la transformation correspond à une simple multiplication par un réel.

11.3 Exercices d'entraînement

Exercice 11.4 Donner les matrices des applications linéaires suivantes :

1. réflexion par rapport à l'axe Oy ;
2. réflexion par rapport à l'axe Ox ;
3. réflexion par rapport à la droite $y = x$;
4. projection orthogonale sur l'axe Ox ;
5. homothétie de rapport k.

Fiche

12 Matrice Jacobienne et résolution d'un système non linéaire

12.1 Rappels de cours

On considère un système de n fonctions non linéaires f_i, $i = 1 \dots n$ à n inconnues x_i, $i = 1 \dots n$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) & = & 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) & = & 0 \\ \vdots & & \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) & = & 0 \end{array} \right. \tag{12.1}$$

Matrice Jacobienne

La matrice Jacobienne est composée de toutes les dérivées partielles des fonctions f_i par rapport à toutes les variables x_i :

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{12.2}$$

Résolution d'un système d'équations non linéaires :

La méthode de **Newton Raphson** est une généralisation de la méthode de Newton (c.f. Fiche 2) pour la recherche de racine d'un système d'équations non linéaires :

$$\mathrm{X_{n+1} = X_n - J_n^{-1} F_n} \tag{12.3}$$

12.2 Exercices de TD

Exercice 12.1 En hydraulique à surface libre, les équations de Saint-Venant permettent de calculer le débit et la hauteur d'eau dans un écoulement. Sous certaines conditions, ces équations s'écrivent sous forme vectorielle et en une dimension d'espace :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \tag{12.4}$$

où **U** est le vecteur des variables indépendantes

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ uh \end{pmatrix}$$

et **F** est la fonction de flux

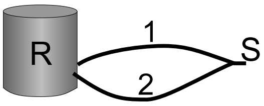
$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} q \\ q^2/h + gh^2/2 \end{pmatrix}$$

Ecrire l'équation (12.4) sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \tag{12.5}$$

Calculer la matrice **A**, qui est la matrice Jacobienne de la fonction de flux.

Exercice 12.2 Calcul de débit dans un réseau d'adduction



La perte de charge linéaire entre deux extrémités d'une conduite peut être estimée en fonction du débit par la relation $\Delta H = \alpha\,|Q|\,Q$ où α est le coefficient de perte de charge qui dépend du matériau de la conduite.

On considère un réservoir R qui fourni en S un débit Q_S connu en passant par deux conduites de matériaux différents, notées 1 et 2.

1. Ecrire un système de deux relations reliant les débits Q_1 et Q_2 (inconnus) aux coefficients de pertes de charge α_1 et α_2 et au débit Q_S.
2. Résoudre le système par la méthode de Newton-Raphson.

Valeurs numériques : $\alpha_1 = 0,01\mathrm{ms}^2\mathrm{l}^{-2}$, $\alpha_2 = 0,02\mathrm{ms}^2\mathrm{l}^{-2}$, $Q = 10\mathrm{ls}^{-1}$.

12.3 Exercices d'entraînement

Exercice 12.3 Soit $\mathbf{U} = (u_1, u_2)$ un vecteur de deux variables indépendantes, et $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ une fonction de $\mathbf{U}$. Calculer la Jacobienne de $\mathbf{F}$ pour :

$$\mathbf{F_1} = \begin{pmatrix} u_1^2 + 3\sin u_2 \\ u_1 u_2 - 2u_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F_2} = \begin{pmatrix} \frac{u_1}{u_2} \\ u_2 e^{u_1} \end{pmatrix}$$

Exercice 12.4 Soit $\mathbf{X} = (x, y, z)$ un vecteur de trois variables indépendantes et $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ une fonction de $\mathbf{X}$. Calculer la Jacobienne de $\mathbf{F}$ pour :

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} xe^y + 3x^2 - \sin z \\ x^3 z + y^2 z \\ x/y + \ln z \end{pmatrix}$$

Exercice 12.5 Résoudre le système d'équations non linéaires suivant en prenant pour solution initiale $(1; 1)$:

$$\begin{aligned} 3x\mathrm{e}^y + 2x^3 y &= 7 \\ \sin(xy) + 3x^2 y^3 &= 2 \end{aligned}$$

arrondir les calculs à 10^{-2} et s'arrêter lorsque la différence entre deux points consécutifs est inférieure à 0,1 (sur x et y).
Rep : $(x, y) = (0,84;\ 0,86)$.

Exercice 12.6 Résoudre les systèmes non linéaires suivants :

$$\text{S1)} \begin{cases} 0,05x\,|x| + 0,02y\,|y| & = -10 \\ x - y & = 30 \end{cases} \qquad \text{S2)} \begin{cases} y^2 - x^3 - \exp(-x) & = 0 \\ 3y - 2x^2 - 3 & = 0 \end{cases}$$

Rep : S1 : $x \in [5,81\,;\,5,83]$; S2 : $x = 0$