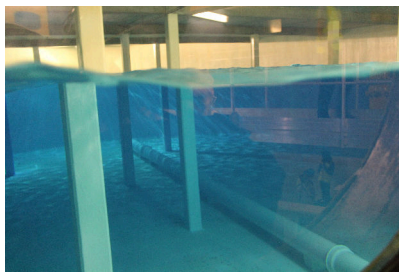


# Mécanique des fluides Hydraulique en charge Hydraulique à surface libre

2019 - 2020



Intérieur de la cuve du réservoir du Tannenwald - SDEA©



Lyre incendie du réservoir du Tannenwald - SDEA©



Pompe de refoulement vers le réservoir d'Oberhausbergen



L'Ill canalisée à Fislis (68) - Pascal Finaud-Guyot©



L'Ill naturelle à Fislis (68) - Pascal Finaud-Guyot©



Déversoir latéral sur l'Ill à l'aval de Fislis (68) - Pascal Finaud-Guyot©

## Préambule

Ce support de cours a été rédigé par Pascal Finaud-Guyot. Il a été amicalement relu par Pierre-André Garambois. Toute diffusion sous quelque format est interdite sans leur consentement préalable.

Pascal Finaud-Guyot<sup>1</sup> est maître de conférences à Polytech Montpellier et effectue ses recherches au sein du laboratoire HydroSciences Montpellier. Ses thématiques de recherche portent sur l'étude des écoulements en cours d'eau avec notamment leur modélisation en période de crue.

Pierre-André Garambois<sup>2</sup> est chargé de recherche à IRSTEA.



Ce symbole indique un lien vers une vidéo illustrant la section courante. Il est conseillé de lire le document avant de regarder la vidéo.

---

1. [pascal.finaud-guyot@umontpellier.fr](mailto:pascal.finaud-guyot@umontpellier.fr)

2. [pierre-andre.garambois@irstea.fr](mailto:pierre-andre.garambois@irstea.fr)

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Mécanique des fluides</b>	<b>7</b>
<b>I.1</b>	<b>Les propriétés des fluides</b>	<b>9</b>
I.1.1	Qu'est-ce qu'un fluide? . . . . .	9
I.1.2	La masse volumique et la densité . . . . .	10
I.1.3	La viscosité . . . . .	12
I.1.4	La pression de vapeur saturante . . . . .	13
I.1.5	La tension superficielle . . . . .	14
I.1.6	La pression . . . . .	15
<b>I.2</b>	<b>Description des écoulements</b>	<b>17</b>
I.2.1	Écoulement en charge / à surface libre . . . . .	17
I.2.2	Écoulement laminaire / turbulent . . . . .	17
I.2.3	Les forces . . . . .	21
I.2.4	Importance des différentes forces - utilité des nombres adimensionnels . . . . .	22
<b>I.3</b>	<b>Relation fondamentale de l'hydrostatique</b>	<b>25</b>
I.3.1	Démonstration . . . . .	25
I.3.2	Application aux fluides incompressibles . . . . .	27
I.3.3	Application aux fluides compressibles . . . . .	28
<b>I.4</b>	<b>Action de la pression</b>	<b>29</b>
I.4.1	Forces résultantes de la pression . . . . .	29
<b>I.5</b>	<b>Définitions et fondamentaux</b>	<b>37</b>
I.5.1	Régime permanent / transitoire . . . . .	37
I.5.2	Uniforme / non-uniforme . . . . .	37
I.5.3	Trajectoire . . . . .	38
I.5.4	Lignes de courant . . . . .	38
I.5.5	Débit volumique, massique et vitesse moyenne . . . . .	38
<b>I.6</b>	<b>Équation de continuité</b>	<b>41</b>
I.6.1	Cas général . . . . .	41
I.6.2	Cas particuliers . . . . .	43
<b>I.7</b>	<b>Principe fondamental de la dynamique</b>	<b>45</b>
I.7.1	Équation d'Euler le long d'une trajectoire . . . . .	45
I.7.2	Équation de Navier Stokes . . . . .	47
<b>I.8</b>	<b>Théorème d'Euler</b>	<b>49</b>
I.8.1	Écriture dans le cas général . . . . .	49
<b>I.9</b>	<b>Théorème de Bernoulli</b>	<b>51</b>

I.9.1	Démonstration . . . . .	51
I.9.2	Interprétation de l'équation de Bernoulli . . . . .	51
<b>II</b>	<b>Hydraulique en charge</b>	<b>55</b>
<b>II.10</b>	<b>Équation de Bernoulli appliquée aux fluides réels</b>	<b>57</b>
<b>II.11</b>	<b>Estimation des pertes de charge</b>	<b>61</b>
II.11.1	Expression générale des pertes de charge . . . . .	61
II.11.2	Les pertes de charge linéaires . . . . .	61
II.11.3	Les pertes de charge singulières . . . . .	67
II.11.4	Exemples de tracés de profil de charge . . . . .	68
<b>II.12</b>	<b>Interprétation graphique</b>	<b>71</b>
II.12.1	Position de la ligne piézométrique . . . . .	71
<b>II.13</b>	<b>Les pompes</b>	<b>75</b>
II.13.1	Généralités . . . . .	75
II.13.2	Caractéristiques des pompes centrifuges . . . . .	76
II.13.3	Cavitation à l'aspiration et NPSH . . . . .	83
II.13.4	Relations de similitude . . . . .	85
II.13.5	Assemblage de pompes . . . . .	85
<b>II.14</b>	<b>Le coup de bélier</b>	<b>91</b>
II.14.1	Présentation du phénomène . . . . .	91
II.14.2	Nature des ondes . . . . .	91
II.14.3	Calcul des célérités d'onde . . . . .	91
II.14.4	Conservation de la masse dans un écoulement traversé par une onde . . . . .	92
II.14.5	Équation aux caractéristiques . . . . .	93
II.14.6	Exemple d'application . . . . .	94
<b>III</b>	<b>Hydraulique à surface libre</b>	<b>103</b>
<b>III.15</b>	<b>Description des écoulements</b>	<b>105</b>
III.15.1	Géométrie des canaux . . . . .	105
III.15.2	Caractéristiques des écoulements . . . . .	111
III.15.3	Distribution des vitesses et des pressions dans l'écoulement . . . . .	111
III.15.4	Équations de Barré de Saint-Venant . . . . .	114
<b>III.16</b>	<b>Le régime permanent uniforme</b>	<b>117</b>
III.16.1	Définition et mise en équation . . . . .	117
III.16.2	Propriétés du régime permanent uniforme . . . . .	118
III.16.3	Caractérisation du régime permanent uniforme . . . . .	119
<b>III.17</b>	<b>Le régime permanent non-uniforme</b>	<b>125</b>
III.17.1	Charge spécifique . . . . .	125
III.17.2	Hauteur d'eau critique . . . . .	127
III.17.3	Régime graduellement varié . . . . .	128
III.17.4	Régime rapidement varié . . . . .	138
<b>III.18</b>	<b>Les ouvrages</b>	<b>145</b>



III.18.1 Les seuils frontaux . . . . .	145
III.18.2 Les chutes . . . . .	152
III.18.3 Les vannes . . . . .	152
<b>IV Annexes</b>	<b>155</b>
<b>A Géométrie des parois planes</b>	<b>157</b>
<b>B Coefficients de perte de charge singulière</b>	<b>159</b>
<b>C Rugosité de différents matériaux</b>	<b>167</b>
<b>D Détermination du coefficient de Manning-Strickler</b>	<b>171</b>
<b>E Relations approchées pour une section circulaire</b>	<b>175</b>
E.1 Géométrie . . . . .	175
E.2 Régime permanent uniforme . . . . .	175
<b>F Relations approchées pour une section fer à cheval</b>	<b>179</b>
F.1 Géométrie . . . . .	179
F.2 Régime permanent uniforme . . . . .	179
<b>G Relations approchées pour une section ovoïde</b>	<b>183</b>
G.1 Géométrie . . . . .	183
G.2 Régime permanent uniforme . . . . .	183
<b>H Abaques de calcul de l'équation de la ligne d'eau</b>	<b>187</b>
H.1 Démonstration de l'équation . . . . .	187
H.2 Courbes . . . . .	189
<b>I Abaques de calcul des déversoirs latéraux en canal rectangulaire</b>	<b>195</b>
I.1 Choix de l'abaque . . . . .	195
I.2 Utilisation de l'abaque . . . . .	196
I.3 Courbes . . . . .	198
<b>J Description des variables</b>	<b>213</b>
<b>K Liste des vidéos de cours</b>	<b>215</b>
K.1 Mécanique des fluides . . . . .	215
K.2 Hydraulique en charge . . . . .	215
K.3 Hydraulique à surface libre . . . . .	215
<b>Bibliography</b>	<b>216</b>



Première partie

Mécanique des fluides



# Chapitre I.1

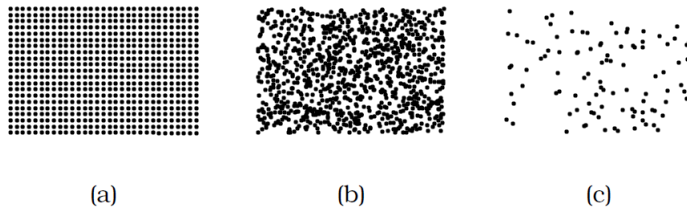
## Les propriétés des fluides

### I.1.1 Qu'est-ce qu'un fluide ?

Il existe trois états de la matière pour un corps simple : solide, liquide et gaz. Les atomes ou les molécules qui le composent sont en perpétuelle agitation et la température est corrélée à cette agitation.

L'organisation des composants de la matière diffère suivant l'état, conférant des propriétés différentes :

- à l'**état solide**, matériau à faible température, les molécules s'organisent de manière régulière et occupent une position déterminée avec des forces d'attraction considérables entre ces composants ;
- à l'**état liquide**, matériau à température moyenne et pression suffisamment élevée, les molécules restent rapprochées mais elles sont libres de se déplacer au sein de la matière ;
- à l'**état gazeux**, matériau à température suffisamment élevée et pression faible, les forces d'attraction entre molécules sont les plus faibles permettant à la matière d'occuper l'ensemble de l'espace qui lui est offert (on dit qu'un gaz est expansif).



Représentation idéalisée de trois états de la matière (source : [Ancy 2015])

Les corps à l'état liquide et/ou gazeux sont souvent appelés fluides. Ces deux états ne supposent pas de forme propre, i.e. qu'un fluide aura tendance à épouser la forme du récipient qui le contient, un milieu fluide étant généralement isotrope. Notons qu'un fluide apparemment au repos à échelle macroscopique est en fait, à plus petite échelle l'échelle moléculaire en perpétuelle agitation.

Les fluides sont des milieux déformables. La science qui les étudie est la mécanique des fluides, elle-même issue de la mécanique des milieux continus (voir figure I.1.1). Dans la mécanique des fluides, on distingue souvent :

- l'hydrodynamique qui se focalise sur l'étude des liquides,
- l'aérodynamique qui s'intéresse aux gaz.

Ce cours s'intéresse uniquement aux liquides mêmes si certaines propriétés et formulations concernant les liquides sont valables pour l'ensemble des fluides.

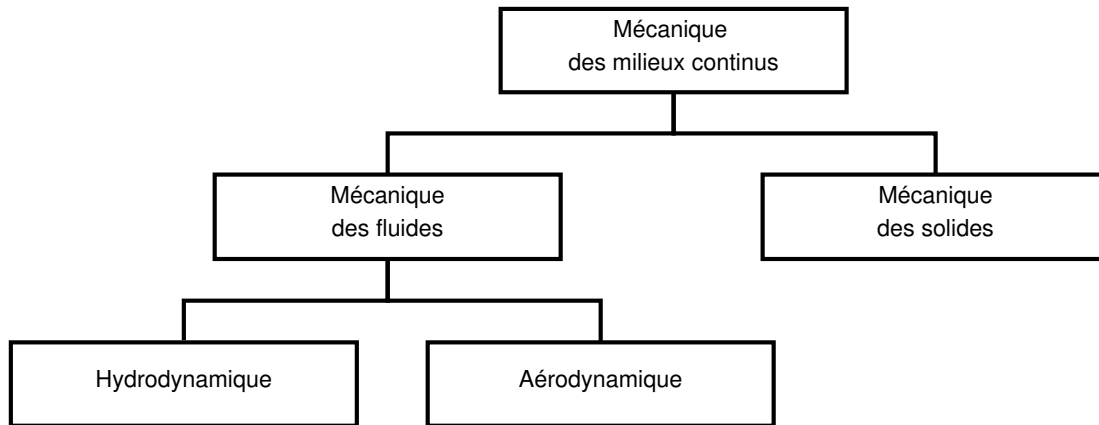


FIGURE I.1.1 – Organigramme des différentes sciences découlant de la mécanique

Élément	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	densité
eau	1000	1
air	1,293	1
béton	2000-2500	2-2,5
mercure	13600	13,6
huile	850-950	0,85-0,95

TABLE I.1.1 – Valeurs de la masse volumique et de la densité pour des fluides fréquemment rencontrés en hydraulique

## I.1.2 La masse volumique et la densité

### I.1.2.1 La masse volumique

La masse volumique d'un corps est le rapport entre sa masse  $M$  et le volume  $V$  qu'il occupe. La masse volumique est généralement notée  $\rho$  :

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (\text{I.1.1})$$

A volume équivalent, un corps A ayant une masse volumique plus grande qu'un corps B sera plus lourd que ce dernier. A l'équilibre (sans perturbations extérieures), les fluides s'organisent de manière à ce que les masses volumiques soient croissantes du haut vers le bas. On se référera au tableau I.1.1 pour des valeurs chiffrées.

### I.1.2.2 La densité

La densité permet de comparer facilement les différents corps par rapport à une référence. Elle est définie comme le ratio entre la masse volumique du corps considéré et la masse volumique du corps de référence (dans les mêmes conditions de température et de pression) :

$$d = \frac{\rho_{corps}}{\rho_{reference}} \quad (\text{I.1.2})$$

Cette référence est :

- l'eau pour les liquides et les solides :  $\rho_{eau} = 1000 \text{ kg/m}^3$
- l'air pour les gaz :  $\rho_{air} = 1,293 \text{ kg/m}^3$

$T$ °C	$\rho$ kg.m <sup>-3</sup>	$\nu$ m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup>	$p_v$ Pa
0	999,8	1,787.10 <sup>-6</sup>	610
10	999,7	1,307.10 <sup>-6</sup>	1228
20	998,2	1,004.10 <sup>-6</sup>	2339
40	992,2	0,658.10 <sup>-6</sup>	7378
60	983,2	0,474.10 <sup>-6</sup>	19923
80	971,8	0,365.10 <sup>-6</sup>	47359

TABLE I.1.2 – Influence de la température sur les caractéristiques de l'eau pour une pression de 1atm. Reproduit d'après [6]

Élément	$\chi_T$ (Pa <sup>-1</sup> )
eau	4,5.10 <sup>-10</sup>
air	9,9.10 <sup>-6</sup>
mercure	0,37.10 <sup>-10</sup>

TABLE I.1.3 – Valeurs des coefficients de compressibilité isotherme

### I.1.2.3 Le poids volumique

Dans la mesure où on s'intéresse souvent à l'action du poids des fluides, on utilise parfois la notation suivante :

$$\gamma = \rho g \quad (\text{I.1.3})$$

où  $\gamma$  est le poids volumique du fluide.

### I.1.2.4 Influence de la température et de la pression

La masse volumique varie notamment avec la température et la pression.

#### I.1.2.4.1 Influence de la température

L'influence de la température sur les grandeurs caractéristiques de l'eau est résumée dans le tableau I.1.2.

#### I.1.2.4.2 Influence de la pression : la compressibilité

La compressibilité d'un corps représente la variation de masse volumique d'un corps soumis à une variation de pression  $dP$ . Le module de compressibilité isotherme  $\chi_T$  (= à température constante) est le ratio entre la variation relative de masse volumique et la variation de pression :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \chi_T dP \quad (\text{I.1.4})$$

Cette grandeur, peu utilisée en hydraulique, caractérise le caractère compressible d'un fluide. En effet, on note que pour les gaz (compressibles), le coefficient de compressibilité isotherme est nettement plus important que pour les liquides (dit « incompressibles ») (voir tableau I.1.3).

Un fluide dont la masse volumique varie très peu est dit incompressible. C'est généralement le cas des liquides à contrario des gaz dont la masse volumique varie beaucoup avec la température et la pression. Toutefois, le comportement incompressible reste une hypothèse simplificatrice. En effet, lorsqu'un liquide est soumis à de fortes variations de pression et/ou de température, il convient de considérer son caractère compressible. C'est notamment le cas lorsque l'on s'intéresse aux écoulement marins, aux phénomènes très transitoires dans les écoulement en charge (phénomène de coup de bélier), ...

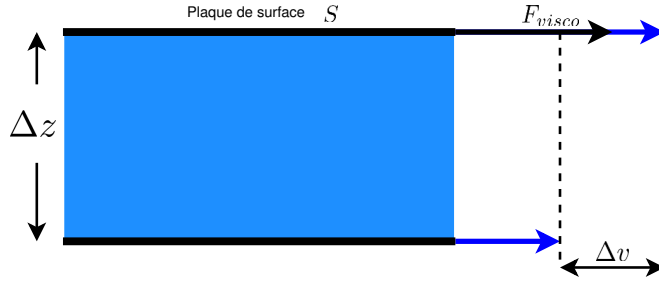


FIGURE I.1.2 – Illustration de la force de viscosité

### Pour aller plus loin

Pour la description des techniques de mesure de la masse volumique ou de la densité d'un corps, on pourra se référer aux ouvrages suivants : [8]

## I.1.3 La viscosité

La viscosité est la mesure de la résistance d'un fluide à l'écoulement. Si l'on considère deux plaques de surface  $S$  séparées par la distance  $\Delta z$  qui se déplacent avec une différence de vitesse  $\Delta v$  (voir figure I.1.2) alors la force nécessaire pour générer ce déplacement vaut :

$$F_{visco} = S\mu \frac{\Delta v}{\Delta z} \quad (\text{I.1.5})$$

La loi de la viscosité de Newton ou de Stokes exprime cette même relation à une échelle quelconque (que  $dz$  soit très petit ou très grand) :

$$\overrightarrow{F_{visco}} = S\mu \frac{d\vec{v}}{dz} \quad (\text{I.1.6})$$

où  $\overrightarrow{F_{visco}}$  représente la force de viscosité exercée par le fluide en mouvement sur la surface  $S$ ,  $\frac{d\vec{v}}{dz}$  représente le gradient de vitesse dans la direction normale à l'écoulement. Le coefficient de proportionnalité  $\mu$  est appelé viscosité dynamique ou viscosité absolue et s'exprime en Pa.s ou en Poiseuille (Pl).

### I.1.3.1 La viscosité cinématique

On définit également la viscosité cinématique :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (\text{I.1.7})$$

Elle se mesure en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  ou en stokes ( $1 \text{ St} = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ).

Le tableau I.1.4 présente différentes valeurs de la viscosité pour différents fluides. Par ailleurs, l'influence de la température sur la viscosité est illustrée pour le cas de l'eau dans le tableau I.1.2.

### I.1.3.2 Différents comportements visqueux

Dans la grande majorité des cas, le paramètre  $\mu$  varie avec la vitesse de l'écoulement et/ou la force exercée sur le fluide (voir figure I.1.3).

On distingue ainsi :



Élément	$\mu(\text{Pa}\cdot\text{s})$	$\nu(\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1})$
eau	$10^{-3}$	$10^{-6}$
air	$18,5 \cdot 10^{-6}$	$15,6 \cdot 10^{-6}$
mercure	$1,55 \cdot 10^{-3}$	$0,11 \cdot 10^{-6}$
huile	$1,7 \cdot 10^{-2} - 5,7 \cdot 10^{-2}$	$20 \cdot 10^{-6} - 60 \cdot 10^{-6}$

TABLE I.1.4 – Coefficient de viscosité dynamique et cinématique

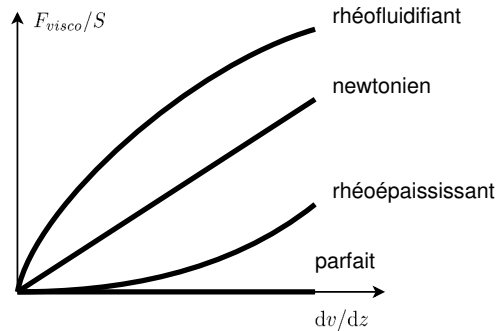


FIGURE I.1.3 – Exemple de rhéogramme

**Les fluides newtoniens** dont la viscosité dynamique  $\mu$  est une constante

**Les fluides rhéofluidifiants** dont la viscosité diminue avec la contrainte qui leur est appliquée

**Les fluides rhéoépaississants** dont la viscosité augmente avec la contrainte qui leur est appliquée

**Les fluides parfaits** ou non visqueux dont la viscosité est nulle. Ces fluides n'existent pas dans la réalité mais permettent des simplifications utiles à la résolution des problèmes courant d'hydraulique. Cette hypothèse simplificatrice sera discutée plus avant dans la suite du cours. Elle se justifie soit car le fluide considéré est très peu visqueux, soit parce que les forces de frottements qui s'exercent sur le fluide sont très faibles devant les autres forces en présence.

#### Pour aller plus loin

On pourra se référer aux ouvrages suivants :

- [8] : description plus générale de la viscosité (qui dépasse les prérequis pour ce cours), description des techniques de mesure de la viscosité d'un fluide, évolution de la viscosité en fonction des conditions ambiantes (température, pression), dissipation d'énergie par viscosité

## I.1.4 La pression de vapeur saturante

La pression de vapeur saturante  $p_v$  est la pression pour laquelle les phases gazeuse et liquide d'une substance sont en équilibre : il y a autant de molécules qui passent de phase liquide à gazeuse que l'inverse sur un laps de temps donné. Une pression supérieure à la pression de vapeur saturante entraîne une transformation du gaz en liquide (liquéfaction). Une pression inférieure entraîne une transformation du liquide en gaz (vaporisation).

Cette notion est particulièrement importante lorsque l'on travaille à des pressions (très) faibles. En effet, lors du déplacement de liquides, une chute de la pression peut entraîner l'apparition de bulles de gaz. Outre les problèmes liés au fait que le transport d'un mélange diphasique

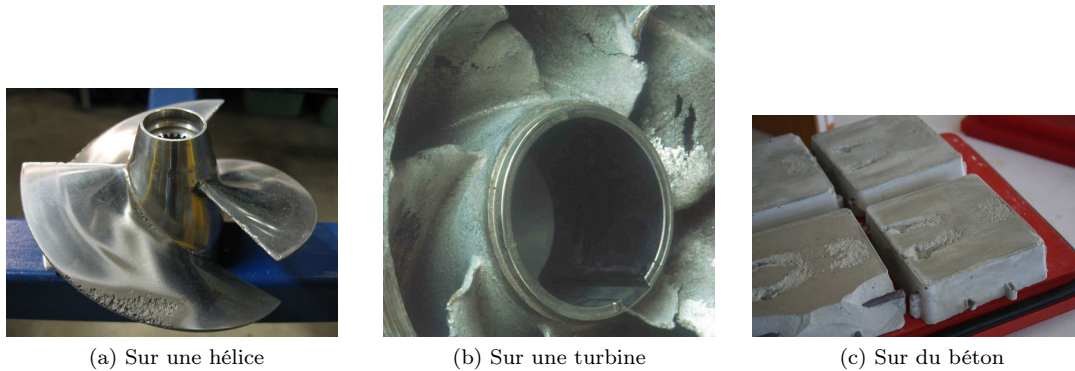


FIGURE I.1.4 – Effet de la cavitation sur différentes installations

(liquide + gaz) est plus complexe que celui d'un corps simple, les changements brutaux d'état s'accompagnent de variations rapides de volume qui peuvent entraîner des détériorations importantes des installations (voir figure I.1.4). Ce phénomène s'appelle la cavitation et l'on cherche à l'éviter notamment pour les installations d'eau potable.

### Pour aller plus loin

On pourra se référer aux ouvrages suivants :

[8] : Méthodes de mesure de la pression de vapeur saturante en fonction de la température, lien entre  $p_v$  et cavitation

## I.1.5 La tension superficielle

Au sein d'un fluide, les molécules sont soumises aux forces d'attraction exercées par les autres molécules. Une molécule dans le fluide est soumise à des forces qui s'équilibrent car elle est entourée d'autres molécules. En revanche, les molécules de la surface libre ne sont pas entourées symétriquement de molécules de même nature. Il en résulte une force non nulle qui s'exerce à la surface libre (voir figure I.1.5).

Les effets de la tension superficielle sont faibles et peuvent être négligés pour les écoulements rencontrés en alimentation en eau potable, en assainissement ou en rivière.

### Pour aller plus loin

On pourra se référer aux ouvrages suivants :

[8] : description plus détaillée de la tension superficielle et mise en équation (qui dépasse les prérequis pour ce cours), introduction des notions de mouillabilité, description des techniques de mesure

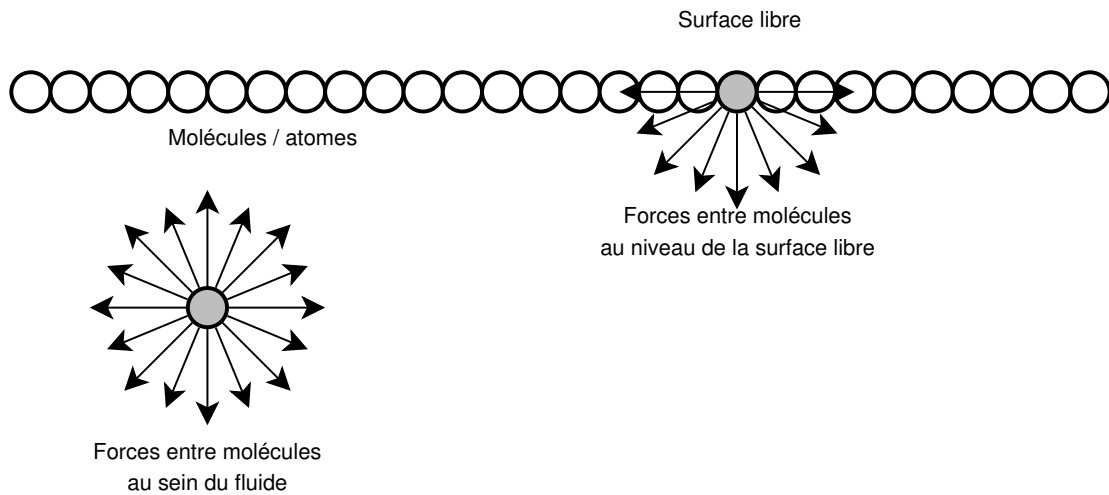


FIGURE I.1.5 – Illustration de la tension superficielle. D'après [17]

## I.1.6 La pression



La pression

### I.1.6.1 Mise en évidence

La pression peut être mise en évidence expérimentalement. Otto Von Guericke (1602 - 1686) a proposé l'une des premières expériences permettant de montrer la notion de pression dans l'air. Il a accolé deux hémisphères rigides et réalisé le vide à l'intérieur. L'Histoire retient qu'il a fallu seize chevaux pour décoller les deux hémisphères. On en déduit que l'air extérieur génère une force qui maintient les hémisphères accolés.

### I.1.6.2 Origine de la pression

Dans un fluide au repos, les interactions entre molécules (collisions, force de Van der Waals, ...) génèrent des vitesses aléatoires de déplacement des molécules dont la moyenne dans le temps est nulle. Ce déplacement est appelé le mouvement Brownien et augmente avec la température. Lorsqu'on place une paroi dans ce fluide, les molécules dont le vecteur vitesse est orienté vers la paroi vont « heurter » celle-ci et « rebondir » à l'intérieur du fluide. La force exercée par la paroi pour faire rebondir les molécules est l'opposée de la force de pression qui correspond à la totalité des chocs créés par les molécules sur la paroi (voir figure I.1.6).

$$\vec{dF} = P \vec{n} dS \quad (\text{I.1.8})$$

où  $P$  est la pression dans le fluide au droit de la plaque,  $dS$  la surface de la plaque et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal à la plaque orienté du fluide vers la plaque. La pression est donc une grandeur scalaire qui s'exerce dans toutes les directions. La force résultante d'une pression sur une paroi est toujours perpendiculaire à cette paroi. Cette formulation différentielle a l'avantage d'être toujours valable, quelle que soit la taille et la forme de la paroi (y compris pour des parois

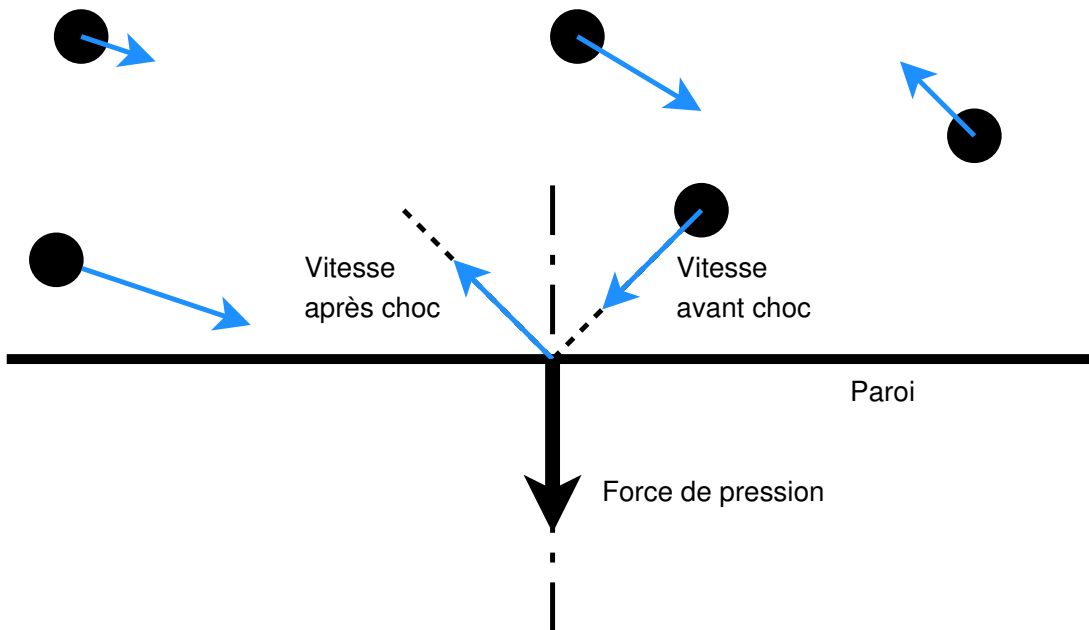


FIGURE I.1.6 – Origine moléculaire de la pression

courbes). La force de pression qui intéresse généralement l'hydraulicien est la force totale qui correspond à l'intégration de la force élémentaire sur toute la surface :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}_{\text{pression}} &= \int_S \overrightarrow{dF} \\ &= \int_S P \overrightarrow{n} dS\end{aligned}\quad (\text{I.1.9})$$

avec dans le cas général  $P$  et  $\overrightarrow{n}$  qui dépendent de la position le long de  $S$ .

### Unités de mesure

Bien que l'unité légale soit le Pascal ( $1\text{Pa} = 1\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$ ), une unité fréquemment employée est le Bar ( $1\text{Bar} = 10^5\text{Pa}$ ). Par ailleurs, on rencontre des unités de pression exprimée en sous forme de hauteur piézométrique :

- le mètre de colonne d'eau :
  - $1\text{mCE} \rightarrow 1\text{mCE} \times \rho_{\text{eau}} \times g = 9,81 \cdot 10^3\text{Pa}$
  - $1\text{Bar} = 10^5\text{Pa} \rightarrow 10^5 / \rho_{\text{eau}} \times g = 10,19\text{mCE}$
- le millimètre de mercure :
  - $1\text{mmHg} \rightarrow 10^{-3}\text{mHg} \times \rho_{\text{mercure}} \times g = 1,33 \cdot 10^2\text{Pa}$
  - $1\text{Bar} = 10^5\text{Pa} \rightarrow 1000 \cdot 10^5 / \rho_{\text{mercure}} \times g = 752,5\text{mmHg}$

### Pour aller plus loin

On pourra se référer aux ouvrages suivants :

[8] : description détaillée des techniques de mesure de pression

# Chapitre I.2

## Description des écoulements

### I.2.1 Écoulement en charge / à surface libre

#### I.2.1.1 Expérience

Une conduite est placée après la vanne de vidange d'un réservoir et débouche à l'air. Le réglage de la vanne permet de contrôler le débit  $Q$  qui y circule.

#### I.2.1.2 Observations et analyse

A petit débit, l'eau coule sur le fond de la conduite mais n'atteint pas le haut : il y a une interface entre l'air et l'eau. Si l'on fait varier légèrement le débit, le niveau d'eau évolue en réponse. On parle d'écoulement à surface libre (voir figure I.2.2a).

A fort débit, la conduite est totalement remplie d'eau. Il n'y a plus d'air qui y circule. Une augmentation de débit se traduit par une augmentation de la pression dans la conduite. On parle d'écoulement en charge (voir figure I.2.2b).

### I.2.2 Écoulement laminaire / turbulent

#### I.2.2.1 Expérience de Reynolds

Un premier réservoir d'eau de niveau constant est vidangé par un tuyau. Une vanne placée à l'extrémité du tuyau permet de faire varier le débit  $Q$  et donc la vitesse  $v$  de l'écoulement. Un deuxième tuyau est placé à l'intérieur du réservoir. Il contient un colorant et permet d'obtenir un mince filet fluide coloré injecté au centre du tuyau (voir figure I.2.3).

#### I.2.2.2 Observations et analyse

Quand la vitesse d'écoulement est faible, le filet coloré reste bien défini, rectiligne et parallèle à l'axe du tuyau (voir figure I.2.4a). La vitesse de l'écoulement en un point reste constante dans le temps (en l'absence de variation des conditions expérimentales) (voir figure I.2.4b). Le régime d'écoulement est dit laminaire. L'écoulement laminaire est rare dans le domaine de l'hydraulique à surface libre en cours d'eau. En revanche, il est rencontré dans l'alimentation en eau potable et de l'assainissement.

Quand la vitesse est plus importante, le filet coloré se mélange au fluide. Il devient ondulé et très instable. Des tourbillons de différentes tailles apparaissent (voir figure I.2.5a). Le régime est dit turbulent. La vitesse fluctue dans le temps et en l'absence de variation des conditions expérimentales, seule la moyenne temporelle reste constante (voir figure I.2.5b).

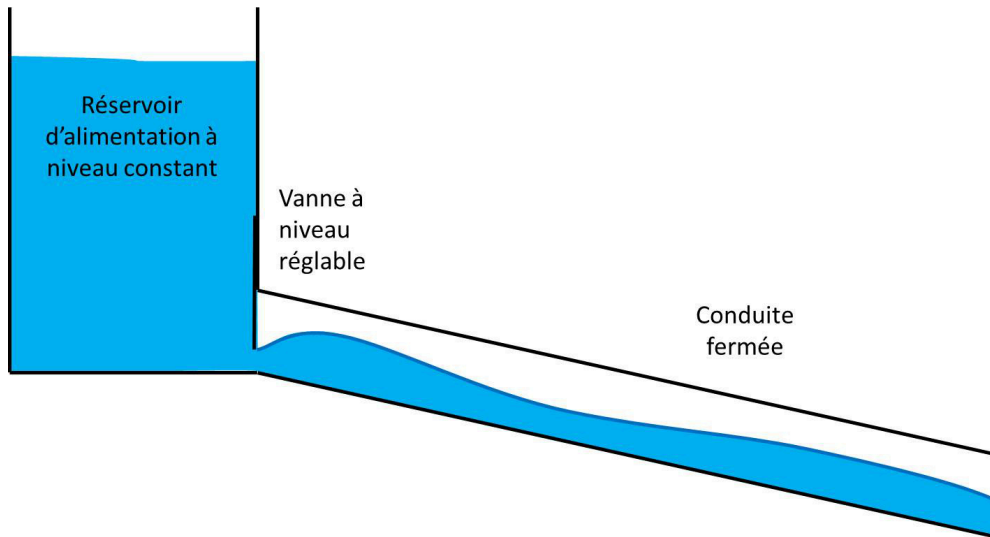
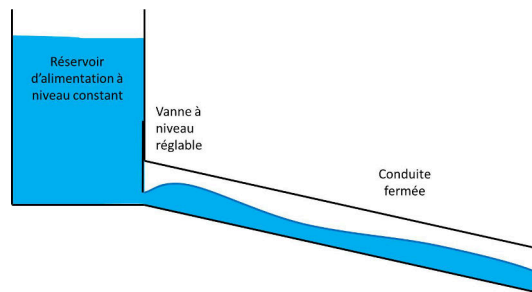
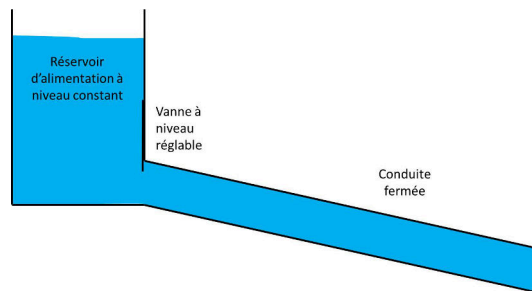


FIGURE I.2.1 – Schéma expérimental



(a) Écoulement à surface libre



(b) Écoulement en charge

FIGURE I.2.2 – Comparaison entre écoulement en charge et écoulement à surface libre

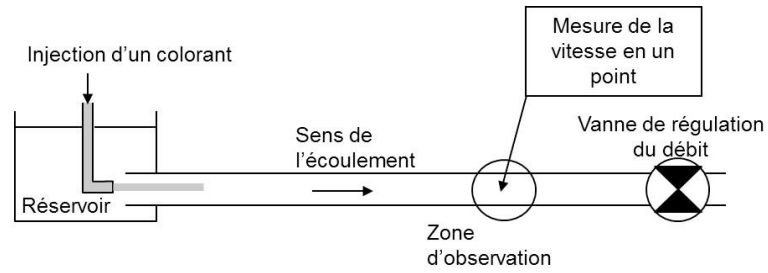


FIGURE I.2.3 – Schéma expérimental

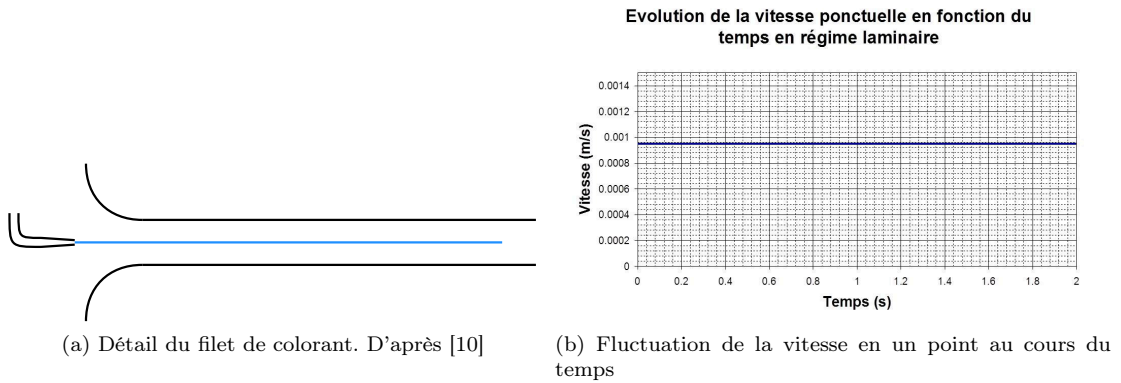


FIGURE I.2.4 – Écoulement laminaire

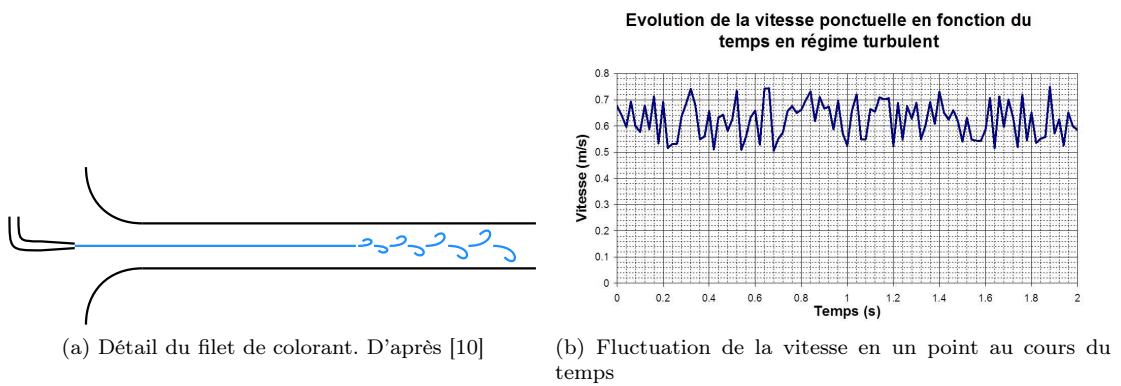
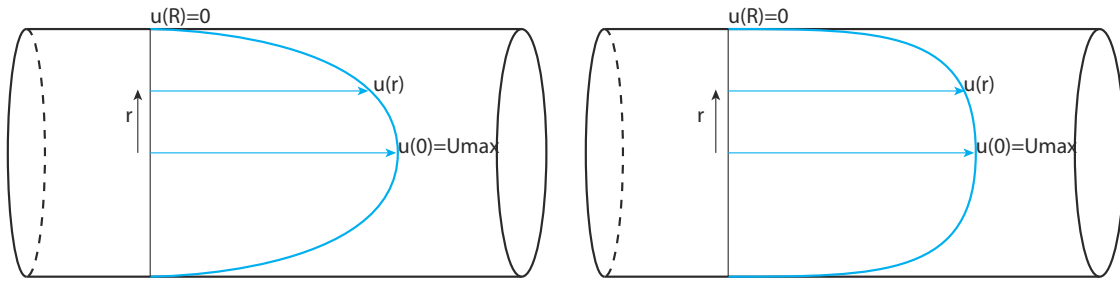


FIGURE I.2.5 – Écoulement turbulent



(a) Profil de vitesse pour un écoulement laminaire en conduite circulaire (b) Profil de vitesse pour un écoulement turbulent en conduite circulaire

FIGURE I.2.6 – Comparaison des profils de vitesse en régime laminaire et turbulent

Le nombre de Reynolds  $Re$  (voir partie I.2.4.2) permet de caractériser ces écoulements.

La turbulence se caractérise donc par la création de tourbillons. Ils mélangent les matières dissoutes dans l'eau, comme par exemple le chlore dans un réseau d'eau potable ou le rejet d'une station de traitement des eaux usées dans une rivière.

Dans le cas d'un écoulement turbulent, on note toutefois qu'il faut une certaine distance à l'injection pour que la turbulence soit pleinement visible sur l'écoulement de colorant. En effet, il faut une distance pour que la turbulence s'établisse. Cette longueur d'établissement ( $L_e$ ) peut être estimée à partir des formulations suivantes :

**pour**  $Re < 100$  :  $\frac{L_e}{D} = 0.6$

**pour**  $100 < Re < 2000$  :  $\frac{L_e}{D} = 0.06Re$  à  $0.03Re$

**pour**  $Re > 2000$  :  $\frac{L_e}{D} = 0.6Re^{0.25}$  à  $0.8Re^{0.25}$

où  $D$  est le diamètre de la conduite.

De manière générale, on considère que le régime turbulent est pleinement établi pour une distance comprise en 50 et 100 fois le diamètre de la conduite.

### I.2.2.3 Profil des vitesses dans une section circulaire en charge

Dans le cas d'un écoulement permanent, le profil des vitesses dans une section est dépendant de l'intensité de la vitesse et de la géométrie de l'ouvrage.

Pour les écoulements laminaires, seule la viscosité est responsable de la non-uniformité des vitesses. Les équations permettent de démontrer (et c'est confirmé expérimentalement) que le profil de vitesse est parabolique avec un maximum au centre et une vitesse nulle à la paroi (voir figure I.2.6a).

Deux types d'écoulements turbulents dans les conduites réelles (présentant des aspérités) existent :

- conduite hydraulique lisse : l'écoulement est séparé de la paroi par un film laminaire,
- conduite hydraulique rugueuse : la sous-couche laminaire disparaît et la turbulence arrive jusqu'à la paroi.

Décrivons le profil de l'écoulement le long d'un diamètre de conduite hydraulique lisse. On distingue habituellement deux régions : une région centrale qui correspond à plus de 90% de l'écoulement et une région voisine de la paroi.

Dans la région centrale, très aplatie, la vitesse est indépendante des aspérités de la paroi et dépend peu de la viscosité. L'écoulement est formé de tourbillons importants, allongés, contenant des tourbillons plus petits. L'intensité de la turbulence est à peu près constante dans ce domaine.

Dans la zone voisine de la paroi, la vitesse passe d'une valeur élevée à zéro sur une distance relativement faible. Le fort gradient de vitesse qui en résulte impose au fluide des contraintes



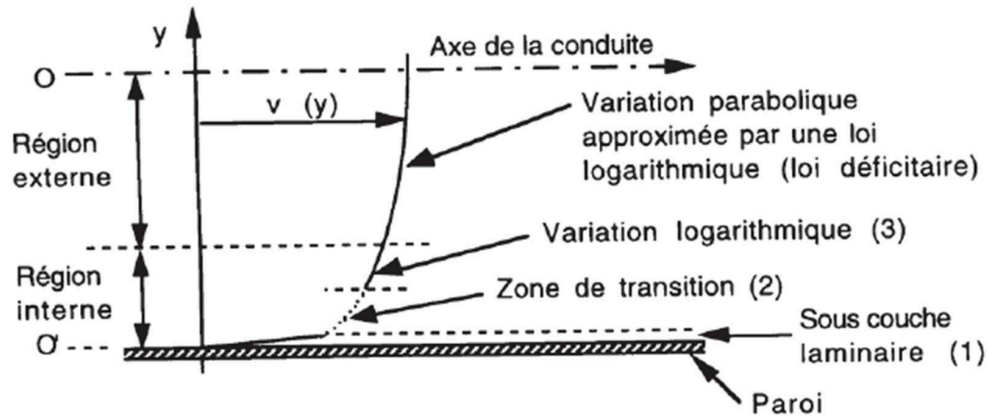


FIGURE I.2.7 – Profil de vitesse et répartition des zones de turbulence dans une conduite circulaire en régime turbulent

de cisaillement élevées et donc d'intenses frottements visqueux. On comprend donc que la dissipation d'énergie qui entraîne une partie de la perte de charge ait lieu principalement dans cette zone.

Pour des conduites hydrauliquement rugueuse, les couches (1) à (3) tendent à disparaître pour générer un profil quasi plat.

La turbulence est mesurée par le nombre de Reynolds. Dans le cas des conduites circulaires le domaine laminaire et turbulent est différencié par une valeur de Reynolds comprise entre 2000 et 4000. Entre les deux types d'écoulement il y a une zone de transition, c'est-à-dire une zone d'incertitude où il faut faire preuve de beaucoup de réserve.

### Pour aller plus loin

On pourra se référer aux ouvrages suivants :

[8] : description détaillée des régimes d'écoulements en lien avec le profil de vitesse

## I.2.3 Les forces

Les forces qui agissent sur un volume fini de fluide sont de deux types :

- les forces de volumes,
- les forces de surfaces.

### I.2.3.1 Les forces de volumes

Elles se composent des forces suivantes :

- Les forces de pesanteur provenant de la gravité.
- Les forces d'accélération pure : elles proviennent de la variation de la vitesse  $\vec{v}$  d'un fluide de masse  $M$  dans le temps :

$$\vec{F}_{acc\ pure} = M \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad (I.2.1)$$

Prenons par exemple deux réservoirs à la même hauteur, dont l'un est vide et l'autre plein, reliés par une conduite de diamètre constant, horizontale et munie d'une vanne. A l'ouverture de la vanne, il se produit un écoulement. La variation de la vitesse dans le temps crée au sein de l'écoulement une force d'accélération pure.

- Les forces d'accélération convective : Elles proviennent de la variation de la vitesse  $\vec{v}$  dans l'espace  $(O, x, y, z)$  :

$$\overrightarrow{F_{acc\ convective}} = M \left( v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) = M \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{v}) \quad (\text{I.2.2})$$

Prenons une conduite dont l'écoulement ne varie pas dans le temps :  $\partial \vec{v} / \partial t = 0$ . L'écoulement étant permanent, le débit est identique en tout point de la canalisation. Or, si la surface A est supérieure à la surface B alors la vitesse en B  $\vec{v}_B$  est supérieure à la vitesse en A  $\vec{v}_A$ . Cette variation de vitesse va engendrer une accélération qui va générer une force d'accélération convective.

### I.2.3.2 Les forces de surfaces

Elles se composent des forces suivantes :

- Les forces de pression :

$$d\vec{F} = P \times \vec{n} \times dS \quad (\text{I.2.3})$$

où  $d\vec{F}$  est la force élémentaire de pression,  $P$  la pression exercée par le fluide,  $dS$  l'élément de surface sur lequel s'exerce la pression et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal à  $dS$  et orienté du fluide vers la surface.

- Les forces de frottement visqueux : Nous avons vu précédemment qu'un fluide, dont les particules sont en mouvement relatif, génèrent des forces de frottement dues à la viscosité. La force de frottement s'écrit :

$$\overrightarrow{F_{visco}} = S\mu \frac{d\vec{v}}{dz} \quad (\text{I.2.4})$$

- Les forces générées par la turbulence : La turbulence joue un rôle majeur dans l'écoulement des fluides, spécialement en hydraulique avec pour effet de « freiner » l'écoulement. La prise en compte complète de la turbulence impose d'utiliser des équations mathématiques complexes nécessitant une capacité de calcul élevée. Dans la majorité des cas, il est toutefois possible de ne considérer qu'un effet moyen de la turbulence via la prise en compte de forces de frottements supplémentaires.

#### Pour aller plus loin

On pourra se référer aux ouvrages suivants :

[8] : description détaillée des techniques de mesure de pression

## I.2.4 Importance des différentes forces - utilité des nombres adimensionnels

En général, l'hydraulicien doit s'occuper de l'effet de la force dominante afin d'appréhender de manière simplifiée le fonctionnement du système. Dans la plupart des problèmes d'écoulement de fluides, la pesanteur, la viscosité et l'élasticité sont prépondérantes, mais pas toujours simultanément. L'importance relative des différentes forces agissant sur un fluide est calculée par des nombres adimensionnels représentant les rapports entre ces forces. Pour la suite, on introduit les notations :

- $M$  la masse ;
- $a$  l'accélération du fluide ;
- $L_c$  la longueur caractéristique de l'écoulement, cette grandeur dépend du type d'écoulement considéré (rayon ou diamètre pour une conduite circulaire, diamètre hydraulique pour un écoulement à surface libre, ...);

- $S$  la surface caractéristique de l'écoulement ;
- $g$  l'accélération de la pesanteur.

Une analyse dimensionnelle permet de simplifier ces rapports en fonction des propriétés du fluide ( $\rho, \mu, E$  : module d'élasticité du fluide,  $\sigma$  : tension de surface du fluide) et des grandeurs caractéristiques de l'écoulement ( $P, v, L_c, S, \tau$  : la force de frottement par unité de surface). Cette analyse dimensionnelle est basée sur le théorème de Vaschy-Buckingham ou théorème de  $\pi$  (voir [10, 6] pour plus de détails).

### I.2.4.1 Le Nombre d'Euler

Le nombre d'Euler  $Eu$  est le rapport entre les forces d'inertie  $Ma$  et les forces de pression  $PS$  :

$$Eu = \frac{Ma}{PS} = \frac{\rho v^2}{P} \quad (\text{I.2.5})$$

En effet :

- $M = \rho L_c^3$
- $a = \frac{v^2}{L_c}$
- $S = L_c^2$

Ce rapport est utilisé lorsqu'on calcule les forces (statiques et dynamiques) de l'eau sur une paroi ou un ouvrage et met en évidence l'effet prépondérant entre la pression statique et la pression dynamique.

### I.2.4.2 Le nombre de Reynolds

Le Nombre de Reynolds  $Re$  est le rapport entre les forces d'inertie  $Ma$  et les forces de viscosité  $\tau S$  :

$$Re = \frac{Ma}{\tau S} = \frac{\rho v L_c}{\mu} \quad (\text{I.2.6})$$

En effet :

$$- \tau = \frac{F_{frott}}{S} = \frac{\mu v}{L_c}$$

Ce rapport permet de distinguer le régime laminaire et turbulent (voir partie I.2.2). L'écoulement est laminaire si le nombre de Reynolds  $Re$  est inférieur à une valeur seuil. Dans le cas d'un écoulement dans une conduite circulaire, la longueur caractéristique  $L_c$  est alors le diamètre de la conduite et

- $Re > 4000$  : écoulement turbulent
- $Re < 2000$  : écoulement laminaire
- La gamme  $2000 < Re < 4000$  correspond à la transition d'un régime à l'autre.

La connaissance du régime d'écoulement est primordiale pour connaître le phénomène à l'origine de la principale dissipation d'énergie lors de l'écoulement du fluide.

### I.2.4.3 Le nombre de Cauchy

Le nombre de Cauchy  $Ca$  est le rapport entre les forces d'inertie ( $Ma$ ) et les forces d'élasticité ( $ES$ ) :

$$Ca = \frac{Ma}{ES} = \frac{\rho v^2}{E} \quad (\text{I.2.7})$$

Ce nombre est peu utilisé en hydraulique dans la mesure où les fluides rencontrés sont considérés comme incompressibles.

#### I.2.4.4 Le nombre de Weber

Le nombre de Weber  $We$  est le rapport entre les forces d'inertie ( $Ma$ ) et les forces de tension superficielle ( $\sigma L_c$ ) :

$$We = \frac{Ma}{\sigma L_c} = \frac{\rho v^2 L_c}{\sigma} \quad (\text{I.2.8})$$

Ce nombre est peu utilisé en hydraulique dans la mesure où les effets de la tension superficielle sont très faibles devant les autres forces en présence.

## Chapitre I.3

# Relation fondamentale de l'hydrostatique

L'équation fondamentale de la statique des fluides (ou de l'hydrostatique) permet de connaître l'évolution de la pression en fonction de la position dans un fluide quelconque.



Statique des fluides  
Démonstration de l'équation de la statique des fluides

### I.3.1 Démonstration

On considère un petit volume d'un fluide au repos (= sans écoulement). Pour la simplicité de la démonstration mathématique, on considère un cube de dimensions  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  (voir figure I.3.1).

Ce cube est soumis aux forces suivantes :

**Son poids** Par définition, le poids est égal à :

$$\begin{aligned}\vec{P}_o &= -mg\vec{e}_z \\ &= -\rho Vg\vec{e}_z \\ &= -\rho dx dy dz g\vec{e}_z\end{aligned}\quad (\text{I.3.1})$$

**Les forces de pression.** Ces forces sont définies par :  $F = P \times S$ . On obtient donc :

$$\vec{F}_p(x) = P(x) \times dydz\vec{e}_x = P(x) dydz\vec{e}_x \quad (\text{I.3.2a})$$

$$\vec{F}_p(x+dx) = -P(x+dx) \times dydz\vec{e}_x = -\left[P(x) + \frac{\partial P}{\partial x}dx\right] dydz\vec{e}_x \quad (\text{I.3.2b})$$

$$F_p(y) = P(y) \times dx dz\vec{e}_y = P(y) dx dz\vec{e}_y \quad (\text{I.3.2c})$$

$$\vec{F}_p(y+dy) = -P(y+dy) \times dx dz\vec{e}_y = -\left[P(y) + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right] dx dz\vec{e}_y \quad (\text{I.3.2d})$$

$$F_p(z) = P(z) \times dx dy\vec{e}_z = P(z) dx dy\vec{e}_z \quad (\text{I.3.2e})$$

$$\vec{F}_p(z+dz) = -P(z+dz) \times dx dy\vec{e}_z = -\left[P(z) + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right] dx dy\vec{e}_z \quad (\text{I.3.2f})$$

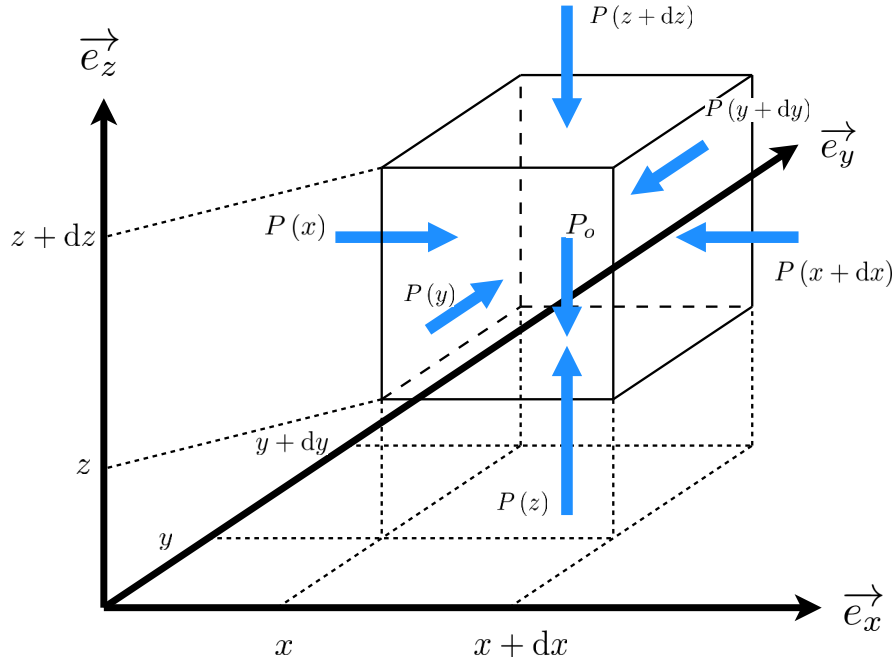


FIGURE I.3.1 – Définition du volume de contrôle pour la relation fondamentale de l'hydrostatique

On applique le principe fondamental de la dynamique :  $\sum \overrightarrow{Force} = m \times \overrightarrow{a}$ . Le fluide étant au repos, la vitesse est nulle en tout point et l'accélération également. On en déduit que la somme des forces est nulle :

$$\begin{aligned} \sum \overrightarrow{Force} &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{Fp}(x) + \overrightarrow{Fp}(x + dx) + \\ \overrightarrow{Fp}(y) + \overrightarrow{Fp}(y + dy) + \\ \overrightarrow{Fp}(z) + \overrightarrow{Fp}(z + dz) &= -\overrightarrow{P_o} \end{aligned} \quad (I.3.3)$$

En séparant les composantes dans chaque direction, on trouve :

$$\begin{aligned} P(x) dydz\overrightarrow{e_x} - \left[ P(x) + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right] dydz\overrightarrow{e_x} &= \overrightarrow{0} \\ P(y) dx dz\overrightarrow{e_y} - \left[ P(y) + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx dz\overrightarrow{e_y} &= \overrightarrow{0} \\ P(z) dx dy\overrightarrow{e_z} - \left[ P(z) + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right] dx dy\overrightarrow{e_z} &= -\rho dx dy dz g\overrightarrow{e_z} \end{aligned} \quad (I.3.4)$$

En simplifiant et en regroupant les termes, on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (I.3.5a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (I.3.5b)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho \times g \quad (I.3.5c)$$

On en déduit donc que la pression ne varie pas dans le plan horizontal et qu'elle varie proportionnellement à  $-\rho g$  dans la direction verticale. Attention, ceci n'est vrai que parce que l'axe  $\vec{e}_z$  est défini vers le haut. Dans cas contraire, le signe  $-$  disparaît de (I.3.5c).

### I.3.2 Application aux fluides incompressibles

Par définition, la masse volumique d'un fluide incompressible est constante dans le temps et en tout point de l'espace. L'intégration de (I.3.5c) donne donc :  $P + \rho g z = \text{Cste}$ . Cette constante est généralement notée  $p^*$

On divise généralement l'équation précédente par  $\rho g$  :

$$\frac{p^*}{\rho g} = \frac{P}{\rho g} + z = \text{Cste} \quad (\text{I.3.6})$$

Ainsi, la constante  $p^*/\rho g$  est homogène à une longueur ce qui permet une représentation et une interprétation plus aisée. Le terme  $p^*/\rho g$  est appelé piézométrie ou hauteur piézométrique. Dans ce cas, la pression  $P/\rho g$  est mesurée en hauteur de colonne du fluide (de masse volumique  $\rho$ ).

#### Définition des pressions absolue et relative

La pression absolue est définie par rapport à la pression dans le vide qui correspond à la pression nulle. On en déduit donc que la pression minimale possible est zéro.

Prenons par exemple un réservoir où la surface libre est à la pression atmosphérique ( $P_{atm}$ ) (voir figure I.3.2). En écrivant l'équation de l'hydrostatique par rapport à un plan de référence, on a :  $P + \rho g z = \text{Cste}$ . Pour les points 1 et 2, on a :  $P_{abs,1} + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2 = \text{Cste}$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} P_{abs,1} &= P_2 + \rho g (z_2 - z_1) \\ &= P_{atm} + \rho g (z_2 - z_1) \\ &= P_{atm} + \rho g h \end{aligned} \quad (\text{I.3.7})$$

avec  $P_{atm} = 10^5 \text{Pa}$ . La pression absolue sous une hauteur de fluide  $h$  est ainsi donnée par l'équation (I.3.7). On note une part constante quelque soit  $h$  ( $P_{atm}$  due à la pression atmosphérique) et une part dépendant de la profondeur ( $\rho g h$ ). On obtient ainsi les profils de pression présentée à la figure I.3.2.

Dans la pratique, on préfère souvent mesurer par rapport à la pression atmosphérique ( $P_{atm}$ ). En effet, celle-ci varie dans le temps (en fonction des conditions météorologiques) ce qui complexifie sa prise en compte. Par ailleurs, dans les applications rencontrées par l'hydraulicien, le débit transitant dans une conduite est souvent fonction de la différence de pression absolue entre l'amont et l'aval imposée par des réservoirs. Les réservoirs que nous étudions étant toujours connecté à l'air libre, la pression atmosphérique est identique à l'amont et à l'aval, il est donc possible de la négliger dans la mesure ou la différence est nulle.

Pour travailler en pression relative, il faut soustraire la pression atmosphérique  $P_{atm}$  à la pression absolue. Dans ce cas, la pression au point 1 devient :  $P_{rel,1} = P_{abs,1} - P_{atm} = \rho g (z_2 - z_1) = \rho g h$ . La pression en 1 est alors mesurée en pression relative par rapport à la pression atmosphérique. La pression relative se définit par rapport à une référence que l'on choisi le plus souvent égale à la pression atmosphérique. Cela consiste finalement à faire une translation du repère des pressions. La pression nulle est donc équivalente à la pression atmosphérique ( $P_{atm}$ ). La pression minimale correspond donc à :  $-P_{atm}$  (pression atmosphérique négative).

La plupart des instruments de mesure fournissent une pression relative appelée également pression manométrique.

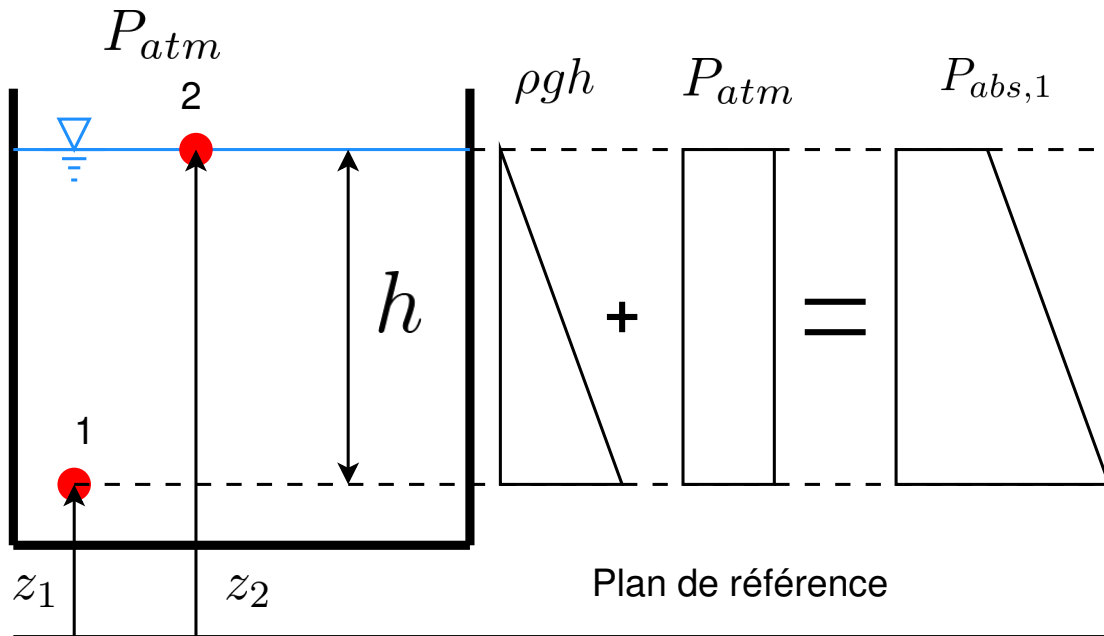


FIGURE I.3.2 – Illustrations de pressions relative et absolue

### I.3.3 Application aux fluides compressibles

Contrairement aux liquides, les gaz sont fortement compressibles. La variation de la masse volumique  $\rho$  dépend de pression  $P$  et de la température  $T$  :  $\rho = f(P, T)$ . S'il s'agit d'un gaz parfait, nous avons :  $P/\rho = rT$ ,  $r$  étant une constante. On peut ainsi définir à l'altitude  $z_0$  :  $P_0/\rho_0 = rT_0$ , ce qui permet de calculer la constante  $r$ . En reprenant l'équation de l'hydrostatique, on obtient :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\rho_0 \times g \frac{T_0}{P_0} \frac{P}{T} \quad (\text{I.3.8})$$

Si on se place à température constante  $T = T_0$ , l'équation peut ainsi s'écrire :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0 g}{P_0} dz \Rightarrow P = P_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g}{P_0} (z - z_0)\right) \quad (\text{I.3.9})$$

Dans le cas de l'air,  $P_0 = 1,013.10^5 \text{Pa}$  et  $\rho_0 = 1,20 \text{kg.m}^{-3}$ , l'équation précédente permet de caractériser l'évolution de la pression dans l'air en fonction de l'altitude  $z$  :

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g}{P_0} (z - z_0)\right) \quad (\text{I.3.10})$$

#### Pour aller plus loin

On pourra se référer aux ouvrages suivants :

**[8]** : application plus poussée de la relation fondamentale de la statique des fluides aux fluides compressibles, en dehors de la simplification « gaz parfait »



# Chapitre I.4

## Action de la pression

Dans le métier d'hydraulicien, les fluides étudiés (l'eau dans la très grande majorité des cas) est en interaction avec des solides : les parois des conduites, les vannes, les parois des réservoirs, le fond du lit, ... La pression exerce des forces sur ces éléments et vice-versa. La caractérisation de ces forces est essentielle pour déterminer la résistance des structures chargées de contenir l'eau dans le système prévu (réseau d'eau, réservoir, ...). Par ailleurs, on verra que la détermination de ces forces de pression est également nécessaire dans les configurations avec écoulement car il existe des relations entre vitesse de l'écoulement et pression moyenne dans le fluide.

### I.4.1 Forces résultantes de la pression

Les forces hydrostatiques sur une surface proviennent des forces de pression du fluide agissant sur cette surface. Il convient donc, dans un premier temps, de caractériser la pression du fluide sur une surface (voir figure I.4.1). Pour cela, on a besoin de :

- l'intensité : la pression dépend de la profondeur  $h$  sous la surface libre. Elle est calculée par la relation :  $P = \rho gh$ ,
- la zone d'application : la pression s'applique sur une surface  $dS$ ,
- la direction : la force de pression est toujours perpendiculaire à la surface d'application.

Le calcul des forces hydrostatiques sur une surface quelconque plongée dans l'eau, consiste à déterminer les trois caractéristiques suivantes :

- l'intensité de la force qui s'applique sur la surface  $dS$  :  $dF = PdS = \rho gh dS$ ,
- le point d'application de la force,
- la direction.

Dans le but de fournir des résultats facilement applicables, on distingue les surfaces planes et les surfaces gauches.

#### I.4.1.1 Résultantes des forces de pression sur des surfaces planes

On s'intéresse aux surfaces planes de forme quelconque entièrement immergée dans l'eau (voir figure I.4.2). On définit un repère  $(x, y)$  dont l'axe  $x$  longe la surface libre et l'axe  $y$  est dirigé vers le bas et passant par la surface plane. Le point G  $(x_G, y_G)$  est le centre de gravité de la section. On définit le repère  $(\xi, \eta)$  comme étant une translation du repère  $(x, y)$  centré en G.

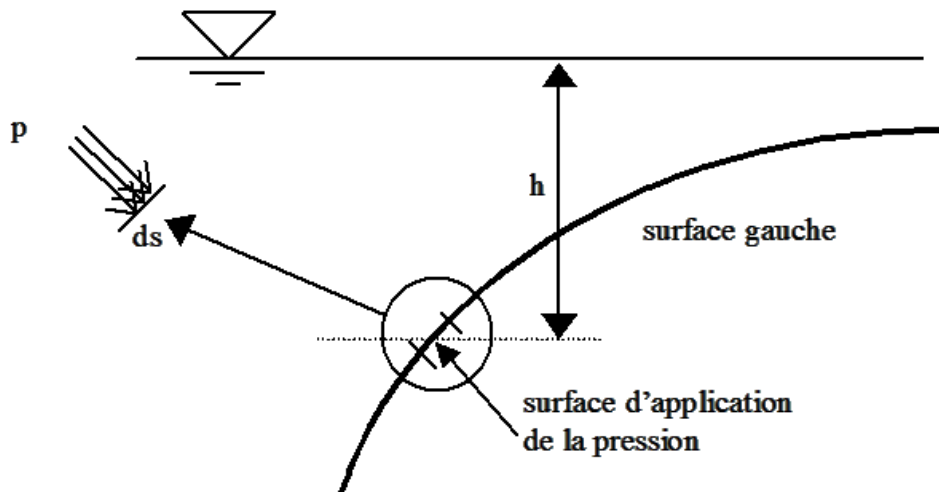


FIGURE I.4.1 – Illustration de l'action de la pression sur un objet

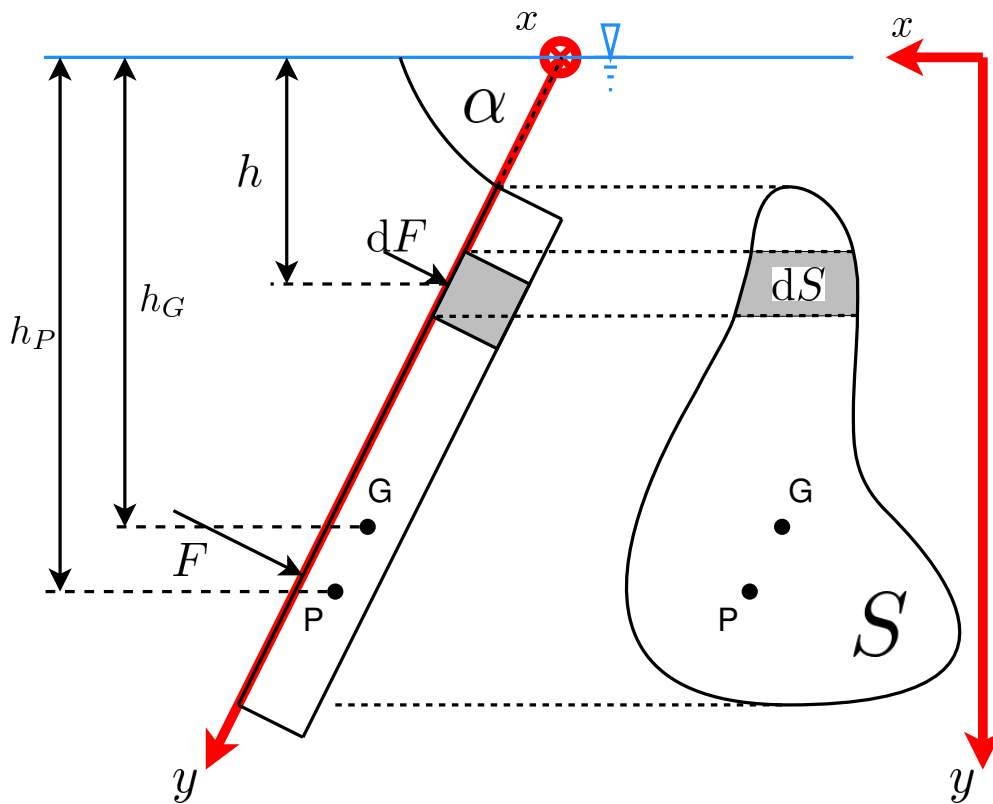


FIGURE I.4.2 – Schéma de détermination des efforts sur une paroi plane. Illustration d'après [5]

#### I.4.1.1.1 Intensité de la force de pression

L'intensité de la force résultante agissant sur la surface  $S$  est définie par l'intégrale des forces de pression s'exerçant sur une surface élémentaire :

$$F = \int_S dF = \rho g \int_S h dS \quad (\text{I.4.1})$$

On fait ici l'hypothèse d'un fluide incompressible. Si ce n'est pas le cas, il faut tenir compte de la variation de  $\rho$  avec la position. On peut montrer que :

$$\int_S h dS = h_G S \quad (\text{I.4.2})$$

L'intégrale des forces de pression s'écrit donc :  $F = \rho g h_G S$ , où  $h_G$  est la profondeur du centre de gravité de la paroi immergée et  $S$  est la surface de la paroi immergée.

#### I.4.1.1.2 Point d'application

Le point d'application de la force résultante des pressions  $P(x_P, y_P)$  est appelé centre de pression ou de poussée. La position de ce point est définie telle que le moment de la force résultante par rapport à un point  $O$  arbitraire soit égal à l'intégrale des moments élémentaires par rapport au même point :

$$\vec{OP} \wedge \vec{F} = \int_S \vec{OM} \wedge d\vec{F} \quad (\text{I.4.3})$$

où le point  $M$  balaye la surface  $S$ . Un choix judicieux du point  $O$  permet de simplifier le calcul de la position du point  $P$ .

On peut montrer que la distance entre la surface libre et le centre de poussée  $P$  (dans la direction parallèle à la plaque) est donnée par la relation :

$$y_P = y_G + \frac{I_{\xi\xi}}{y_G \times S} \quad (\text{I.4.4})$$

où  $I_{\xi\xi}$  est le moment quadratique de la surface et  $y_G$  est la distance entre la surface libre et le centre de gravité de la paroi immergée dans la direction parallèle à la plaque (voir figure I.4.2).

Dans le cas de formes géométriques simples, le centre de gravité, la surface et le moment quadratique sont « facilement » calculables. Le tableau A.1 récapitule ces formules dans des cas simples.

#### I.4.1.1.3 Direction

La direction de la force résultante est toujours perpendiculaire à la surface sur laquelle la pression s'exerce et orientée depuis le fluide vers la surface.

### I.4.1.2 Résultantes des forces de pression sur des surfaces gauches

Dans le cas des surfaces gauches, la complexité de la surface considérée rend impossible l'établissement de formules immédiatement applicables. Toutefois, il existe deux méthodologies qui permettent le calcul de la résultante des forces de pression sur une surface gauche : l'intégration directe ou le bilan des forces à l'équilibre.

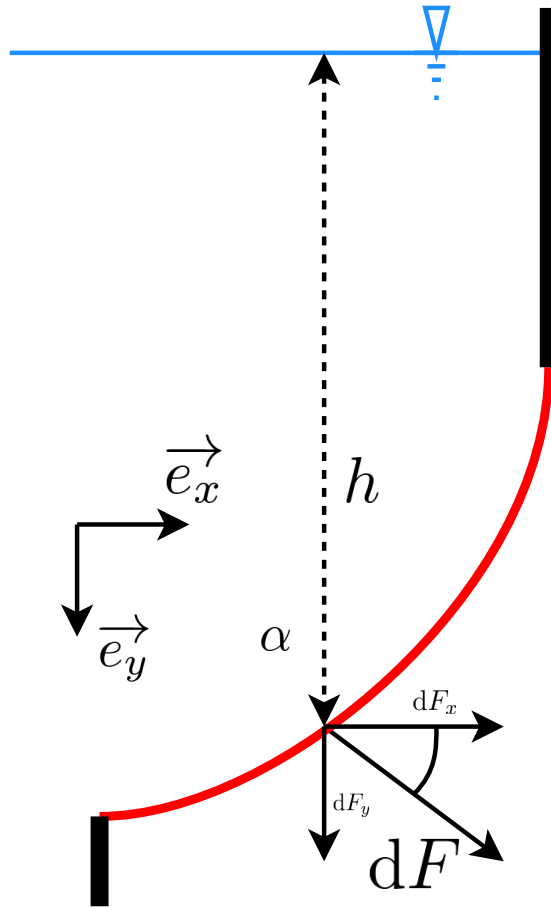


FIGURE I.4.3 – Représentation des composantes de la force de poussée sur une paroi gauche. Illustration d'après [5]

#### I.4.1.2.1 Intégration directe

Cette approche mathématique consiste à prendre la définition mathématique de la force de pression élémentaire  $d\vec{F}$  et à l'intégrer sur la paroi (voir figure I.4.3) :

$$\vec{F} = \int_{\text{paroi}} d\vec{F} \quad (\text{I.4.5})$$

Cette méthode permettant le calcul de la force résultante  $\vec{F}$  sur une paroi gauche consiste à décomposer la force élémentaire  $d\vec{F}$  suivant les axes  $x$  et  $y$  :  $d\vec{F} = dF_x \vec{e}_x + dF_y \vec{e}_y$ . L'évaluation des projections de  $d\vec{F}$  suivant  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ , peut se faire de la manière suivante :

- $dF_x = \cos(\alpha) P dS = \rho g h \cos(\alpha) dS$
- $dF_y = \sin(\alpha) P dS = \rho g h \sin(\alpha) dS$

L'intégration de  $d\vec{F}_x$  et  $d\vec{F}_y$  sur toute la surface de l'élément courbe permet d'évaluer la force résultante  $\vec{F}$ . Compte tenu de la surface courbe, l'angle  $\alpha$  est variable, ce qui complique le calcul de l'intégrale notamment du fait du lien entre  $\alpha$  et  $h$ . Toutefois, ce calcul mathématique reste réalisable pourvu que l'on soit capable de décrire la forme de la surface.

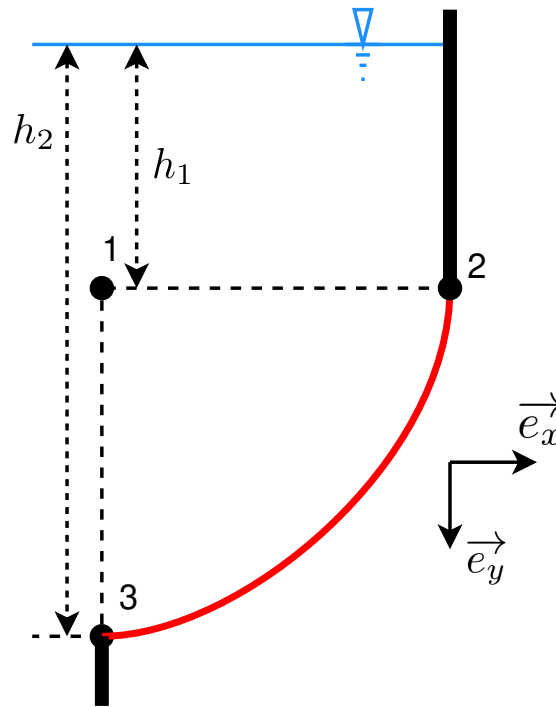


FIGURE I.4.4 – Décomposition de la surface gauche pour le calcul de la résultante par le bilan des forces à l'équilibre. Illustration d'après [5]

#### I.4.1.2.2 Bilan des forces à l'équilibre

Cette approche physique vise à utiliser les relations physiques pour déduire la force de pression permettant de garantir l'état d'équilibre. Cette deuxième méthode consiste à isoler un volume de fluide et à faire l'équilibre des forces extérieures agissant sur ce volume (voir figure I.4.4). Dans l'exemple suivant, le volume de fluide est délimité d'un ensemble de surfaces planes horizontales (12) et verticales (13) et de la surface gauche (23). Le choix des surfaces planes permet d'employer des relations plus simples.

En faisant l'équilibre des forces dans chaque direction, on peut déduire que :

- la composante horizontale de  $\vec{F}$  est égale à la poussée sur la surface plane verticale,
- la composante verticale de  $\vec{F}$  est égale à la poussée sur la surface plane horizontale plus de poids du volume de fluide délimité.

La détermination du point d'application de la force résultante se fait de la même manière que pour une plaque plane (voir partie I.4.1.1.2).

#### I.4.1.3 Poussée sur des corps immergés

##### I.4.1.3.1 Poussée d'Archimède

Supposons qu'une surface fermée formant un corps solide de masse volumique  $\rho_S$ , de volume total  $V$  et de volume immergé  $V_{immergé}$ , se trouve immergée entièrement ou partiellement ( $V_{immergé} \leq V$ ) dans un liquide au repos de masse volumique  $\rho$ . Les forces verticales qui agissent sur le corps sont :

- les forces de pesanteur :  $V\rho_S g$
- les forces de pression du liquide :  $V_{immergé}\rho g$  (appelées forces d'Archimède ou forces de portance).

La force d'Archimède est appliquée au centre de gravité du liquide déplacé (centre de poussée). Pour un corps plein de poids volumique homogène et entièrement immergé, le centre de poussée est confondu avec le centre de gravité du corps. Il n'en est pas de même pour les corps flottants.

#### I.4.1.3.2 Équilibre des corps immergés

Un corps est en équilibre si le poids  $P_o$  et la poussée d'Archimède sont égaux, opposés et situés sur la même ligne verticale. Dans le cas contraire, il en résulte un mouvement. La stabilité peut se définir de la façon suivante : si on incline un corps d'un angle par rapport à la verticale, le corps est soumis à un couple de redressements qui le fait tourner jusqu'à ce qu'il revienne à sa position initiale. L'instabilité est donc définie par un couple qui tend à augmenter l'inclinaison.

Dans cet exemple, on constate que la position d'équilibre stable est vérifiée pour un angle  $\theta'$ , et que la position instable correspond à un angle  $\theta''$  qui a la particularité :  $\theta' < \theta''$  (voir figure I.4.5). On en déduit qu'il existe donc un angle limite  $\theta_{limite}$  de basculement entre l'état stable et instable.

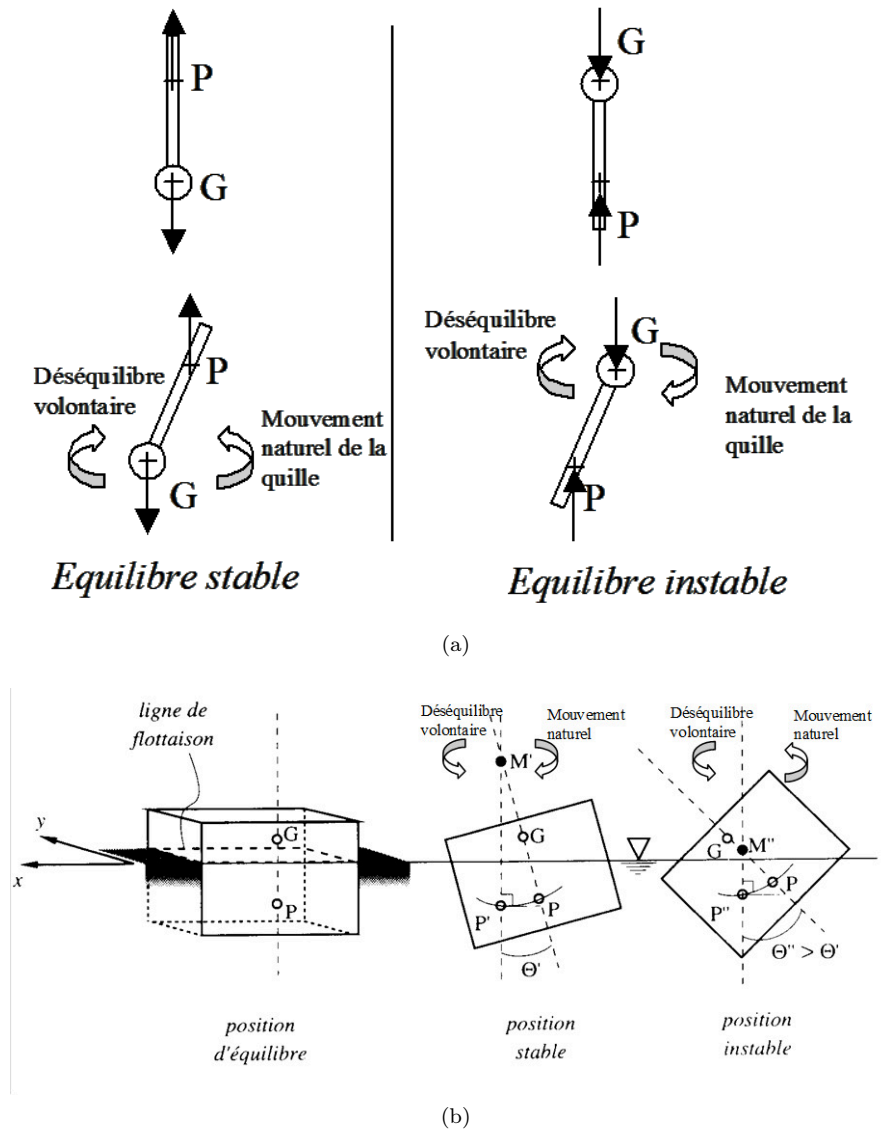


FIGURE I.4.5 – Illustrations de l'équilibre des corps partiellement immergés. Illustration de [5].





## Chapitre I.5

# Définitions et fondamentaux

Ce chapitre vise à définir les notions fondamentales pour l'étude des écoulements fluides. On considère un fluide décrit dans un référentiel centré sur le point  $O$  et dont les axes sont portés par les vecteurs unitaires  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$ . Le point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  est un point quelconque du fluide. Le vecteur vitesse est défini par :

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z \quad (\text{I.5.1})$$

où  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  sont les composantes du vecteur vitesse.

Certaines notions dépassent les besoins de ce cours mais constituent les fondamentaux de la mécanique des fluides.

### I.5.1 Régime permanent / transitoire

Lorsqu'un fluide est en mouvement, les grandeurs telles que la pression, la vitesse, la masse volumique, ... sont généralement fonctions à la fois du temps et de l'espace.

**régime permanent ou stationnaire :** les grandeurs de l'écoulement ne dépendent pas du temps, elles restent la même à chaque instant. On notera qu'un écoulement turbulent (voir partie I.2.2) qui est caractérisé par un vecteur vitesse qui change à chaque instant peut être permanent en moyenne (sur une durée suffisamment longue, supérieure à quelques secondes). La dérivée partielle de toutes les variables par rapport au temps est nulle :  $\partial/\partial t = 0$ .

**régime transitoire ou non-permanent ou instationnaire :** chaque grandeur dépend de l'instant considéré. Il en découle que la vitesse dépend alors nécessairement de la position dans le fluide.

### I.5.2 Uniforme / non-uniforme

Un écoulement permanent est dit uniforme lorsque ses grandeurs sont indépendantes des coordonnées d'espace. La dérivée partielle de toutes les variables par rapport aux coordonnées d'espace est nulle :  $\partial/\partial x = \partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$ .

Par opposition, on définit les écoulements non-uniformes parmi lesquels on distingue les écoulements graduellement (ou lentement) variés dont les changements du vecteur vitesse sont progressifs et les écoulements rapidement (ou brusquement) variés marqués par des changements rapides.

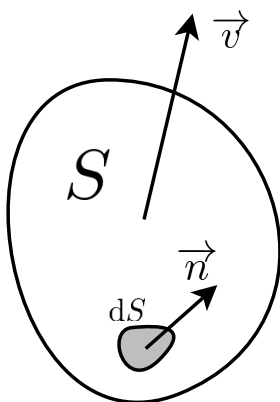


FIGURE I.5.1 – Illustration de la définition du débit

### I.5.3 Trajectoire

La trajectoire d'une particule est l'ensemble des positions qu'elle occupe successivement au cours du temps. Par définition, l'équation de la trajectoire est définie par :

$$\begin{cases} dx/dt = v_x(x, y, z, t) \\ dy/dt = v_y(x, y, z, t) \\ dz/dt = v_z(x, y, z, t) \end{cases} \quad (\text{I.5.2})$$

### I.5.4 Lignes de courant

Une ligne de courant est la courbe tangente aux vecteurs vitesses à un instant donné. Ces lignes de courant sont définies par :

$$\vec{v} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{0} \quad (\text{I.5.3})$$

Sauf dans le cas permanent, les lignes de courant ne sont pas confondues avec les trajectoires.

Le calcul des lignes de courant ne sera pas abordé dans ce cours. Toutefois elles sont définies car l'application de certaines équations se fait « le long d'une ligne de courant ». Néanmoins, les cas rencontrés dans les applications d'ingénieries courantes font que les lignes de courant sont simples à déterminer.

### I.5.5 Débit volumique, massique et vitesse moyenne

On considère un fluide avec un vecteur vitesse  $\vec{v}$ , une surface  $S$  et le vecteur unitaire  $\vec{n}$  normal à chaque élément  $dS$  qui compose  $S$ .

Le débit volumique (ou flux) est défini par :

$$Q = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (\text{I.5.4})$$

Le débit correspond donc au volume de fluide qui a traversé la surface  $S$  pendant une unité de temps. On le mesure en  $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . En hydraulique, on rencontre également les unités suivantes :  $\text{L} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\text{L} \cdot \text{h}^{-1}$  et  $\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ . Quand on s'intéresse à des écoulements compressibles, on s'intéresse souvent au débit massique :  $Q_m = \rho Q$ .

Par habitude, le terme « débit » désigne le débit volumique.

La vitesse moyenne est définie comme :

$$\bar{v} = \frac{Q}{S} \quad (\text{I.5.5})$$

où  $S$  est la section transversale de l'écoulement.

**Exercice d'application (de [14])**

L'eau de masse volumique  $\rho = 1000\text{kg.m}^{-3}$  à  $4^\circ\text{C}$  s'écoule à une vitesse moyenne  $\bar{v} = 1\text{m.s}^{-1}$  dans une conduite de diamètre  $D = 0,6\text{m}$ . Calculer les débits volumique et massique.

**Solution** Le débit volumique  $Q$  se calcule par la relation (I.5.5) :

$$\begin{aligned} Q &= \bar{v}S \\ &= \bar{v}\pi \frac{D^2}{4} \\ &= 1 \times \pi \frac{0,6^2}{4} = 0,283\text{m}^3.\text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Le débit massique  $Q_m$  se calcule par la relation :

$$\begin{aligned} Q_m &= \rho Q \\ &= 1000 \times 0,283 = 283\text{kg.s}^{-1} \end{aligned}$$



## Chapitre I.6

# Équation de continuité

### I.6.1 Cas général

L'équation de continuité traduit le principe de conservation de la masse : la variation de masse pendant un temps  $dt$  d'un élément de volume fluide doit être égale à la somme des masses de fluide entrantes soustraite de celles sortantes. On considère un élément de volume fluide :  $dV = dx dy dz$  (voir figure I.6.1). La masse de cet élément peut s'exprimer comme :  $M = \rho dx dy dz$ . Pendant le temps  $dt$ , la variation de cette masse s'écrit :

$$dM = \frac{\partial M}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt \quad (\text{I.6.1})$$

Cette variation de masse  $dM$  doit donc être égale à :

- la somme des masses de fluide qui entrent et sortent par les faces de l'élément de volume  $dV$ ,
- la somme des masses de fluide spontanément détruites (puits) ou créées (sources) à l'intérieur de  $dV$ .

La masse de fluide traverse les faces du volume sous l'effet de la vitesse  $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$ .

Dans la direction  $x$ , la vitesse vaut  $v_x(x)$  au niveau de la face entrante et  $v_x(x + dx)$  au niveau de la face sortante. La masse entrante dans la direction  $x$  vaut donc :  $\rho(x) v_x(x) dy dz dt$  et la masse sortante vaut  $\rho(x + dx) v_x(x + dx) dy dz dt$ . Cette variation de masse dans la direction  $x$   $dM_x$  vaut :

$$\begin{aligned} dM_x &= \rho(x) v_x(x) dy dz dt + \rho(x + dx) v_x(x + dx) dy dz dt \\ &= ([\rho v_x]_x - [\rho v_x]_{x+dx}) dy dz dt \\ &= \left( [\rho v_x]_x - [\rho v_x]_{x+dx} - \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx \right) dy dz dt \\ &= -\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx dy dz dt \end{aligned} \quad (\text{I.6.2})$$

En appliquant le même raisonnement à l'ensemble des faces et en calculant la variation de masse totale, on obtient :

$$dM = - \left[ \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right] dx dy dz dt \quad (\text{I.6.3})$$

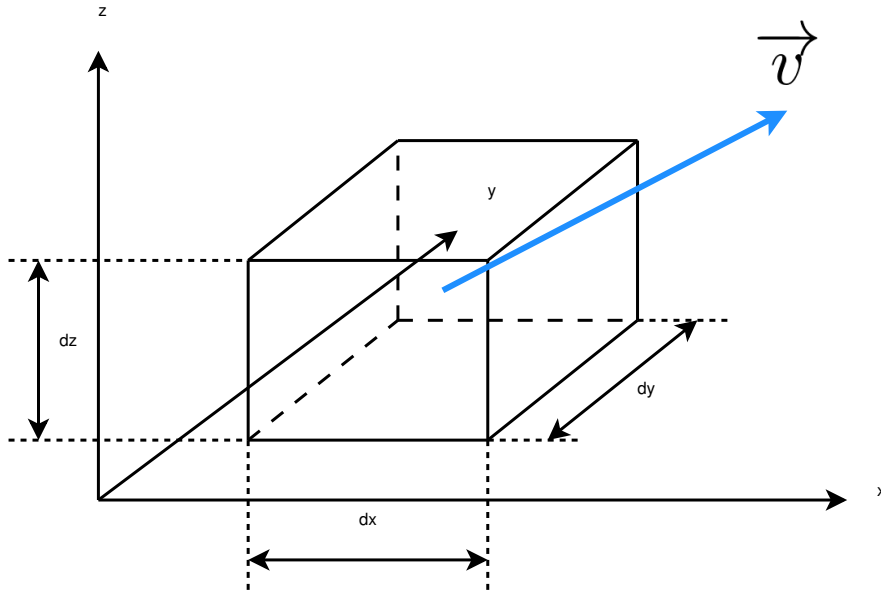


FIGURE I.6.1 – Schéma du volume de contrôle pour l'établissement de l'équation de continuité

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt &= - \left[ \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right] dx dy dz dt \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.6.4})$$

Aux flux de masse traversant les limites du volume  $dV$  s'ajoute les apparitions et disparitions spontanées de masse dans le volume. On nomme  $q_v$  le débit volumique de fluide créé ( $q_v > 0$  : source) ou détruit ( $q_v < 0$  : puits) par unité de volume. La masse de fluide créée ou détruite pendant le temps  $dt$  dans le volume  $dV$  vaut donc :

$$\rho q_v dV dt \quad (\text{I.6.5})$$

Comme il peut y avoir plusieurs types de sources ou de puits dans un même volume  $dV$ , on écrit plutôt :

$$\sum_i \rho q_{v_i} dV dt \quad (\text{I.6.6})$$

Le bilan global s'écrit donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = \sum_i \rho q_{v_i} \quad (\text{I.6.7})$$

Cette équation est l'équation de continuité qui traduit le principe de conservation de la masse.

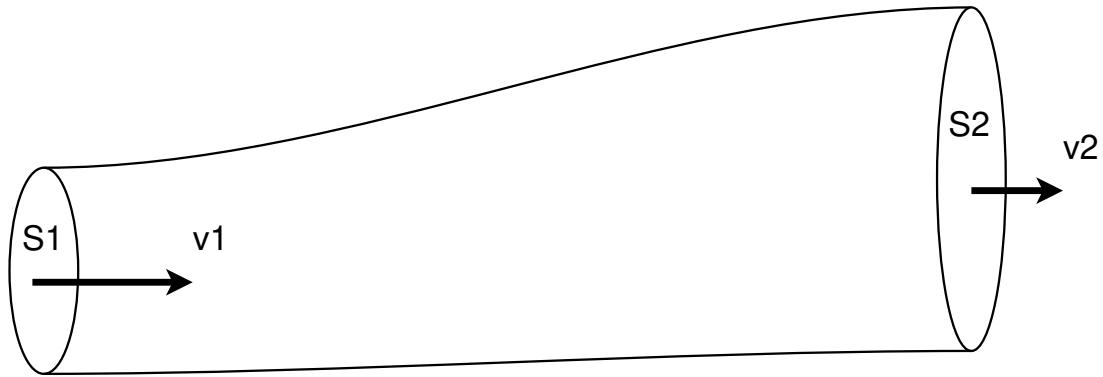


FIGURE I.6.2 – Conservation du débit en conduite

## I.6.2 Cas particuliers

- Dans le cas d'un écoulement permanent (ou stationnaire), il n'y a pas de variation au cours du temps :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} &= \sum_i \rho q_{vi} \end{aligned} \quad (\text{I.6.8})$$

- Dans le cas d'un fluide incompressible :  $\rho = \text{Cste}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} &= \sum_i \rho q_{vi} \\ 0 + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} &= \rho \sum_i q_{vi} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= \sum_i q_{vi} \end{aligned} \quad (\text{I.6.9})$$

- Dans le cas d'un écoulement conservatif, il n'y a ni puits ni source :

$$\sum_i q_{vi} = 0 \quad (\text{I.6.10})$$

S'il s'agit en complément d'un fluide incompressible :  $\text{div } \vec{v} = 0$ .

- Le principe de conservation de la masse appliqué à une conduite délimitée par les sections  $S_1$  et  $S_2$  perpendiculaires aux vecteurs vitesse moyen  $v_1$  et  $v_2$  (voir figure I.6.2) s'écrit :

$$Q_1 + Q_{bord} - Q_2 = 0 \quad (\text{I.6.11})$$

En effet, en régime permanent, la somme des débits entrant et sortant vaut 0. Sans fuite, le débit à travers la paroi  $Q_{bord}$  est nul. On trouve donc :

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_2 \\ v_1 S_1 &= v_2 S_2 \end{aligned} \quad (\text{I.6.12})$$

qui traduit le fait que le débit qui entre est égal au débit qui sort.





## Chapitre I.7

# Principe fondamental de la dynamique

Le principe fondamental de la dynamique s'établit en faisant un bilan des forces s'exerçant sur un volume de fluide en mouvement :

$$\rho dV \frac{D\vec{v}}{Dt} = \sum \overrightarrow{Forces} = \overrightarrow{F_V} + \overrightarrow{F_S} \quad (\text{I.7.1})$$

où  $\overrightarrow{F_S}$  représente l'ensemble des forces de surface et  $\overrightarrow{F_V}$  l'ensemble des forces de volume. La seule force de volume qui s'exerce est le poids :  $\rho dV \vec{g}$ . Les forces de surface qui s'exercent sur le volume sont :

- les forces de pression
- les contraintes de tangentielles liées à la viscosité et à la turbulence.

On ne détaille pas le calcul de chaque force car leur expression est liée à des hypothèses à faire concernant le modèle mathématique décrivant au mieux la physique à étudier. Le bilan global donne l'équation fondamentale de la dynamique :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \overrightarrow{\text{grad}}\tau + \rho \vec{g} \quad (\text{I.7.2})$$

où  $\tau$  est la contrainte tangentielle à la paroi. Cette équation est également appelée équation d'Euler (à ne pas confondre avec le théorème d'Euler, partie I.8).

### I.7.1 Équation d'Euler le long d'une trajectoire

On considère une trajectoire avec un système d'axe associé à cette courbe (voir figure I.7.1) où  $\vec{s}$  représente le vecteur tangentiel à la trajectoire,  $\vec{n}$  le vecteur normal dans le plan de la courbure et  $\vec{b}$  le vecteur normal au plan ( $\vec{s}$ ,  $\vec{n}$ ).

On écrit l'équation d'Euler en considérant un fluide parfait (non visqueux) :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P + \rho gz) \quad (\text{I.7.3})$$

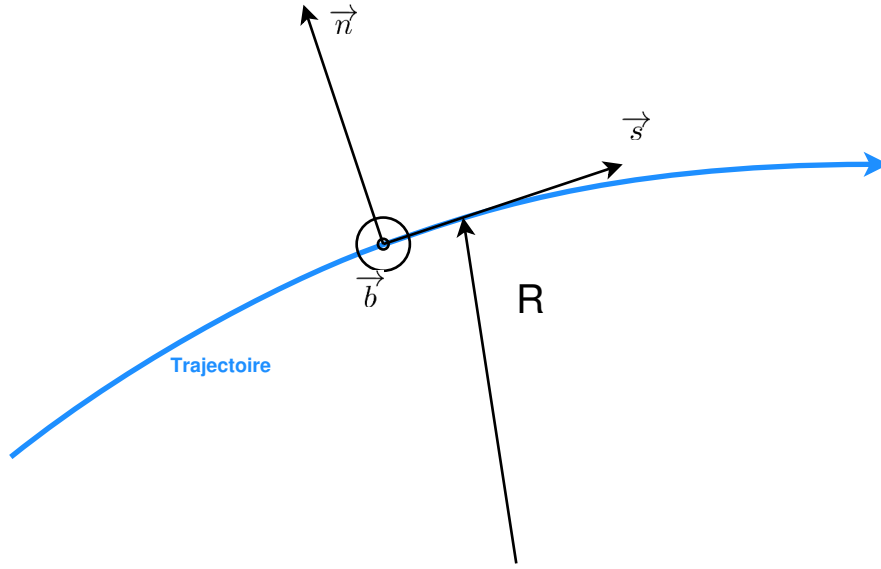


FIGURE I.7.1 – Schéma du système d'axe associé à une trajectoire. On notera que  $\vec{b}$  est le vecteur perpendiculaire à la feuille orienté vers le lecteur.

Dans ce système d'axe, le vecteur vitesse s'écrit :  $\vec{v} = v\vec{s}$  et donc :

$$\begin{aligned}
 \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \frac{Dv}{Dt}\vec{s} + v\frac{D\vec{s}}{Dt} \\
 &= \frac{Dv}{Dt}\vec{s} + v\left[\frac{\partial\vec{s}}{\partial t} + v\frac{d\vec{s}}{ds}\right] \\
 &= \frac{Dv}{Dt}\vec{s} + \frac{\vec{n}}{R}v^2
 \end{aligned} \tag{I.7.4}$$

où  $R$  est le rayon de courbure de la trajectoire.

En projetant l'équation d'Euler (I.7.3) combinée avec (I.7.4) sur chacun des axes, on obtient :

$$\text{selon } \vec{s} \quad \rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{d}{ds}(P + \rho gz) \tag{I.7.5a}$$

$$\text{selon } \vec{n} \quad \rho \frac{v^2}{R} = -\frac{d}{dn}(P + \rho gz) \tag{I.7.5b}$$

$$\text{selon } \vec{b} \quad 0 = -\frac{d}{db}(P + \rho gz) \tag{I.7.5c}$$

Analysons chacune de ces équations :

**selon  $\vec{s}$**  : Cette formule traduit une conservation de l'énergie le long d'une trajectoire en régime permanent. L'analyse de cette équation sera approfondie dans la partie I.9.

**selon  $\vec{n}$**  : Dans une courbure, il existe un gradient de la quantité  $P + \rho gz$  qui croit quand on s'éloigne du centre de courbure. Cela traduit l'effet des forces centrifuges. On notera que dans le cas d'un écoulement rectiligne ( $R \rightarrow \infty$ ) ce gradient devient donc nul et l'on retrouve une distribution hydrostatique des pressions (voir partie I.3).

**selon  $\vec{b}$**  : le gradient de la quantité  $P + \rho gz$  est toujours nul et l'on a donc une distribution hydrostatique des pressions.

On notera que la formulation établie en (I.7.5a), (I.7.5b) et (I.7.5c) reste vraie même en régime transitoire à ceci prêt que le système d'équations est valide pour un système d'axe le long d'une ligne de courant et qu'il varie à chaque instant en un point donné.

## I.7.2 Équation de Navier Stokes

L'équation fondamentale de la dynamique nécessite de connaître les contraintes qui s'exercent entre les particules fluide. Les fluides newtoniens sont ceux pour lesquels il existe une relation linéaire entre les contraintes de viscosité et le taux de déformation pure. Par ailleurs, on peut montrer que le taux de déformation pure est proportionnel au gradient des vitesses. On a donc :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\tau = \mu\Delta\overrightarrow{v} \quad (\text{I.7.6})$$

On obtient donc l'équation de Navier Stokes pour la dynamique des fluides newtoniens :

$$\rho\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \mu\Delta\overrightarrow{v} + \rho\overrightarrow{g} \quad (\text{I.7.7})$$

On notera que dans les configurations rencontrées en hydraulique générale, l'ensemble des fluides peuvent être considérés comme newtonien. Il n'est généralement pas possible de résoudre manuellement cette équation (sauf cas particuliers simplifiés et toujours dans le cas d'écoulements laminaires). Cette équation est résolue numériquement dans des logiciels de modélisation numérique 3D.



# Chapitre I.8

## Théorème d'Euler

### I.8.1 Ecriture dans le cas général



Calcul de la poussée sur une plaque

Le théorème d'Euler s'établit en appliquant l'équation de transport à la quantité de mouvement. La quantité de mouvement d'une particule fluide de volume  $dV$  est le produit de sa masse par sa vitesse :

$$\int_V \rho \vec{v} dV \quad (\text{I.8.1})$$

Le principe fondamental de la dynamique établit que la dérivée temporelle de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces appliquées au volume :

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \vec{F}_S + \vec{F}_V \quad (\text{I.8.2})$$

où  $\vec{F}_S$  représente les forces qui s'appliquent sur la surface du volume de contrôle et  $\vec{F}_V$  les forces de volume. L'intégrale ne dépend pas du temps, on peut entrer la dérivée dans l'intégrale :

$$\begin{aligned} \vec{F}_S + \vec{F}_V &= \int_V \frac{D\rho \vec{v}}{Dt} dV \\ &= \int_V \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \int_V \vec{\nabla} (\rho \vec{v}) dV \\ &= \int_V \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \int_S (\rho \vec{v}) \vec{v} \cdot \vec{n} dS \end{aligned} \quad (\text{I.8.3})$$

Le passage de la ligne 2 à la ligne 3 se fait en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski (aussi appelé théorème de la divergence).

Cette équation est le théorème d'Euler qui permet de relier la variation du vecteur vitesse aux forces exercées sur un écoulement ou de déterminer la résultante des forces de surfaces sur un écoulement. En hydraulique, ce théorème est notamment utilisé pour calculer les efforts qui s'exercent sur les coudes des conduites et tout autres ouvrages particuliers pouvant subir des poussées (dynamiques) exercées par l'eau.



## Chapitre I.9

# Théorème de Bernoulli



Equation de Bernoulli appliquée à un venturi

### I.9.1 Démonstration

On considère l'équation (I.7.5a) le long d'une ligne de courant :

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{ds} (P + \rho gz) \quad (\text{I.9.1})$$

On peut montrer mathématiquement que cette équation est équivalente à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{dv}{ds} &= -\frac{1}{\rho} \frac{d}{ds} (P + \rho gz) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{d}{ds} (P + \rho gz) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{P}{\rho} + gz \right) \end{aligned} \quad (\text{I.9.2})$$

En régime permanent, on obtient donc :

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{P}{\rho} + gz \right) = 0 \quad (\text{I.9.3})$$

qui traduit le fait que la quantité  $\frac{1}{2} \rho v^2 + P + \rho gz$  reste constante le long d'une ligne de courant. C'est le théorème de Bernoulli. On rappelle les hypothèses utilisées :

- le régime d'écoulement est permanent
- le fluide est parfait
- cette équation s'applique le long d'une ligne de courant

### I.9.2 Interprétation de l'équation de Bernoulli

L'équation de Bernoulli peut être interprétée comme une somme de trois termes ayant chacun une signification physique.

### I.9.2.1 Interprétation en pression

L'équation de Bernoulli comprend quatre termes :

- $P$  représente la pression statique qui existe même en l'absence de mouvement
- $P + \rho gz = p^*$  représente la pression motrice qui génère le déplacement
- $1/2\rho v^2$  représente la pression cinétique qui résulte du mouvement.
- Cste est appelée la pression totale. Certains auteurs dénomment ce terme la charge.

### I.9.2.2 Interprétation en énergie

On multiplie l'ensemble de l'équation par le volume  $V$  qui s'écoule :

$$V \frac{1}{2} \rho v^2 + V.P + V \rho gz = \text{Cste}V \quad (\text{I.9.4})$$

- $V.P$  représente le travail des forces de pression. C'est donc l'énergie potentielle due aux forces de pression.
- $V \rho gz = mgz$  représente l'énergie potentielle due aux forces de pesanteur.
- $1/2\rho V v^2 = 1/2mv^2$  représente l'énergie cinétique du système.
- $\text{Cste}V$  représente la somme des énergies potentielle due aux forces de pression, de pesanteur et cinétique. C'est l'énergie mécanique du système qui se conserve pour un écoulement d'un fluide parfait et incompressible : il n'y a pas dissipation d'énergie.

L'équation initiale de Bernoulli (I.9.3) correspond donc à la conservation de l'énergie mécanique par unité de volume.

### I.9.2.3 Interprétation en hauteur - profil de charge

L'équation initiale de Bernoulli peut être rendue homogène à des mètres de colonne fluide en divisant l'équation par  $\rho g$  :

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + z = \frac{\text{Cste}}{\rho g} \quad (\text{I.9.5})$$

Cette équation regroupe quatre termes :

- $\frac{v^2}{2g}$  représente la pression due à la vitesse ramenée en hauteur de fluide.
- $\frac{P}{\rho g}$  exprime la pression sous forme de mètre de colonne fluide
- $z$  représente l'altitude du point auquel on s'intéresse.
- $\frac{\text{Cste}}{\rho g}$  représente la charge de l'écoulement.

Cette formulation a l'avantage de pouvoir aisément représenter l'énergie d'un écoulement sur un graphique (voir figure I.9.1). On notera d'ailleurs que la somme du terme de pression et de l'altitude représente la hauteur piézométrique  $p^*/\rho g$  et que la somme  $v^2/2g + P/\rho g$  représente la pression dynamique.

- La ligne de charge représente le niveau maximal que pourra atteindre l'eau (si il n'y a pas d'écoulement).
- La ligne piézométrique représente le niveau auquel monte l'eau lors de l'écoulement. En hydraulique en charge, cela correspond au niveau que pourrait atteindre l'eau si l'on réalisait un trou dans la conduite sans que l'écoulement ne soit perturbé.

La comparaison avec la topographie du réseau peut donner des informations précieuses sur les phénomènes en jeu. Cela sera abordé dans la partie II.



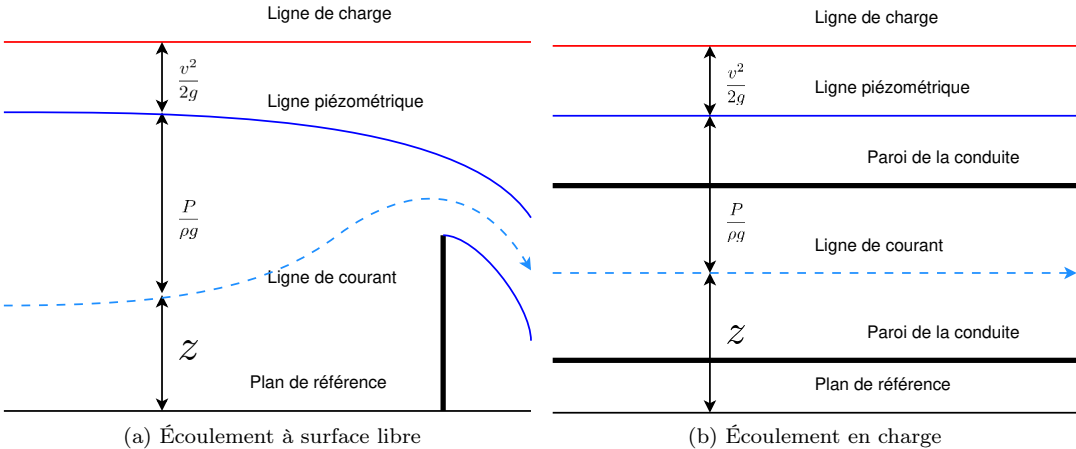


FIGURE I.9.1 – Exemple de profils de charge



Deuxième partie

Hydraulique en charge



## Chapitre II.10

# Équation de Bernoulli appliquée aux fluides réels



Equation de Bernoulli généralisée

Nous avons établi précédemment l'équation de Bernoulli (I.9.3) dans le cas d'un fluide parfait (voir partie I.9). Dans le cas d'un fluide réel et en régime permanent, d'autres forces interviennent, notamment les forces dues au frottement, qui font apparaître une transformation de l'énergie mécanique  $E_m$  en énergie thermique. L'équation de Bernoulli (I.9.3) devient alors :

$$g \frac{d}{ds} \left( \frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + z \right) = -g \frac{dE_m}{ds} \quad (\text{II.10.1})$$

où  $dE_m$  représente la variation d'énergie mécanique convertie en chaleur dans le fluide et où  $H = \frac{1}{2g}v^2 + \frac{P}{\rho g} + z = \frac{1}{2g}v^2 + \frac{p^*}{\rho g}$  est la charge en un point de l'écoulement. Cette équation traduit le fait que dans un fluide réel, l'énergie mécanique se transforme en énergie thermique du fait des frottements le long d'une ligne de courant. La transformation d'énergie mécanique en énergie thermique est appelée la perte de charge due aux frottements dans un fluide.

Cette formulation « infinitésimale » le long d'une ligne de courant n'intéresse pas directement l'hydraulicien. En effet, dans le cas d'application réelle, on s'intéresse plutôt à la variation de charge le long d'un écoulement en conduite. On s'intéresse donc à la valeur moyenne de la charge sur une section droite de l'écoulement qui se calcule à l'aide du théorème de la moyenne :

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{1}{S} \int_S H dS \\ &= \frac{1}{S} \int_S \left( \frac{1}{2g}v^2 + \frac{p^*}{\rho g} \right) dS \\ &= \frac{1}{S} \int_S \frac{1}{2g}v^2 dS + \frac{1}{S} \int_S \frac{p^*}{\rho g} dS \\ &= \frac{1}{2g} \frac{1}{S} \int_S v^2 dS + \frac{1}{S} \int_S \frac{p^*}{\rho g} dS \end{aligned} \quad (\text{II.10.2})$$

On obtient donc une somme de deux termes :

– En utilisant le théorème de la moyenne sur le premier terme, on obtient :

$$\frac{1}{S} \int_S v^2 dS = \bar{v}^2 \quad (\text{II.10.3})$$

où  $\overline{v^2}$  représente la valeur moyenne de la vitesse au carré ( $v^2$ ) en chaque point de la section. On préfère généralement travailler avec la vitesse moyenne de l'écoulement (qui est directement liée au débit et à la section de la conduite). On a donc :

$$\overline{v^2} = \beta \overline{v}^2 = \beta \left( \frac{Q}{S} \right)^2 \quad (\text{II.10.4})$$

où le coefficient  $\beta$  tient compte de la forme du profil de vitesse dans la section. Dans beaucoup d'application, ce coefficient est pris égal à 1 afin de simplifier les calculs. Les erreurs commises par le biais de cette approximation sont en réalité compensées par l'estimation de la perte de charge.

- On considère un écoulement peu perturbé avec une courbure faible des lignes de courant et donc une pression hydrostatique. On a donc  $p^* / \rho g = \text{cste}$ .

La charge moyenne sur la section d'écoulement vaut donc :

$$\overline{H} = \frac{1}{2g} \beta \left( \frac{Q}{S} \right)^2 + \frac{p^*}{\rho g} \quad (\text{II.10.5})$$

En moyennant (II.10.1) sur la section d'écoulement et en intégrant entre deux points de la conduite, on trouve l'équation de Bernoulli généralisée :

$$\begin{aligned} \int_{am}^{av} \frac{1}{S} \int_S g \frac{d}{ds} \left( \frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + z \right) \S ds &= - \int_{am}^{av} \frac{1}{S} \int_S g \frac{dE_m}{ds} \S ds \\ \int_{am}^{av} g \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{S} \int_S \left( \frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + z \right) \S \right] ds &= - \int_{am}^{av} \frac{1}{S} \int_S g \frac{dE_m}{ds} \S ds \\ \int_{am}^{av} g \frac{d}{ds} [\overline{H}] ds &= - \int_{am}^{av} \frac{1}{S} \int_S g \frac{dE_m}{ds} \S ds \end{aligned} \quad (\text{II.10.6})$$

$$\left( \beta \frac{\overline{v_{am}}^2}{2g} + \frac{P_{am}}{\rho g} + z_{am} \right) - \left( \beta \frac{\overline{v_{av}}^2}{2g} + \frac{P_{av}}{\rho g} + z_{av} \right) = j_{am \rightarrow av} \quad (\text{II.10.7})$$

où  $j_{am \rightarrow av}$  est la perte de charge entre l'amont et l'aval (voir figure II.10.1).

Par abus de langage, on confond généralement la notation pour la vitesse ponctuelle  $v$  et la vitesse moyenne  $\overline{v}$  dans la conduite étant entendu que l'on parle toujours de vitesse moyenne du fluide quand on travaille à l'échelle de la conduite en hydraulique en charge.

La prise en compte de cette perte d'énergie modifie ainsi le profil de charge (voir figure II.10.1).

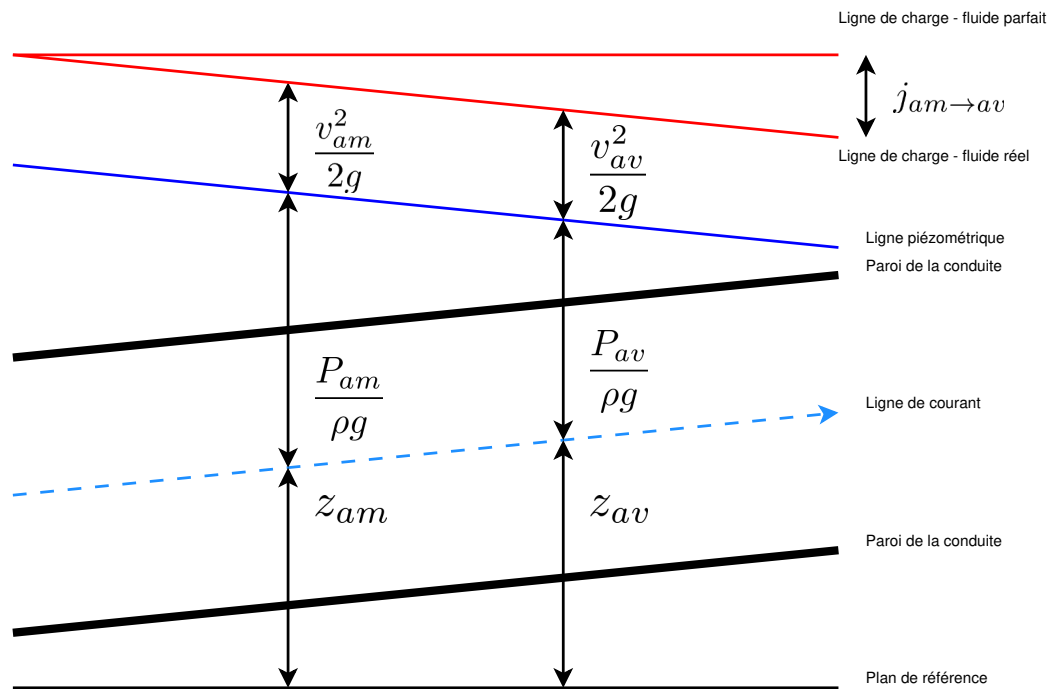


FIGURE II.10.1 – Comparaison des profils de charge pour des fluides parfait et réel

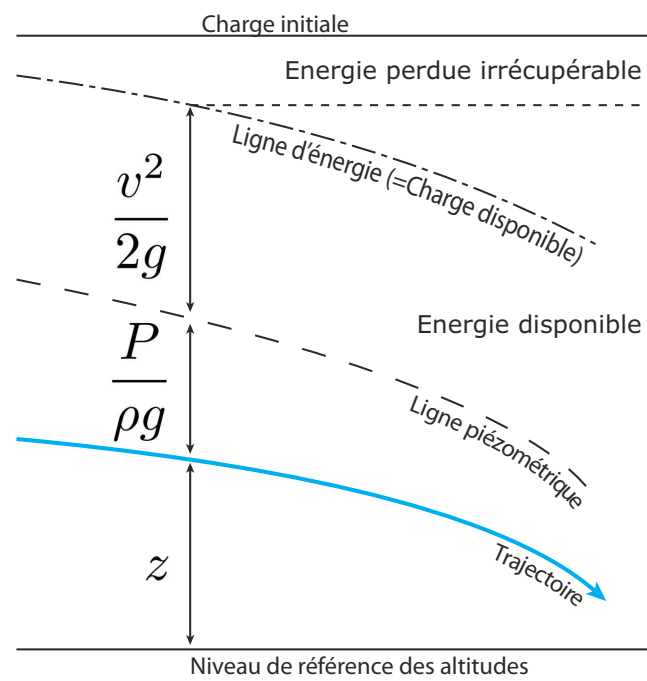


FIGURE II.10.2 – Illustration énergétique de la perte de charge





# Chapitre II.11

## Estimation des pertes de charge

L'écoulement d'un fluide réel dans une conduite représente une des applications classiques de l'hydrodynamique théorique et expérimentale. La maîtrise de ces écoulements pour le calcul du fonctionnement des réseaux d'eau potable est indispensable. Au long de l'écoulement, l'action des forces qui s'opposent au mouvement font perdre de l'énergie : les pertes de charge parmi lesquelles on distingue deux types :

- la perte de charge linéaire représentant l'énergie perdue entre les deux points,
- la perte de charge singulière qui intervient lorsque l'écoulement uniforme est localement perturbé.

### II.11.1 Expression générale des pertes de charge

On considère une conduite cylindrique parcourue par un fluide réel en régime permanent. Le fluide ne subissant pas d'accélération, on peut écrire que les forces résistantes  $F_{res}$  compensent exactement les forces motrices  $F_{mot}$  :

$$F_{mot} = F_{res} \quad (\text{II.11.1})$$

où :

$F_{res}$  est la somme des forces résistantes

$F_{mot}$  est la somme des forces motrices. La force motrice est la différence de pression motrice  $p^*$  entre les deux sections amont et aval de la conduite :  $F_{mot} = \rho g S \Delta H$  où  $\Delta H$  est la perte de charge.

Il vient donc :

$$\Delta H = j_{am \rightarrow av} = \frac{F_{res}}{\rho g S} = JL \quad (\text{II.11.2})$$

où  $L$  est la longueur de la conduite,  $J$  est la perte de charge par unité de longueur. ATTENTION :  $J$  ne doit pas être confondu avec  $j$  qui représente la perte de charge totale entre deux points. Pour cette raison, je privilégie la notation  $\Delta H$  pour noter la perte de charge totale.

### II.11.2 Les pertes de charge linéaires

#### II.11.2.1 Estimation de $\Delta p^*$ en régime laminaire : $Re < 2000$

Dans le cas des conduites où l'écoulement est laminaire, les forces de viscosité prédominent. La prise en compte de ces données dans l'équation de Navier-Stokes permet de montrer que

le profil des vitesses est parabolique. Son intégration sur la section aboutie à l'équation de Hagen-Poiseuille :

$$\Delta p^* = \frac{128\mu}{\pi D^4} LQ \quad (\text{II.11.3})$$

où  $L$  est la longueur de conduite parcourue, et  $D$  le diamètre de la conduite.

La combinaison de (II.11.2) avec (II.11.3) permet d'écrire :

$$\Delta H = \frac{128\mu}{\rho g \pi D^4} LQ \quad (\text{II.11.4})$$

En faisant apparaître le nombre de Reynolds et en écrivant le débit en fonction de la vitesse et de la section, on obtient l'équation générale des pertes de charge :

$$\begin{aligned} \Delta H &= \frac{64}{\text{Re}} \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \\ &= \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \end{aligned} \quad (\text{II.11.5})$$

qui fait intervenir  $\lambda$  le coefficient de perte de charge,  $L$  et  $D$  les dimensions de la conduite et l'énergie cinétique de l'écoulement. En régime laminaire, on montre ainsi que :

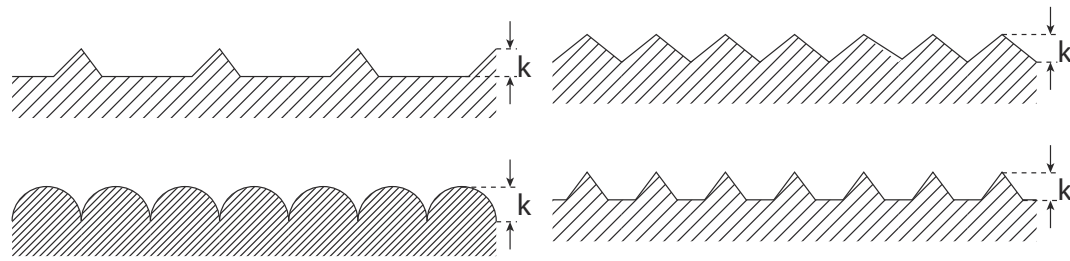
$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad (\text{II.11.6})$$

### II.11.2.2 Estimation de $F_{res}$ en régime turbulent : $\text{Re} > 4000$

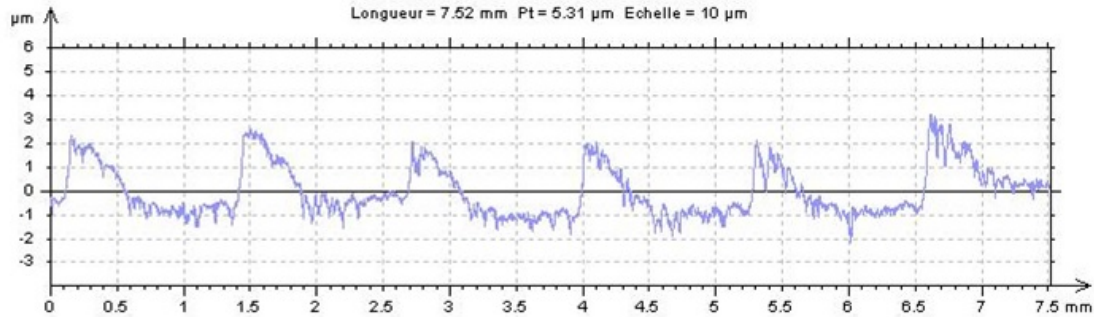
Les expériences réalisées en régime turbulent ont montré que la formulation (II.11.5) n'est plus rigoureusement exacte. En effet, les pertes de charge  $\Delta H$  dépendent de  $v^n$  où l'exposant  $n$  est compris entre 1,8 et 2. En pratique, le choix a été fait d'une formulation unique et de prendre en compte cette approximation dans le calcul de  $\lambda$ .

Quand l'écoulement est turbulent, le profil des vitesses tend à s'uniformiser. La seule résolution des équations de Navier-Stokes ne suffit plus dans la mesure où elles décrivent l'écoulement à travers quatre variables (la pression et les trois composantes de la vitesse moyenne) et où la description d'un écoulement turbulent nécessite de connaître la valeur moyenne de la vitesse mais également les fluctuations instantanées (décrites par un modèle de turbulence qui permet d'ajouter les équations manquantes pour fermer le système).

Une surface rugueuse implique un état de surface telles que ses irrégularités ont une action directe sur les forces de frottement, c'est-à-dire qu'au delà d'un certain degré de rugosité la configuration géométrique de la surface exerce une influence bien déterminée sur l'écoulement. Dans le cas des écoulements en charge appliqués au domaine de l'ingénieur, la rugosité va jouer un rôle très important. Une surface rugueuse peut être considérée comme étant constituée par une série de protubérances élémentaires. Elles sont caractérisées par une certaine hauteur  $k$  (désignée parfois par  $\epsilon$ ). Cette rugosité peut être mesurée par rapport au diamètre de la conduite. On parle alors de rugosité relative  $:k/D$ .



(a) Représentation schématique de la rugosité en conduite



(b) Mesure de la rugosité dans une conduite

FIGURE II.11.1 – Rugosité dans une conduite

Les surfaces auxquelles on a affaire dans la pratique (béton, acier, fonte) ne présentent pas des caractéristiques de rugosité uniforme. En effet, les protubérances de la surface sont inégales et irrégulièrement distribuées. Elles proviennent du rivetage, des recouvrements, des joints, des défauts sur la paroi, de corrosion, d'incrustations... L'annexe C donne quelques indications sur la valeur de  $\epsilon$ .

Suivant l'importance de la rugosité et la turbulence de l'écoulement, on distingue deux comportements différents et on définit deux types de rugosité : lisse et rugueuse. Physiquement, cela peut être relié à l'épaisseur de la couche limite (voir partie I.2.2.3).

### II.11.2.2.1 Régime turbulent lisse

Le régime turbulent lisse est défini empiriquement par :

$$\begin{aligned} \text{Re} &> 4000 && \text{(II.11.7)} \\ \frac{\epsilon \text{Re} \sqrt{\lambda}}{D} &\leq 1 \end{aligned}$$

Dans cette zone, la turbulence est encore modérée. L'épaisseur de la sous-couche limite est suffisante pour englober toutes les aspérités de la conduite qui se comporte dès lors comme un tuyau lisse. Deux expressions empiriques sont souvent utilisées :

– Formule de Blasius

$$\lambda = (100\text{Re})^{-0,25} \quad \text{pour } \text{Re} < 10^5 \quad \text{(II.11.8)}$$

– Formule (implicite) de Von Karman

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left( \frac{\text{Re} \sqrt{\lambda}}{2,51} \right) \quad \text{pour } \text{Re} > 10^5 \text{ à } 10^6 \quad \text{(II.11.9)}$$

### II.11.2.2.2 Régime turbulent rugueux

Le régime turbulent rugueux est défini empiriquement par :

$$\begin{aligned} \text{Re} &> 4000 \\ \frac{\epsilon \text{Re} \sqrt{\lambda}}{D} &\geq 200 \end{aligned} \quad (\text{II.11.10})$$

La turbulence devient très importante et le coefficient de perte de charge ne dépend plus que de la rugosité. On utilise alors la formule de Nikuradse :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left( \frac{\epsilon}{3,71D} \right) \quad \text{pour } \text{Re} > 10^5 \quad (\text{II.11.11})$$

### II.11.2.2.3 Régime turbulent généralisé

Des formules ont été proposées pour être valable dans l'ensemble des régimes d'écoulement (turbulent lisse, turbulent rugueux et zone de transition).

La formule de Colebrook est très largement utilisée et est inspirée des formules de Von Karman et Nikuradse :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left( \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{\epsilon}{3,71D} \right) \quad \text{pour } 10^8 > \text{Re} > 4000 \quad (\text{II.11.12})$$

Cette relation implicite doit être résolue numériquement.

### II.11.2.3 Le diagramme de Moody



Utilisation du diagramme de Moody

Le diagramme de Moody (voir figure II.11.2) est une représentation graphique qui synthétise les différentes lois de détermination des pertes de charge. Son utilisation permet de s'affranchir de

permettant de déterminer le coefficient qui permet de trouver facilement le résultat . On notera que le coefficient  $\lambda$  est parfois noté  $f$ .

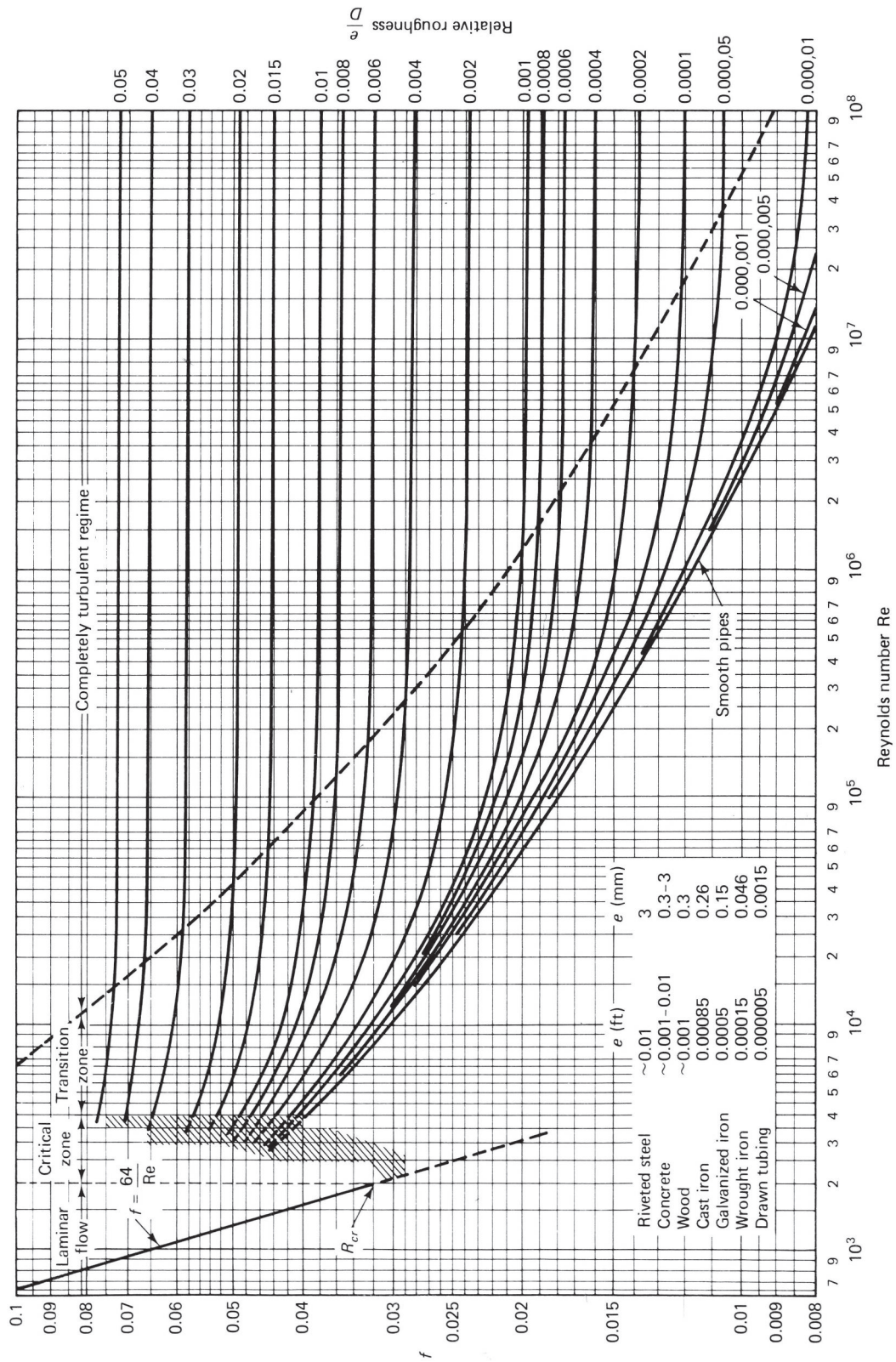


Figure 7.13 Moody diagram. (From L. F. Moody, *Trans. ASME*, Vol. 66, 1944.)

FIGURE II.11.2 – Diagramme de Moody

Pour les applications courantes d'ingénierie hydraulique qui s'intéresse à l'écoulement de l'eau, on peut utiliser :

- la formule d'Hazen-Williams :

$$J = 10,69 \frac{Q^{1,85}}{C_{HW}^{1,85} D^{4,87}} \quad (\text{II.11.13})$$

où  $C_{HW}$  est le coefficient d'Hazen-Williams qui dépend de la rugosité du matériau (voir table II.11.1).

- la formule de Lechapt et Calmon (1965) qui approche la formule de Colebrook par :

$$J = LQ^M D^{-N} \quad (\text{II.11.14})$$

où  $L$ ,  $M$  et  $N$  sont des constantes tabulées (voir table II.11.2). Pour des valeurs de vitesse comprises entre  $0,4\text{m.s}^{-1}$  et  $2\text{m.s}^{-1}$ , l'écart relatif avec la formule de Colebrook est inférieur à 3%.

Matériau	$C_{HW}$	Matériau	$C_{HW}$
Acier	120	Fonte	100
Béton, brique	100	PVC, plastique	150
Bois	120	Plomb	130
Cuivre	150	Verre	140
Étain	130		

TABLE II.11.1 – Paramètre de la formule de Hazen-Williams (les grandeurs sont en unité  $SI$ ).

k : rugosité en mm	L	M	N
k=2mm	1.863	2	5.33
k=1mm	1.601	1.975	5.25
k=0.5mm	1.400	1.96	5.19
k=0.25mm	1.160	1.93	5.11
k=0.1mm	1.100	1.89	5.01
k=0.05mm	1.049	1.86	4.93
k=0.025mm	1.010	1.84	4.88
k=0mm avec $0.05 \leq D \leq 0.2$	0.916	1.78	4.78
k=0mm avec $0.25 \leq D \leq 1$	0.971	1.81	4.81

TABLE II.11.2 – Paramètres de la formule de Lechapt et Calmon  $J = LQ^M D^{-N}$  avec  $J$  en  $mm/m$ ,  $Q$  en  $m^3.s^{-1}$  et  $D$  en  $m$

#### Pour aller plus loin

On pourra se référer aux ouvrages suivants :

- [8] : historique de l'étude des pertes de charge, formulations des pertes de charge différentes, description détaillée de la structure de l'écoulement en régime turbulent

### II.11.3 Les pertes de charge singulières

La perte de charge singulière, localisée dans une section de la conduite, est provoquée par un changement de direction et d'intensité de la vitesse. L'écoulement uniforme est perturbé et devient localement un écoulement non uniforme. La turbulence joue un rôle considérable, alors que les forces de viscosité sont négligeables. La perte de charge n'a donc lieu qu'en régime turbulent. Une telle non-uniformité de la vitesse peut être provoquée par :

- un changement de section de la conduite,
- un changement de direction (coude),
- un branchement ou raccordement,
- un dispositif de mesure et contrôle de débit...

Comme pour les pertes de charge linéaire, les pertes de charges singulières se traduisent par la relation :

$$\Delta H = K \frac{v^2}{2g} \quad (\text{II.11.15})$$

où  $K$  est le coefficient de perte de charge (parfois noté  $\alpha$ ) qui dépend des caractéristiques géométriques et du nombre de Reynolds.

La valeur de  $K$  est donnée pour les différents cas les plus classiques à l'annexe B.

#### Pour aller plus loin

On pourra se référer aux ouvrages suivants :

- [8] : approche physique pour la détermination des formules de pertes de charge singulières dans certaines ouvrages
- [7, 10] : abaques et formulation de calcul du coefficient de perte de charge singulière pour une grande variété de singularité

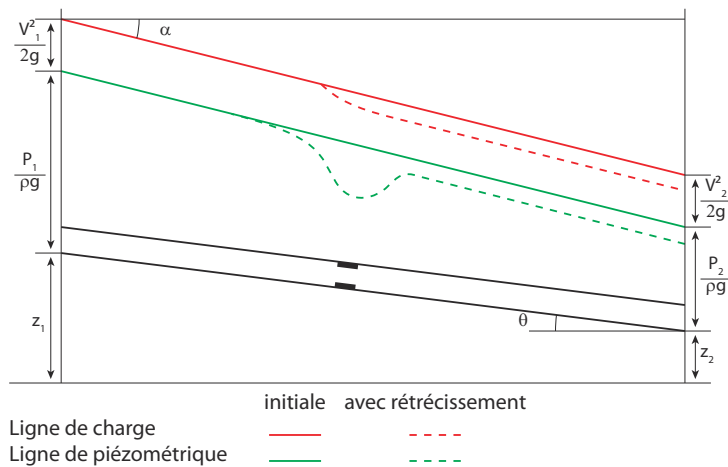


FIGURE II.11.3 – Profil de charge typique pour un rétrécissement localisé

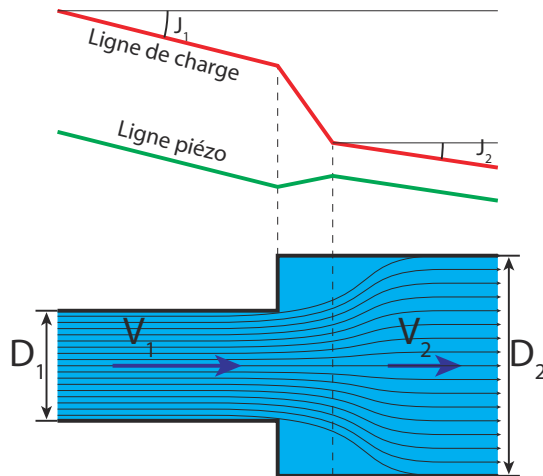


FIGURE II.11.4 – Profil de charge typique pour un élargissement brusque

## II.11.4 Exemples de tracés de profil de charge

### II.11.4.1 Rétrécissement localisé

On considère une conduite de longueur  $L$  traversée par un débit  $Q$ . Localement, on installe un rétrécissement de la section qui va générer une augmentation de la vitesse (voir figure II.11.3).

La conduite génère les mêmes pertes de charge linéaire avant et après la singularité donc la pente de la ligne de charge est la même. Au niveau de la singularité, l'augmentation de la vitesse se traduit par une diminution localisée de la pression (qui peut aller jusqu'à la cavitation).

#### II.11.4.1.1 Augmentation brusque de diamètre

On considère maintenant une conduite horizontale avec un élargissement brusque (voir figure II.11.4).



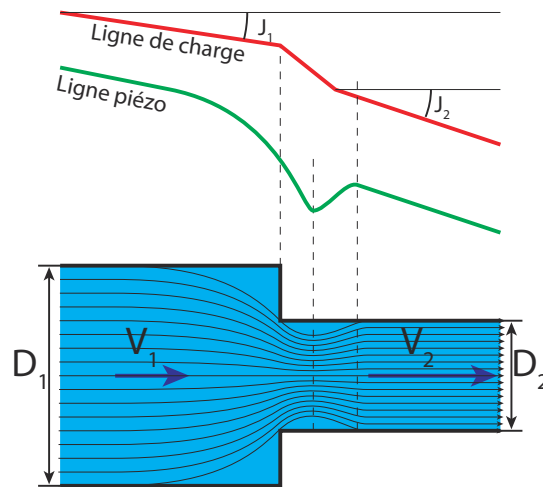


FIGURE II.11.5 – Profil de charge typique pour un rétrécissement brusque

Le diamètre de la conduite varie au niveau de la singularité. Il y a des pertes de charge linéaires plus importantes pour la section réduite que pour la section importante. En effet :

- à rugosité équivalente, la rugosité relative augmente et génère plus de perte de charge
- la vitesse augmente dans la petite section

La pression augmente dans la partie élargie de la conduite du fait de la réduction de vitesse entraînant une remontée de la ligne piézométrique.

#### II.11.4.1.2 Réduction brusque de diamètre

On considère maintenant une conduite horizontale avec un rétrécissement brusque (voir figure II.11.5).

La pression diminue dans la partie rétrécie de la conduite du fait de l'augmentation de vitesse entraînant une chute de la ligne piézométrique.



## Chapitre II.12

# Interprétation graphique



Analyse du profil de charge

### II.12.1 Position de la ligne piézométrique

Considérons une conduite reliant deux réservoirs. La droite AA' correspond à la ligne de charge exprimée en pression relative (on a négligé les pertes de charges dues à l'entrée et à la sortie des réservoirs). La ligne BB' correspond à la ligne de charge avec des pressions absolues ( $P_a/\rho g = 10,33\text{m}$ ).

Si la conduite toute entière est située au dessous de AA', la pression dépasse la pression atmosphérique. Cette hypothèse correspond à une situation normale. Il faut alors prévoir des ventouses aux points les plus élevés pour la sortie de l'air accumulé et des décharges de fond en N et N' pour la vidange et le nettoyage.

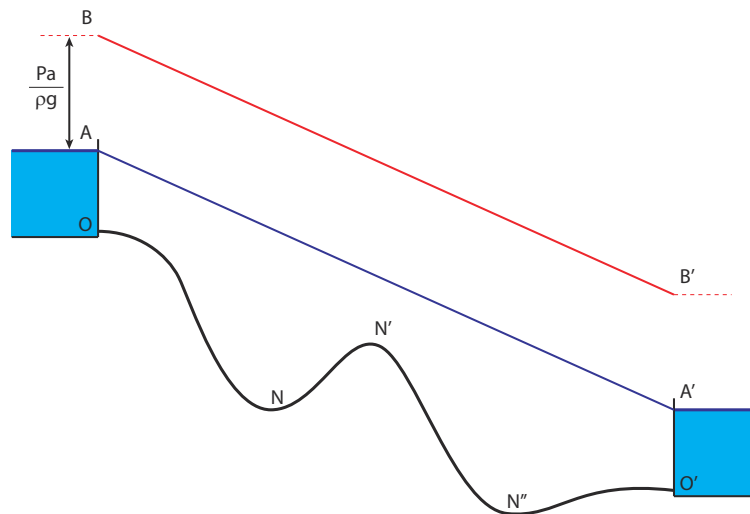


FIGURE II.12.1

Si la conduite passe au-dessus de la ligne piézométrique AA', la partie du tronçon au-dessus de AA' est en dépression. En général, on doit éviter les zones en dépression ; en effet, une fente éventuelle facilitera l'entrée de corps étrangers et peut contaminer l'eau. La pose d'une ventouse normale est contre indiquée, étant donné qu'elle permettrait l'entrée de l'air et provoquerait en conséquence, une réduction de débit. Dans la majorité des cas, on évite ce type de tracé.

Si la conduite s'élève au-dessus de la ligne horizontale qui passe par A, il n'y aura écoulement que si toute la conduite a été remplie d'eau au préalable (effets de siphonnage).

Si la forme de la conduite est toujours située au-dessous de l'horizontale passant par A, mais dépassant BB', l'écoulement se fait sans siphonnage. Cependant, la pression est nulle pour la partie située au-dessus de BB' : il y a cavitation. L'écoulement se fait avec une section partiellement pleine et le débit diminue. Les dégagements d'air et de vapeur d'eau dans les régions de forte dépression rendent l'écoulement irrégulier.

Si la conduite a un tronçon au-dessus de l'horizontale passant par A, il faudrait amorcer le siphon. Si la conduite dépasse la cote B, il est impossible d'amorcer l'écoulement.

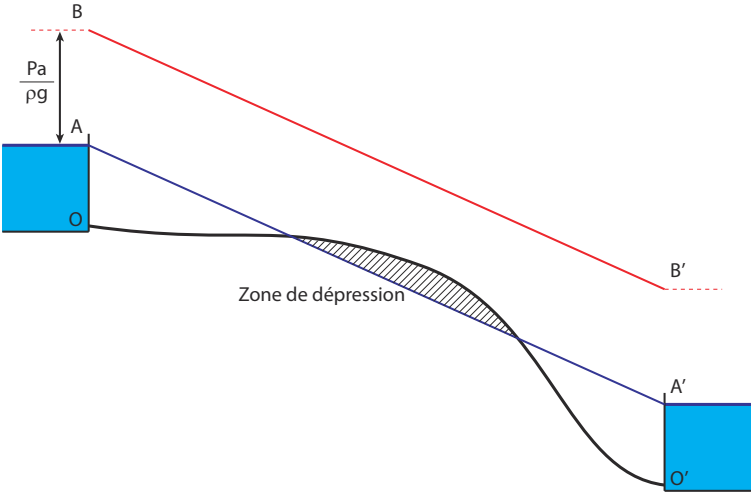


FIGURE II.12.2

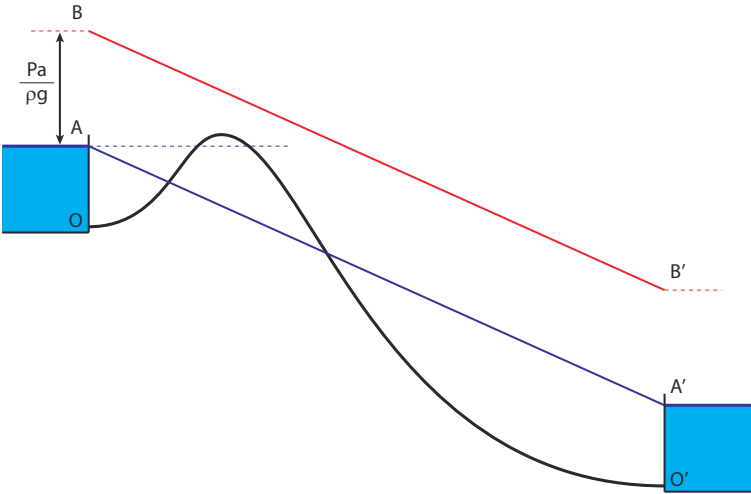


FIGURE II.12.3

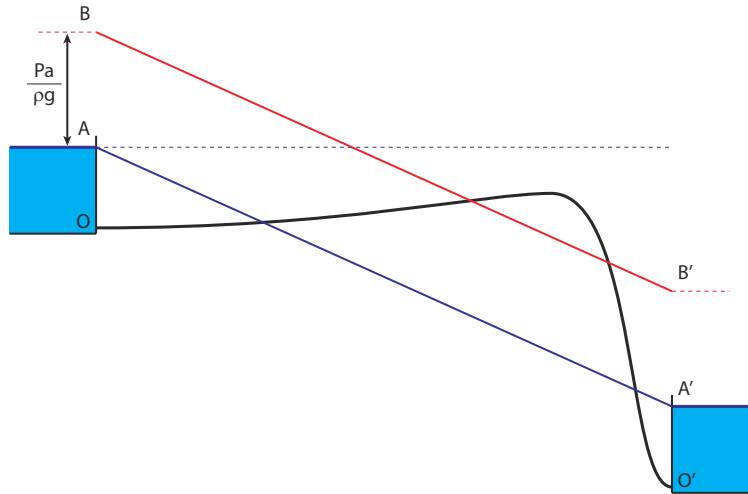


FIGURE II.12.4

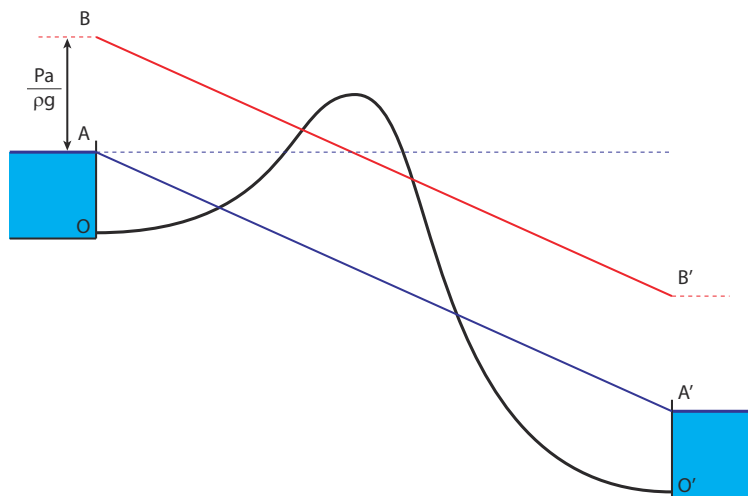


FIGURE II.12.5

# Chapitre II.13

## Les pompes

Dans les problèmes rencontrés par les hydrauliciens, l'énergie disponible pour le fluide conditionne le débit de transit dans une conduite. Il n'est pas rare de vouloir alimenter un réservoir haut depuis un point bas auquel cas il est nécessaire de vaincre la gravité ou de vouloir accélérer le transit dans une conduite. Dans de telles configurations, on utilise un organe hydraulique appelé pompe.

### II.13.1 Généralités

#### II.13.1.1 Fonctionnement global

Une pompe est un organe hydraulique dont le rôle est de transmettre de l'énergie au fluide (voir figure II.13.1). Une pompe est nécessairement entraînée par un moteur qui consomme une énergie  $E_e$ . Le moteur transforme entre 60 et 90% de cette énergie en énergie mécanique  $E_m$ . On notera que dans certains cas, le moteur est absent et l'énergie mécanique est fournie par la roue d'un moulin ou par action animale... La pompe transforme ensuite 50 à 80% de l'énergie mécanique  $E_m$  en énergie transmise au fluide  $E_f$ .

Le rendement d'une pompe est défini par

$$\eta = \frac{E_f}{E_m} = \frac{P_f \Delta t}{P_m \Delta t} \quad (\text{II.13.1})$$

où  $P_m$  est la puissance reçue par la pompe et  $P_f$  est la puissance fournie au fluide :  $P_f = \rho g \times Q \times HMT$ . La notion de  $HMT$  sera définie à la partie II.13.2.1.

#### II.13.1.2 Différents types de pompes

Suivant l'application visée, la pompe visera à accroître la pression et/ou le débit. Pour s'adapter à chaque configuration, il existe une grande variété de pompes avec des domaines d'application spécifiques (voir figure II.13.2). On distingue deux grands types de pompe :

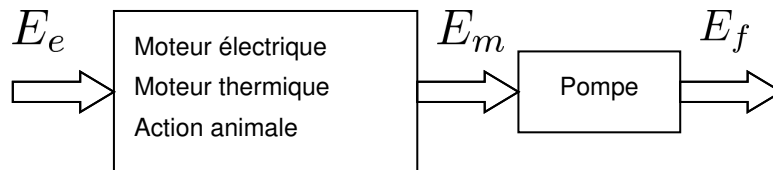


FIGURE II.13.1 – Schéma énergétique d'une pompe. Illustration d'après [8]

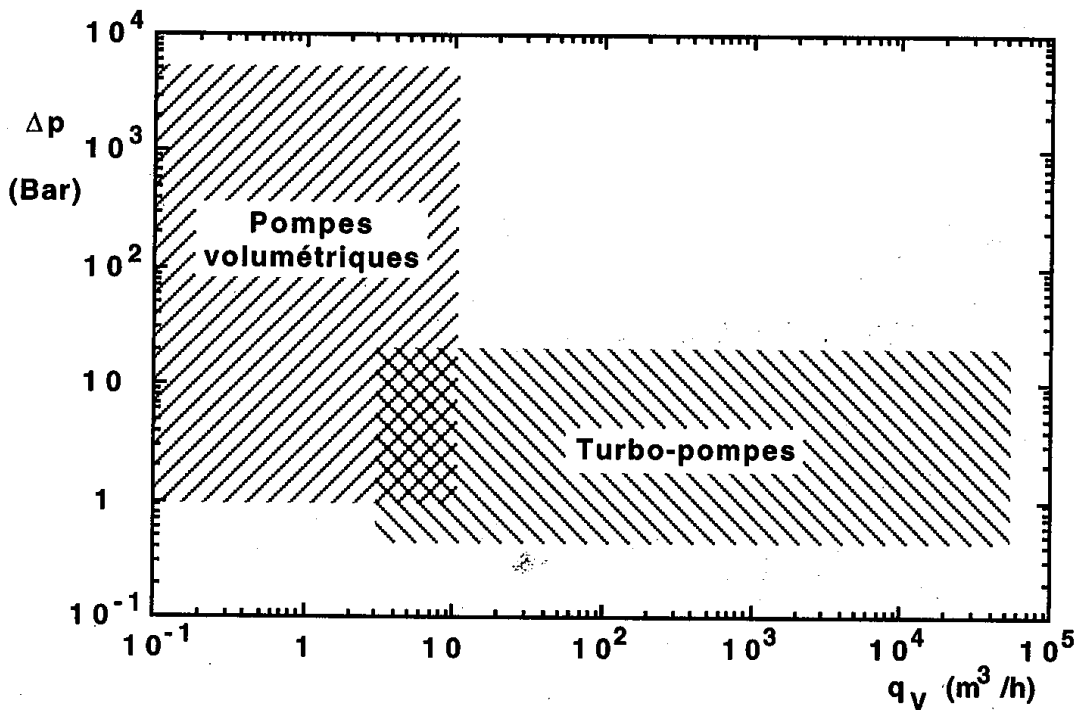


FIGURE II.13.2 – Domaines d’application des pompes volumétriques et hydrodynamiques. Illustration de [8], p221.

les **pompes volumétriques** forcent un volume de fluide, emprisonné dans un espace donné, à se déplacer de l’entrée vers la sortie à chaque tour de l’axe d’entraînement. Il en résulte que le débit véhiculé dépend de manière quasi exclusive de la vitesse de rotation de la pompe et indépendamment de la pression à l’amont et à l’aval de la pompe. Cette propriété est souvent utilisée pour faire de ces pompes des pompes doseuses capable de contrôler précisément la quantité de fluide envoyée vers la sortie.

les **pompes hydrodynamiques** sont constituées d’une pièce mobile (le rotor, aussi nommé roue ou hélice) qui tourne dans le carter appelé corps de pompe. C’est la rotation de la roue dans le fluide qui lui transmet de l’énergie avec la particularité toutefois que cette énergie peut se retrouver sous forme de vitesse ou de pression suivant les caractéristiques du réseau autour de la pompe. On notera que la suite de ce chapitre se focalise uniquement sur les pompes centrifuges qui sont de loin les plus utilisées hydraulique.

## II.13.2 Caractéristiques des pompes centrifuges

### II.13.2.1 Charge fournie par la pompe

On considère une pompe centrifuge installée entre deux réservoirs (voir figure II.13.3). On positionne les points suivants :

- A à la surface du réservoir amont
- B à la surface du réservoir aval
- E dans la conduite, en entrée de pompe
- S dans la conduite, en sortie de pompe



On suppose que la dénivelée  $z_E - z_A$  est suffisamment faible pour que l'installation fonctionne correctement. En effet, si la dénivelée sur la conduite d'aspiration est trop grande alors il y aura cavitation (voir partie II.13.3).

On écrit la relation de Bernoulli généralisée (II.10.7) entre B et A :

$$H_B - H_A = (H_B - H_S) + (H_S - H_E) + (H_E - H_A) \quad (\text{II.13.2})$$

où  $H_S - H_E$  représente la charge fournie par la pompe au fluide et où  $(H_B - H_S) + (H_E - H_A)$  correspond à la somme des pertes de charge rencontrées par le fluide lors du passage dans la conduite entre A et E puis entre S et B. On nomme  $H_S - H_E$  la hauteur manométrique totale ou  $HMT$ . Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} H_S - H_E = HMT &= H_B - H_A + (j_{AE} + j_{SB}) \\ HMT &= (z_B - z_A) + \left( \frac{P_B - P_A}{\rho g} \right) + \left( \frac{v_B^2 - v_A^2}{2g} \right) + (j_{AE} + j_{SB}) \end{aligned} \quad (\text{II.13.3})$$

L'analyse de (II.13.3) permet de voir que la charge fournie par la pompe au fluide permet :  
 +  $(z_B - z_A)$  de vaincre la différence d'altitude entre les deux réservoirs  
 +  $\frac{P_B - P_A}{\rho g}$  de fournir un gain de pression  
 +  $\frac{v_B^2 - v_A^2}{2g}$  de fournir un gain de vitesse (mais en aucun cas un gain de débit)  
 +  $(j_{AE} + j_{SB})$  de vaincre les pertes de charge rencontrées au long de l'écoulement

On est fréquemment dans le cas (bien que pas de manière systématique) où  $v_A = 0$  car le réservoir de pompage est grand. C'est l'hypothèse que nous ferons dans la suite de l'étude de cas.

#### II.13.2.1.1 Cas particulier : $P_B = P_A$ et $v_B \neq 0$

Il est fréquent de rencontrer  $P_B = P_A$  car dans les applications courantes d'ingénierie hydraulique, les points amonts (réservoir, source, forage, ...) et aval (réservoir, distribution chez l'abonné, ... se font à pression atmosphérique. Dans ce cadre, (II.13.3) devient :

$$HMT = (z_B - z_A) + \frac{v_B^2}{2g} + (j_{AE} + j_{SB}) \quad (\text{II.13.4})$$

On constate que la charge fournie par la pompe permet :  
 $z_B - z_A$  de vaincre la différence d'altitude entre les deux réservoirs  
 $\frac{v_B^2}{2g}$  de fournir la vitesse en sortie de conduite  
 $j_{AE} + j_{SB}$  de vaincre les pertes de charge rencontrées au long de l'écoulement

Quand le jet est totalement dirigé vers le haut (voir figure II.13.3, droit) on peut relier  $v_B$  et  $z_C$  en utilisant le théorème de Bernoulli :  $v_B = \sqrt{2g(z_C - z_B)}$ . (II.13.4) devient :

$$HMT = (z_C - z_A) + (j_{AE} + j_{SB}) \quad (\text{II.13.5})$$

où  $z_C - z_A$  est la hauteur réelle d'élévation correspondant à la différence d'altitude entre le fluide à l'amont et à l'aval de la pompe.

#### II.13.2.1.2 Cas particulier : $P_B = P_A$ et $v_B = 0$

Dans le cas où la pompe envoie le fluide dans un réservoir, on peut considérer que  $v_B = 0$ . Dans ce cadre, (II.13.3) devient :

$$HMT = (z_B - z_A) + (j_{AE} + j_{SB}) \quad (\text{II.13.6})$$

où  $z_B - z_A$  est la hauteur réelle d'élévation correspondant à la différence d'altitude entre le fluide à l'amont et à l'aval de la pompe. On a vu que les pertes de charge  $j_{AE} + j_{SB}$  augmentent avec

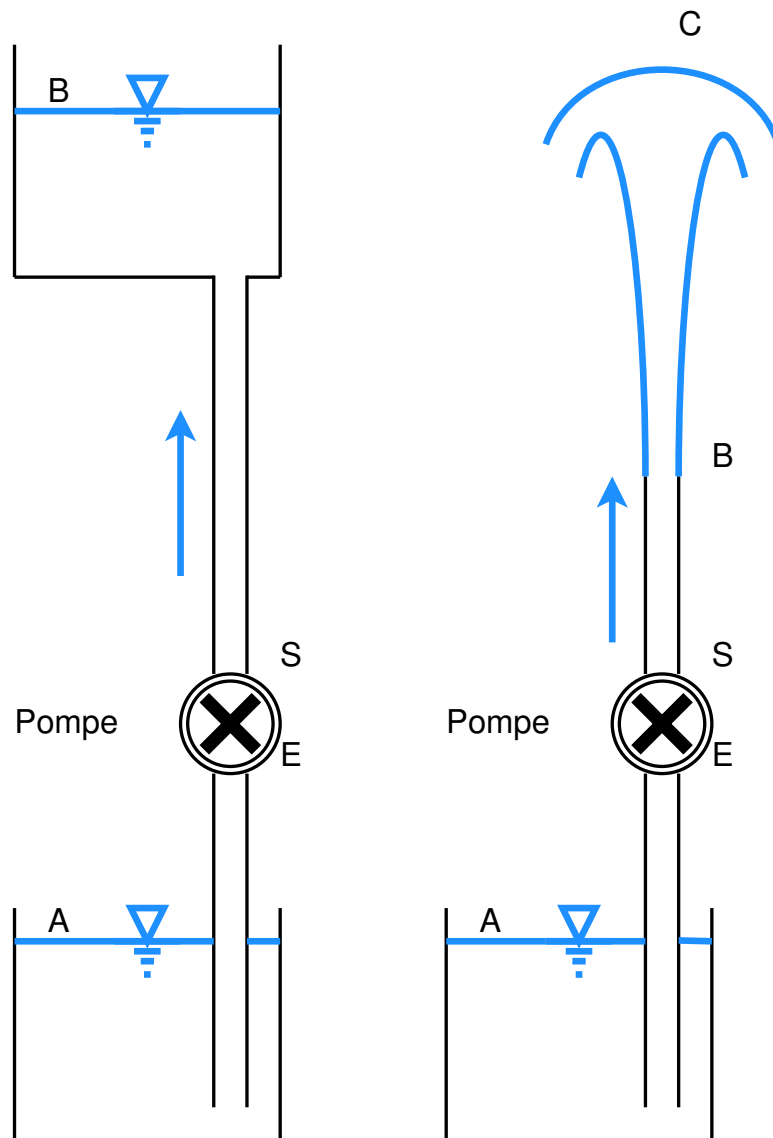


FIGURE II.13.3 – Schéma de l'installation de pompage. Illustration d'après [8].

le débit (voir équation (II.11.5)). On comprend donc que la hauteur d'élevation sera maximale à débit nul. On découpe souvent la hauteur maximale d'élevation en deux termes :

- $H_a$  la hauteur géométrique d'aspiration correspondant à la différence de côte entre l'axe de la pompe et le niveau A
- $H_r$  la hauteur géométrique de refoulement correspondant à la différence de côte entre le niveau B et l'axe de la pompe

Le terme  $H_a$  sert notamment pour les problématiques liées à la cavitation (voir partie II.13.3).

### II.13.2.2 Caractéristique $HMT$ - débit

Cette courbe caractéristique représente l'évolution de la hauteur manométrique totale  $HMT$  en fonction du débit. On a montré dans le paragraphe précédent que la hauteur manométrique est maximale quand le débit pompé est nul. Une analyse théorique sur une pompe idéale avec un fluide parfait permet de montrer que la  $HMT$  est une fonction linéaire du débit pompé (voir [11]) :

$$HMT = aQ + b \quad (\text{II.13.7})$$

Toutefois, le fluide n'étant pas parfait ni la pompe idéale, il faut tenir compte des pertes de charge rencontrées par le fluide lors du passage au travers de la pompe :  $\Delta H = \beta Q^2$ . La hauteur manométrique totale permet de véhiculer le débit et de vaincre les pertes de charges au travers de la pompe :  $HMT = aQ + b + \beta Q^2$ . On obtient donc une courbe caractéristique parabolique décroissante avec une  $HMT$  maximale atteinte à débit nul (voir figure II.13.4).

Dans la pratique, la courbe caractéristique est fournie par le constructeur car sa détermination ne peut se faire qu'expérimentalement. Il joint également la courbe rendement-débit qui caractérise l'efficacité de la pompe dans la transformation énergie mécanique  $E_m$  en énergie hydraulique  $E_h$ . et la courbe NPSH-débit (le NPSH sera défini à la partie II.13.3). On notera que la courbe de rendement atteint généralement un maximum plus ou moins aplati indiquant le débit optimal d'utilisation de la pompe.

# Caractéristiques hydrauliques

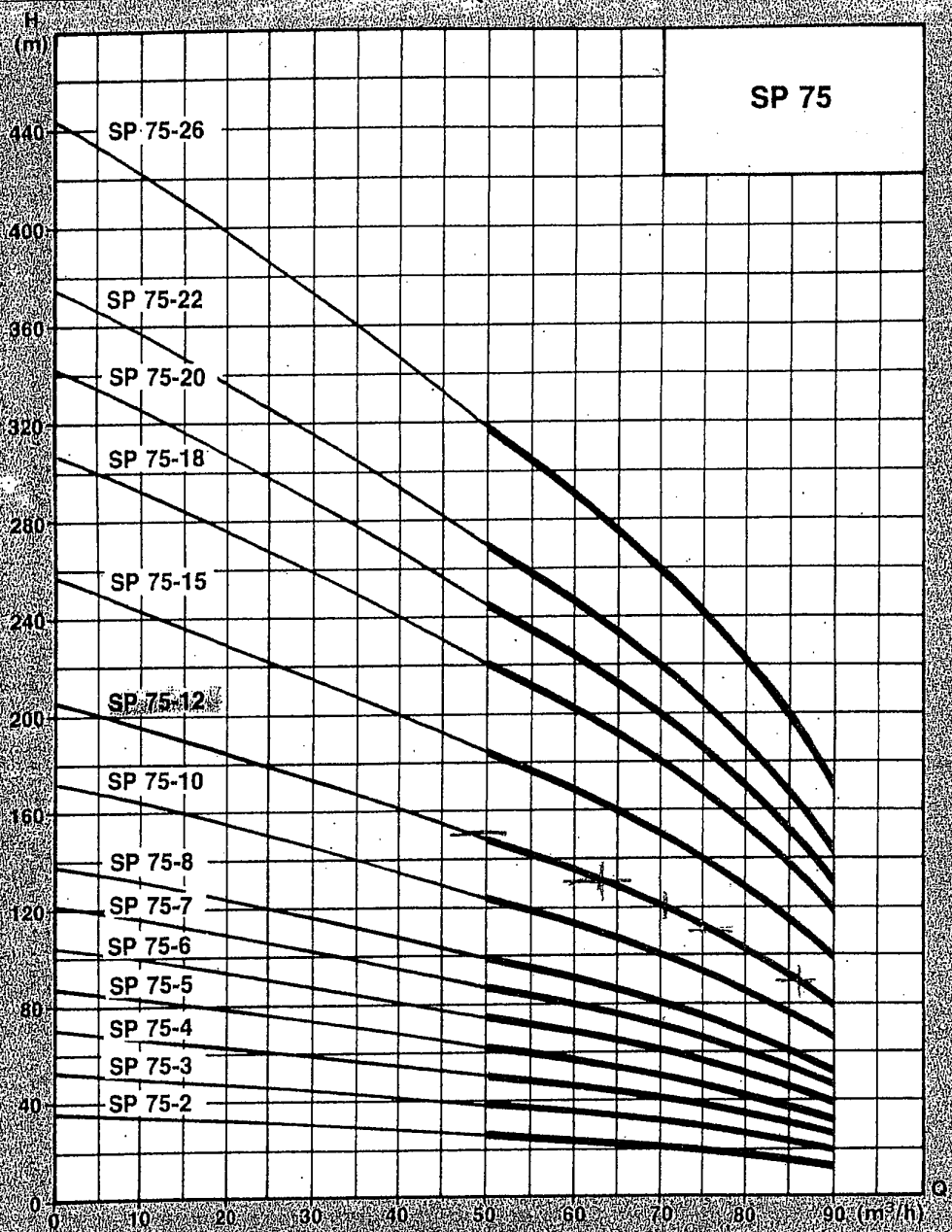
8-1-88

WELLERDINGEN

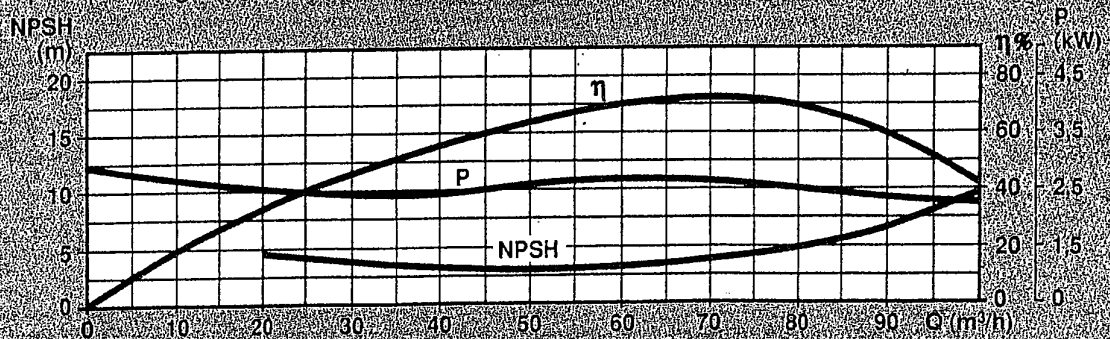
Pompes reprise dans bêche

SP 75 Installation horizontale sans type. A prov. SP 75-12

2850 tr/mn



Caractéristiques par étage (P = puissance en bout d'arbre moteur)



Pour toutes exécutions intermédiaires, nous consulter.

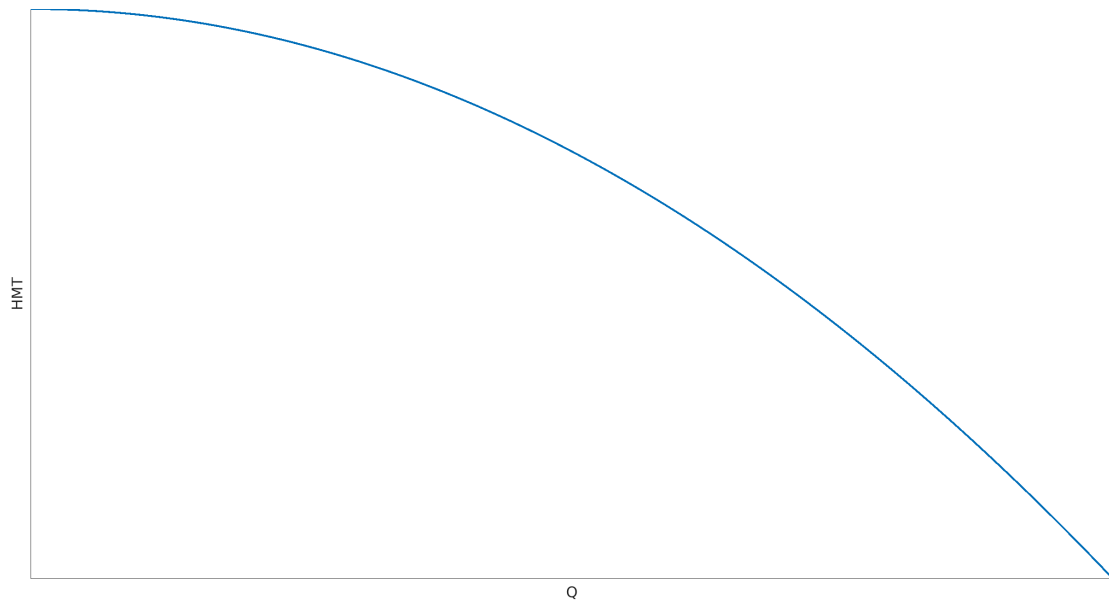


FIGURE II.13.4 – Courbes caractéristiques d’une pompe

### II.13.2.3 Calcul du point de fonctionnement d’une installation

Le point de fonctionnement d’une installation est défini par le couple  $(H, Q)$  auquel se stabilise l’écoulement en régime permanent. Ce point est déterminé par construction graphique à partir des courbes caractéristiques des deux systèmes :

- la pompe de caractéristique fournie par le constructeur  $HMT = f(Q)$
- le réseau de caractéristique fournie par le calcul  $CR = f(Q)$

Dans le cas général, on cherche graphiquement à vérifier (II.13.3). Dans les applications fréquemment rencontrées, (II.13.3) se simplifie en II.13.6 (pour un pompage entre deux réservoirs).

La caractéristique du réseau  $CR = f(Q)$  est obtenue à partir de la hauteur géométrique de l’installation  $(z_B - z_A)$  et de la courbe des pertes de charges  $j_{A \rightarrow B}(Q)$ . La hauteur géométrique ne dépend pas du débit et est donc une droite horizontale, en revanche, la courbe des pertes de charge augmente avec le débit. La caractéristique totale est donc la somme de ces deux courbes : pour véhiculer un débit  $Q$ , il faut vaincre la hauteur géométrique (faute de quoi, l’eau n’arrive pas au point aval) et les pertes de charge (voir figure II.13.5).

La superposition des deux courbes de l’installation et de la pompe permet de faire aisément apparaître le point de fonctionnement (voir figure II.13.6).

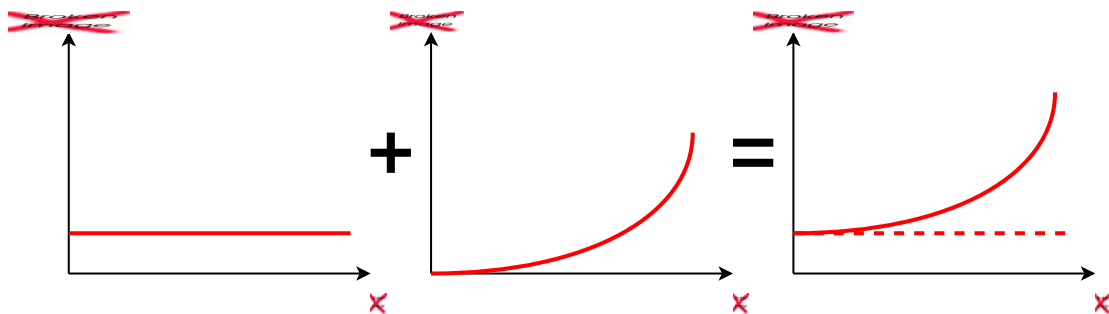


FIGURE II.13.5 – Caractéristique de l’installation. Illustration d’après [8].

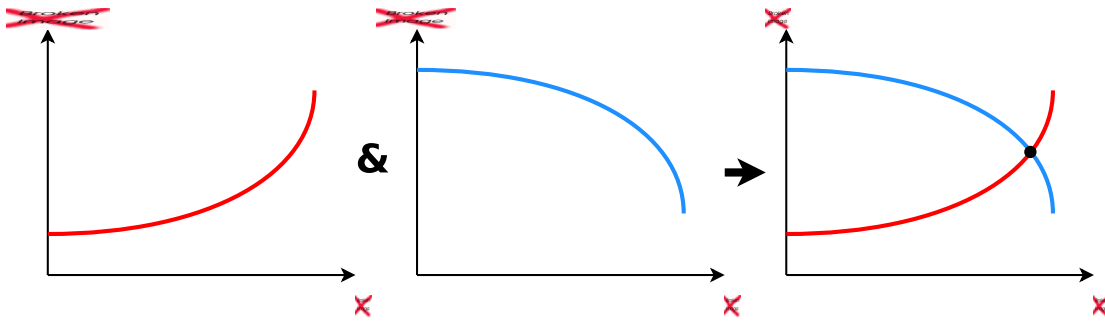


FIGURE II.13.6 – Caractéristique de l'installation. Illustration d'après [8].

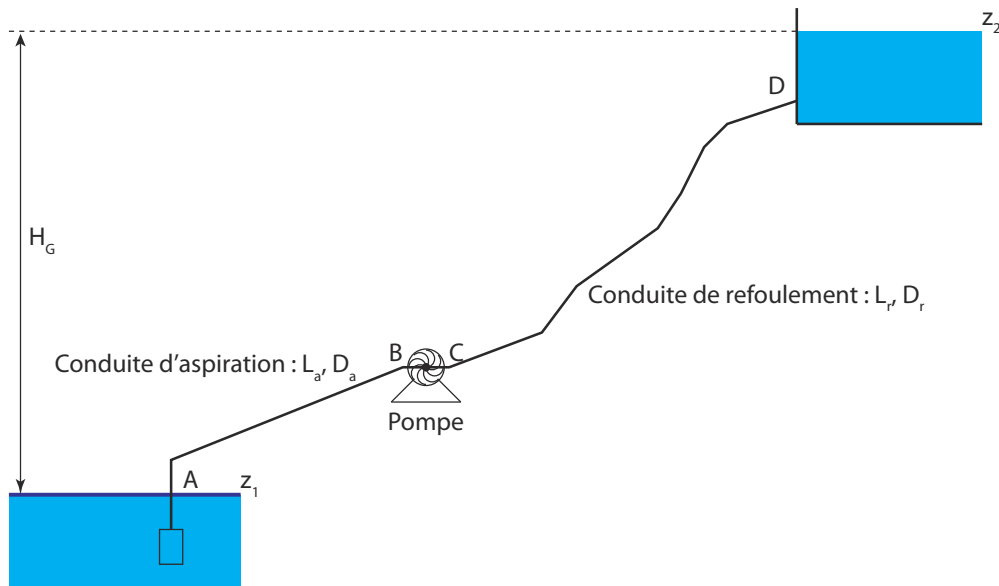


FIGURE II.13.7

### II.13.2.3.1 Mise en équation

On considère une installation de pompage classique (voir figure II.13.7).

Déterminons dans un premier temps la caractéristique du réseau en fonction du débit  $CR(Q)$  qui représente la charge nécessaire pour faire transiter le débit  $Q$  dans la conduite. Cela correspond donc à la somme des pertes de charge sur le trajet de l'eau :

$$CR(Q) = PdC_{AB} + PdC_{CD}$$

On cherche maintenant à calculer la différence de charge  $H_D - H_A$ . En introduisant la définition de la charge, on trouve :

$$\begin{aligned} H_D - H_A &= z_2 + \frac{P_{atm}}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} - \left( z_1 + \frac{P_{atm}}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right) \\ &= z_2 - z_1 \end{aligned}$$

où  $z_2 - z_1$  correspond à la hauteur géométrique de l'installation  $h_{geo}$  : c'est la variation d'altitude

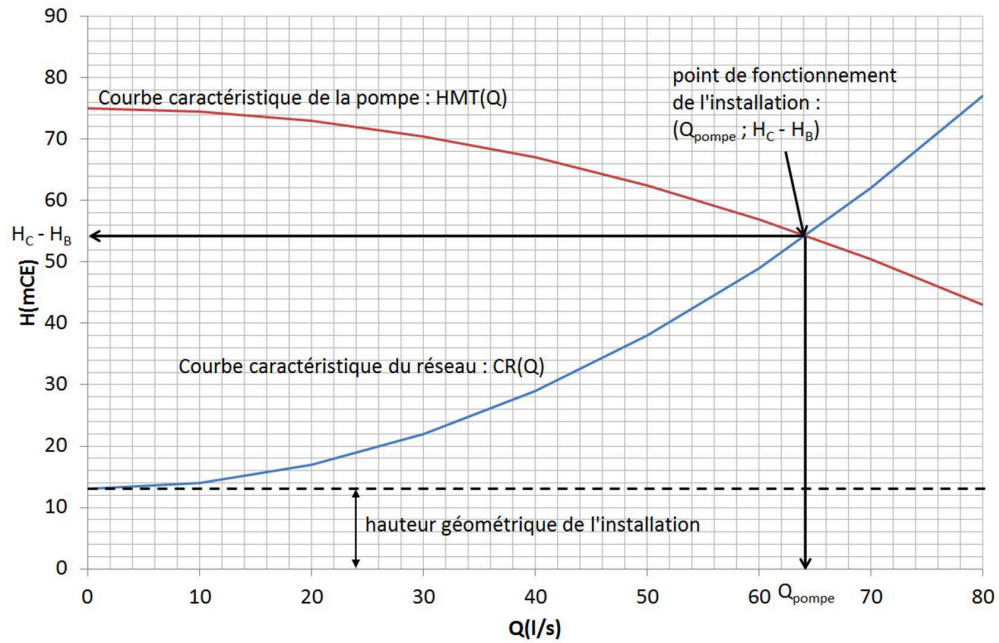


FIGURE II.13.8 – Exemple de courbe de fonctionnement

de l'eau. En appliquant le théorème de Bernoulli entre A et B et entre C et D, on obtient :

$$\begin{aligned} H_A &= H_B + PdC_{AB} \\ H_C &= H_D + PdC_{CD} \end{aligned}$$

On déduit que  $H_D - H_A$  vaut également :

$$\begin{aligned} H_D - H_A &= H_C - PdC_{CD} - H_B - PdC_{AB} \\ &= H_C - H_B - \sum PdC \\ &= H_C - H_B - CR(Q) \end{aligned}$$

On a donc :

$$H_C - H_B = h_{geo} + CR(Q) \tag{II.13.8}$$

La grandeur  $H_C - H_B$  correspond à la différence de charge entre la sortie et l'entrée de la pompe. Cette grandeur est nommée Hauteur Manométrique Totale ( $HMT$ ) et est une grandeur fournie par le constructeur de la pompe sous forme d'une courbe caractéristique donnant la  $HMT$  fournie par la pompe en fonction du débit qui la traverse.

On conclue donc que le point de fonctionnement doit vérifier l'équation (II.13.8). Ce point est aisément identifiable en utilisant une construction graphique.

### II.13.3 Cavitation à l'aspiration et NPSH

On a esquissé précédemment que le fonctionnement d'une pompe pouvait être dégradé dans le cas d'une hauteur d'aspiration  $H_a$  trop grande.

A l'entrée de la pompe et jusque dans la roue, le fluide est aspiré. Afin d'éviter tout phénomène de cavitation, il faut que la pression résiduelle en tout point de la pompe reste supérieure à la pression de vapeur saturante (voir partie I.1.4). En pratique le constructeur fournit la courbe

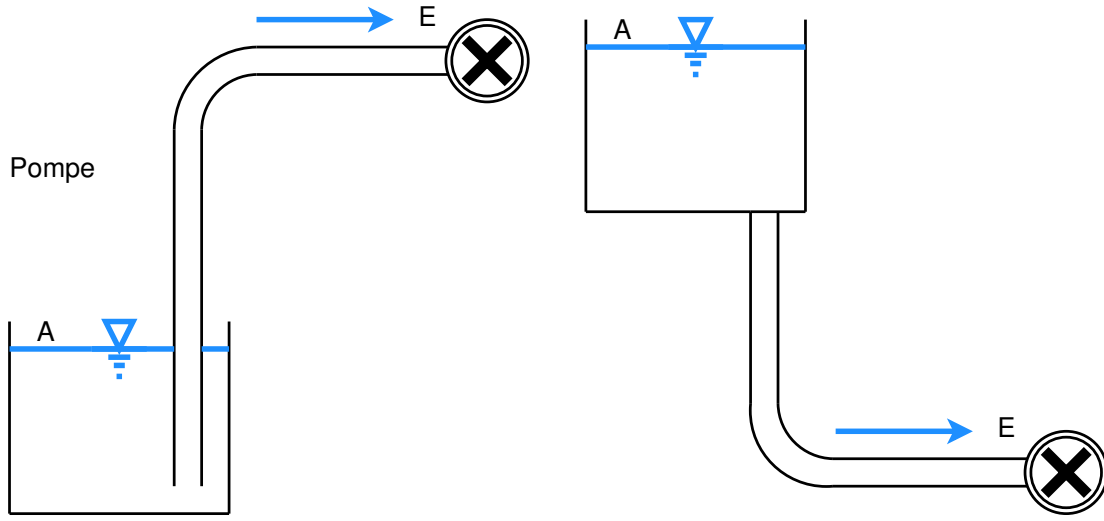


FIGURE II.13.9 – Pompes centrifuges à l'aspiration

$NPSH_r = f(Q)$  où  $NPSH_r$  représente la charge perdue entre l'entrée et la roue de la pompe. Le terme  $NPSH$  signifie « Net Positive Suction Head » ou « Charge hydraulique nette absolue à l'aspiration ». Pour garantir qu'il n'y ait pas cavitation, on comprend que la pression totale en entrée de pompe  $P_{tot,E}$  doit être supérieure à la pression de vapeur saturante  $p_v$  additionnée du  $NPSH$  requis ( $NPSH_r$ ) exprimé en unité de pression :

$$\begin{aligned} P_{tot,E} &> p_v + \rho g NPSH_r \\ \frac{P_{tot,E} - p_v}{\rho g} &> NPSH_r \end{aligned} \quad (\text{II.13.9})$$

avec  $P_{tot,E}$  la pression totale en entrée de pompe donnée par la relation :  $P_{tot,E} = P_E + \frac{V_E^2}{2g}$ . Le terme  $\frac{P_{tot,E} - p_v}{\rho g}$  est nommé le  $NPSH_d$  pour  $NPSH$  disponible. Pour éviter tout phénomène de cavitation, on a donc :

$$NPSH_d > NPSH_r \quad (\text{II.13.10})$$

En pratique, le  $NPSH_d$  doit être calculé sur la conduite d'aspiration de chaque installation. On écrit le théorème de Bernoulli entre A et E pour exprimer la pression en E puis le  $NPSH_d$  :

$$\begin{aligned} H_E &= H_A + j_{A \rightarrow E} \\ \frac{P_E}{\rho g} + z_E + \frac{V_E^2}{2g} &= \frac{P_A}{\rho g} + z_A + \frac{V_A^2}{2g} + j_{A \rightarrow E} \\ \frac{P_E}{\rho g} + \frac{V_E^2}{2g} &= \frac{P_A}{\rho g} - (z_E - z_A) + \frac{V_A^2}{2g} + j_{A \rightarrow E} \\ \frac{P_{tot,E} - p_v}{\rho g} &= \frac{P_A - p_v}{\rho g} - (z_E - z_A) + \frac{V_A^2}{2g} + j_{A \rightarrow E} \\ NPSH_d &= \frac{P_A - p_v}{\rho g} - H_a + j_{A \rightarrow E} \end{aligned} \quad (\text{II.13.11})$$

On notera que l'on passe de la ligne 4 à la ligne 5 en considérant un réservoir d'aspiration suffisamment grand pour que la vitesse  $V_A$  soit négligeable.

Dans l'expression du  $NPSH_d$  (II.13.11), la hauteur géométrique d'aspiration  $H_a$  peut être positive ou négative suivant l'installation (voir figure II.13.9 :  $H_a$  est positive dans le cas gauche, négative dans le cas droit).



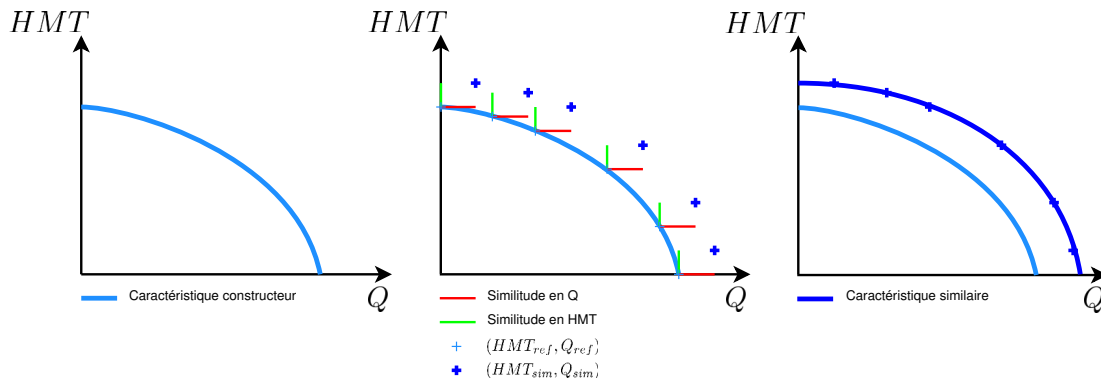


FIGURE II.13.10 – Calcul des caractéristiques similaires

## II.13.4 Relations de similitude

Nous avons supposé jusqu'à présent que la vitesse de rotation  $N$  de la pompe était fixe ainsi que le diamètre de la roue  $D$ . Il arrive toutefois que l'on change la vitesse de rotation du moteur d'entraînement, voire dans certains cas très particulier la roue même de la pompe. Nous nous intéressons ici à l'incidence de tels changements sur la caractéristique de la pompe. L'approche classique consiste à utiliser le théorème de Vaschy-Buckingham afin de déterminer l'influence théorique du diamètre de roue et de la vitesse de rotation sur le débit et la  $HMT$ . Cette analyse est réalisée en totalité dans [11] et seules les résultats seront présentés ici. On trouve ainsi que les relations  $Q = f(D, N)$  et  $HMT = g(D, N)$  sont de la forme :

$$\begin{aligned} Q &= \alpha_Q N D^3 \\ HMT &= \alpha_{HMT} N^2 D^2 \end{aligned}$$

où  $\alpha_Q$  et  $\alpha_{HMT}$  sont deux coefficients de proportionnalité qui ne dépendent ni de  $N$  ni de  $D$ . Par ailleurs, l'expression de la puissance hydraulique fournie par la pompe au fluide étant  $P = \rho g \times Q \times HMT$ , on en déduit que la puissance est influencée par  $N$  et  $D$  suivant la relation :

$$P = \alpha_P N^3 D^4$$

Ces trois relations sont appelées des relations de similitude. Notamment, elles permettent de retrouver, à partir de la caractéristique fournie par le constructeur pour un diamètre  $D_{ref}$  et une vitesse de rotation  $N_{ref}$  de référence, la courbe caractéristique pour un autre diamètre et/ou une autre vitesse de rotation. Pour cela, il faut appliquer les relations de similitudes à partir de couples  $(HMT_{ref}, Q_{ref})$  choisis sur la caractéristique de référence pour en déduire les points similaires  $(HMT_{sim}, Q_{sim})$  de la nouvelle caractéristique (voir figure II.13.10).

## II.13.5 Assemblage de pompes

Malgré le grand nombre de modèles de pompes existants chez les différents fabricants, il est rare de trouver la pompe qui permet de trouver exactement le point de fonctionnement souhaité. Par ailleurs, afin de s'adapter à la variation des besoins dans le temps (au cours de la journée, de la saison, ...) et de permettre une sécurisation de l'alimentation en eau en cas de casse sur une pompe, il peut être souhaitable de disposer de plusieurs pompes sur une même conduite ; pompes qui pourront être identique ou non et éventuellement mise en marche de manière variable dans le temps. L'objectif de cette partie est de présenter l'incidence sur le réseau d'un assemblage de pompes en terme de point de fonctionnement. Pour cela, on calcule la caractéristique équivalente

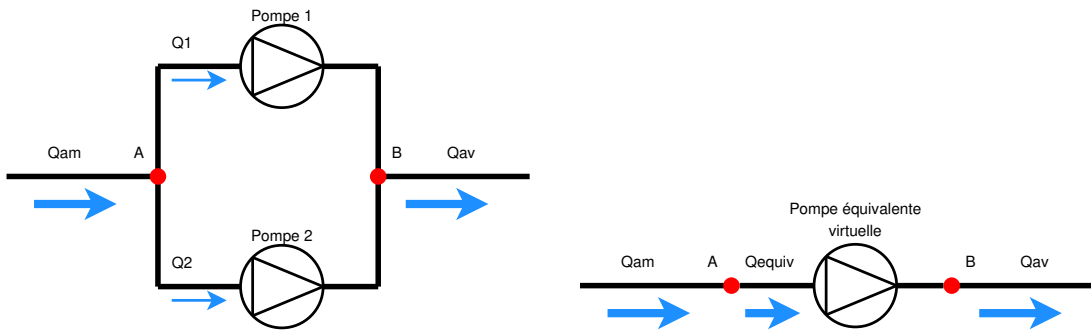


FIGURE II.13.11 – Assemblage de pompes en parallèle. A gauche : Montage réel. A droite : Montage équivalent virtuel

aux pompes assemblées. La détermination du point de fonctionnement de l'installation se fait alors de manière classique (voir partie II.13.2.3).

Cette partie traite uniquement de l'assemblage de deux pompes. Toutefois, lors d'assemblage mettant en jeu plus de 2 pompes, la méthodologie de calcul reste la même, y-compris lors d'assemblage complexe (mettant en jeu des pompes en série et en parallèle).

### II.13.5.1 Pompes en parallèle

L'assemblage de pompes en parallèle consiste à séparer le débit de la conduite d'aspiration entre les différentes pompes en parallèle avant de le réunir dans la conduite de refoulement (voir figure II.13.11).

On cherche ici à déterminer la caractéristique de la pompe équivalente aux deux pompes en parallèle. En régime permanent, il paraît évident que :

$$\begin{aligned} Q_{am} &= Q_{av} = Q_{equiv} \\ Q_{am} &= Q_1 + Q_2 \end{aligned} \quad (\text{II.13.12})$$

Par ailleurs, la charge en un point étant unique, la différence de charge  $H_B - H_A$  est unique, que l'on considère chacune des branches du montage réel ou la branche équivalente virtuelle. Ainsi, pour une différence de charge quelconque  $H_B - H_A$ , on aura toujours :  $Q_{am}(H_B - H_A) = Q_1(H_B - H_A) + Q_2(H_B - H_A)$  et donc  $Q_{equiv}(H_B - H_A) = Q_1(H_B - H_A) + Q_2(H_B - H_A)$ . Cela revient donc à sommer les débits transitant dans chacune des pompes pour chacune des  $HMT$  possibles (voir figure II.13.12).

Une fois le calcul de la courbe caractéristique équivalente effectué, le calcul du point de fonctionnement de l'installation se fait tout à fait classiquement par la méthode graphique (voir figure II.13.13). Toutefois, la différence de charge correspondant au point de fonctionnement correspond à la différence de charge appliquée sur chacune des branches. Ainsi, il est aisé de retrouver le débit transitant dans chacune des pompes réelles.

### II.13.5.2 Pompes en séries

L'assemblage de pompes en séries consiste à installer les pompes sur une unique conduite. En raison de la conservation de la masse en régime permanent, le débit dans la conduite est donc le même pour chaque pompe (voir figure II.13.14).

On cherche ici à déterminer la caractéristique de la pompe équivalente aux deux pompes en série. Le débit dans chacune des pompes est le même. Pour un débit donné, la caractéristique constructeur indique la  $HMT$  fournie par la pompe. Ainsi, si l'on écrit le théorème de Bernoulli

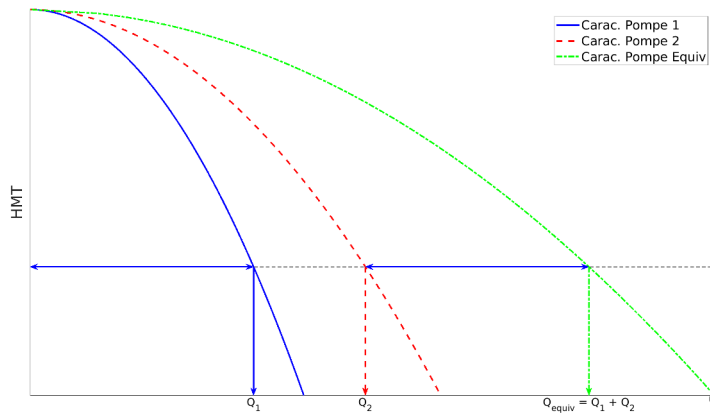


FIGURE II.13.12 – Calcul de la courbe caractéristique de la pompe équivalente à un montage parallèle. On notera que dans cet exemple la charge fournie à débit nul par les deux pompes réelles est la même. Il est évidemment possible d’assembler deux pompes pour lesquelles cela ne serait pas le cas. Toutefois, il faut alors prendre des précautions techniques.

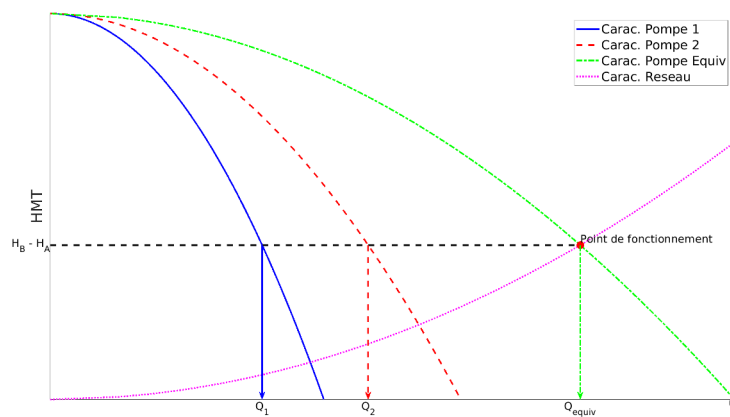


FIGURE II.13.13 – Calcul du point de fonctionnement d’une installation en parallèle

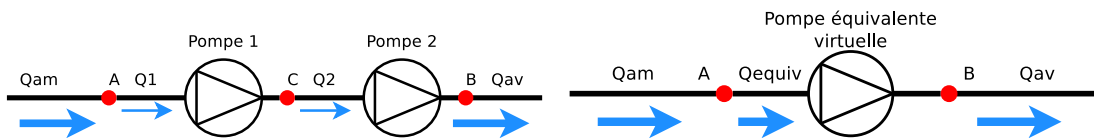


FIGURE II.13.14 – Assemblage de pompes en série. A gauche : Montage réel. A droite : Montage équivalent virtuel

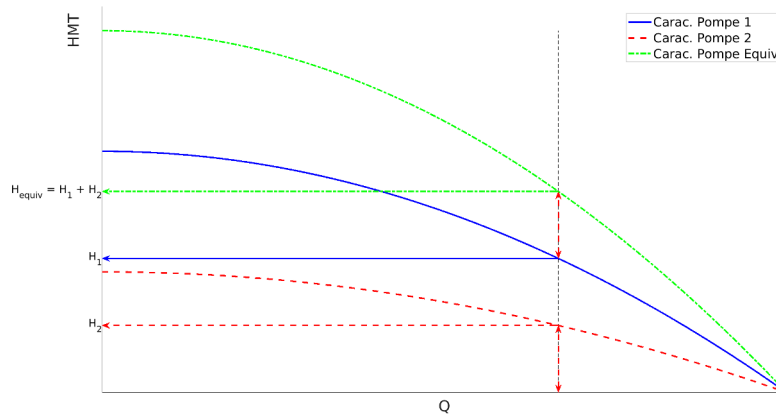


FIGURE II.13.15 – Calcul de la courbe caractéristique de la pompe équivalente à un montage série. On notera que le débit maximal fournit pour chaque pompe réelle à charge nulle est le même. Il est évidemment possible d’assembler deux pompes pour lesquelles cela ne serait pas le cas. Toutefois, il faut alors prendre des précautions techniques.

entre A et C puis entre C et B, on a :

$$\begin{aligned} H_C &= H_A + HMT_1 \\ H_B &= H_C + HMT_2 \end{aligned}$$

On en déduit donc que  $H_B - H_A = HMT_1 + HMT_2$ ; or  $H_B - H_A = HMT_{equiv}$ . En série, pour chaque débit, la  $HMT$  résultante de l’association est donc la somme des  $HMT$  de chacune des pompes assemblées pour ce même débit (voir figure II.13.15).

Une fois le calcul de la courbe caractéristique équivalente effectué, le calcul du point de fonctionnement de l’installation se fait tout à fait classique par la méthode graphique (voir figure II.13.16). Toutefois, le débit correspondant au point de fonctionnement correspond au débit réel transitant dans chacune des pompes. Ainsi, il est aisé de retrouver la  $HMT$  fournie par chacune des pompes réelles.

### II.13.5.3 Pompes multicellulaires

Les pompes multicellulaires sont fréquemment rencontrées en ingénierie hydraulique notamment pour jouer le rôle de surpresseur.

En effet, ces pompes sont constituées de plusieurs roues. L’assemblage des roues dans le corps de pompes est fait en série. La conception d’une pompe multicellulaire est généralement prévue pour être simple et surtout modulable. Ainsi, le constructeur ne connaît généralement que la caractéristique d’une seule roue et suivant la caractéristique désirée par l’utilisateur, il détermine le nombre de roues à assembler en série.

#### Pour aller plus loin

On pourra se référer aux ouvrages suivants :

**[8]** : présentation détaillée des différents types de pompes, relations descriptives des pompes volumétriques, effet détaillé de la cavitation sur une installation de pompage

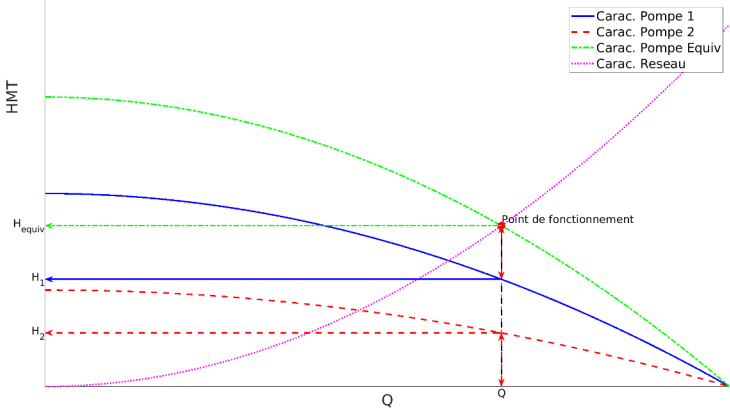


FIGURE II.13.16 – Calcul du point de fonctionnement d’une installation en série



# Chapitre II.14

## Le coup de bélier

### II.14.1 Présentation du phénomène

Toute modification du régime permanent de l'écoulement dans un réseau de conduites (démarrage ou arrêt d'une pompe, fermeture d'une vanne, etc.) se traduit par l'apparition d'ondes qui se propagent à la fois dans le fluide mais également dans les conduites qui l'entourent. Ces ondes sont susceptibles de provoquer des phénomènes se caractérisant par des variations brutales de la vitesse et de la pression ; on parle de « coups de bélier ». Les conséquences néfastes des coups de bélier sont la rupture de canalisations ou encore la détérioration d'appareils traversés par l'écoulement. Il est donc important d'être capable de prévoir ces phénomènes hautement in-stationnaires et de déterminer leur amplitude. Si besoin, un dispositif de protection doit être installé.

L'objectif de cette partie est de faire comprendre ces phénomènes complexes au moyen d'une description mathématique simplifiée.

### II.14.2 Nature des ondes

Les ondes rencontrées peuvent être de deux types :

- des ondes de surpressions : la pression en un point après le passage de l'onde est plus importante qu'avant son passage
- des ondes de dépressions : la pression diminue au passage de l'onde

La rencontre d'une onde avec un « obstacle » entraîne sa réflexion. Ainsi une onde est renvoyée dans la direction opposée. Suivant la nature de l'obstacle, l'onde pourra également changer de nature :

- rencontre avec un obstacle rigide (ne laissant pas passer l'eau) : l'onde est réfléchie mais ne change pas de nature. Ainsi lorsqu'une onde de dépression rencontre une vanne fermée, elle se réfléchit et reste une onde de dépression.
- rencontre avec un obstacle « souple » (pour lequel la pression est maintenue constante (par exemple : un réservoir) : l'onde se réfléchit et change de nature. Ainsi lorsqu'une onde de surpression rencontre un réservoir, elle se réfléchit et devient une onde de dépression.

### II.14.3 Calcul des célérités d'onde

En milieu infini non confiné, la célérité des ondes a pour expression :

$$c = \sqrt{\frac{\chi}{\rho}} \quad (\text{II.14.1})$$

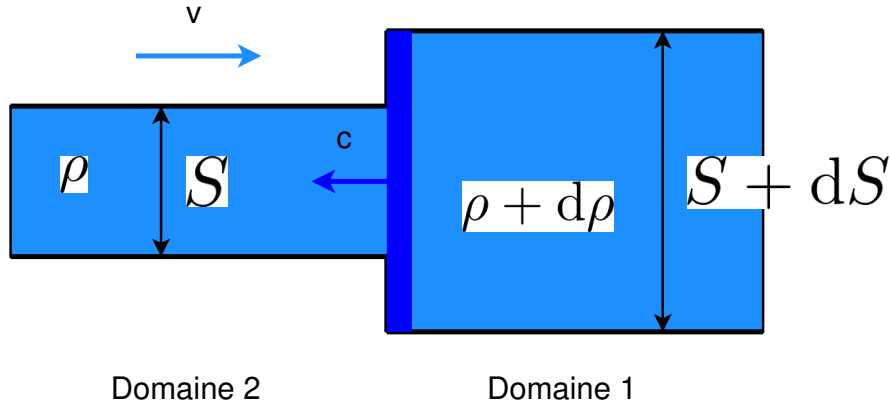


FIGURE II.14.1 – Illustration du phénomène de propagation d’onde

où  $\chi$  est le coefficient de compressibilité du fluide. Pour l’eau, on trouve ainsi une vitesse de propagation d’onde proche de  $1000\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

En conduite, la célérité des ondes est toujours plus faible que cette valeur approchée. Dans le cas d’une canalisation de faible épaisseur, la célérité des ondes peut être approchée par l’expression suivante :

$$c = \frac{\sqrt{\frac{\chi}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{CD\chi}{eE}}} \quad (\text{II.14.2})$$

où  $C$  est le coefficient d’ancrage,  $D$  le diamètre intérieur de la conduite,  $e$  l’épaisseur de la conduite et  $E$  le module d’Young du matériau de la conduite. Pour d’autres configurations de conduite (parois épaisses, galeries creusées dans de la roche brute, d’autres formulations existent (voir [11]).

#### II.14.4 Conservation de la masse dans un écoulement traversé par une onde

Soit un écoulement permanent dans une conduite terminée par une vanne. Suite à la fermeture brutale d’une vanne, un coup de bélier se produit : une onde de célérité  $c$  prend naissance au niveau de la vanne et se propage vers l’amont.

On peut assimiler l’onde à une surface de discontinuité divisant la conduite en deux domaines distincts (voir figure II.14.1).

Le domaine 1 est situé entre l’extrémité aval de la conduite (la vanne fermée) et le front de l’onde. Dans ce domaine, la fermeture de la vanne impose une vitesse de l’écoulement nulle qui génère une modification de la masse volumique du fluide  $\rho + d\rho$  et de la section de la conduite  $S + dS$ . Le domaine 2 est constitué de la partie complémentaire de la conduite. Dans la mesure où le domaine 2 n’a pas encore été atteint par l’onde, les conditions d’écoulement n’ont pas été modifiées : la vitesse de l’écoulement vaut  $v$  ; la masse volumique de l’eau  $\rho$  ; la section de la conduite  $S$ .

En faisant un bilan de masse entre deux positions successives de l’onde séparées par un instant  $dt$ , on peut écrire que la masse qui est entrée dans le domaine 1  $M_1$  est égale à la masse sortie du domaine 2  $M_2$  :

$$\begin{aligned} M_1 &= (\rho + d\rho)(S + dS)cdt \\ M_2 &= \rho S(v + c)dt \end{aligned} \quad (\text{II.14.3})$$



Ainsi :

$$(\rho + d\rho)(S + dS)c = \rho S(v + c) \quad (\text{II.14.4})$$

En divisant par  $\rho S$  et en négligeant le terme de variation combinée de la masse volumique et de la section, on peut écrire :

$$\frac{dS}{S} + \frac{d\rho}{\rho} = \frac{v}{c} \quad (\text{II.14.5})$$

Ce résultat sera utilisé par la suite.

## II.14.5 Équation aux caractéristiques

Nous cherchons un moyen de déterminer à tout instant et en toute position la valeur du débit et de la pression à l'intérieur d'une conduite soumise à un coup de bélier. Pour cela, nous allons essayer de trouver un lien simple entre la vitesse moyenne de l'écoulement et la pression  $p^*$  exprimée en mCE.

Les équations de base, établies en faisant un bilan de masse et de quantité de mouvement sur un tronçon de conduite s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} - gJ \end{aligned} \quad (\text{II.14.6})$$

où  $t$  est le temps,  $x$  l'abscisse curviligne suivant la canalisation (pas nécessairement horizontale),  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $S$  la section de l'écoulement (section intérieure de la conduite),  $v$  la vitesse moyennée sur la section,  $p^* = p + \rho g z$ ,  $p$  la pression relative par rapport à la pression atmosphérique,  $g$  l'accélération gravitationnelle,  $z$  la cote altimétrique (axe vertical) et  $J$  le coefficient adimensionnel de perte de charge. Ces équations bien que mettant en relation les variables qui nous intéressent sont complexes voire impossible à résoudre à la main et requièrent souvent de faire appel à la modélisation numérique. Nous allons donc transformer ces équations pour obtenir une forme plus simple à résoudre.

En notant que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho S v}{\partial x} &= \rho S \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho S}{\partial x} \\ \frac{D \rho S}{Dt} &= \frac{\partial \rho S}{\partial t} + v \frac{\partial \rho S}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{II.14.7})$$

on peut transformer l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{D \rho S}{Dt} + \rho S \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.14.8})$$

En divisant cette expression par  $\rho S$ , en utilisant l'équation (II.14.5) et en multipliant par la célérité d'onde  $c$ , on obtient une équation simplifiée liant la pression étoilé  $p^*$  et la vitesse :

$$\frac{1}{\rho v} \frac{D p^*}{Dt} + c \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.14.9})$$

En ajoutant et retranchant membre à membre cette équation et l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on obtient deux équations :

$$\left[ \frac{\partial v}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{1}{\rho c} \left[ \frac{\partial p^*}{\partial t} + (v + c) \frac{\partial p^*}{\partial x} \right] = -gJ \quad (\text{II.14.10a})$$

$$\left[ \frac{\partial v}{\partial t} + (v - c) \frac{\partial v}{\partial x} \right] - \frac{1}{\rho c} \left[ \frac{\partial p^*}{\partial t} + (v - c) \frac{\partial p^*}{\partial x} \right] = -gJ \quad (\text{II.14.10b})$$

Le premier crochet de l'équation (II.14.10a) (respectivement (II.14.10b)) correspond à la dérivée particulière de  $v$  :  $Dv/Dt$  en suivant une particule se déplaçant à la vitesse  $v + c$  (respectivement  $v - c$ ). De la même façon, le second crochet correspond à la dérivée particulière de  $p^*$ .

Les équations (II.14.10a) et (II.14.10b) peuvent donc s'écrire :

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{1}{\rho c} \frac{Dp^*}{Dt} = -gJ \quad \text{avec} \quad \frac{dx}{dt} = v + c \quad (\text{II.14.11a})$$

$$\frac{Dv}{Dt} - \frac{1}{\rho c} \frac{Dp^*}{Dt} = -gJ \quad \text{avec} \quad \frac{dx}{dt} = v - c \quad (\text{II.14.11b})$$

Dans un cas réel, la célérité des ondes (environ  $1000\text{m.s}^{-1}$ ) est très grande devant  $v$  (environ  $1\text{m.s}^{-1}$ ) et on peut approximer  $v + c$  (respectivement  $v - c$ ) par  $c$  (respectivement  $-c$ ). Par ailleurs, dans le cas où il n'y a pas de pertes de charge ( $J = 0$ ), on peut obtenir :

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{cQ}{gS} + y \right) = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{dx}{dt} = +c \quad (\text{II.14.12a})$$

$$\frac{D}{Dt} \left( -\frac{cQ}{gS} + y \right) = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{dx}{dt} = -c \quad (\text{II.14.12b})$$

Ces équations traduisent le fait que la quantité  $\frac{cQ}{gS} + y$  (respectivement  $-\frac{cQ}{gS} + y$ ) ne change pas pour un observateur qui se déplace à la vitesse  $c$  (respectivement  $-c$ ).

C'est cette particularité qui est utilisée pour résoudre simplement les problématiques de coup de bélier.

## II.14.6 Exemple d'application

### II.14.6.1 Application à la fermeture instantanée d'une vanne



Coup de bélier: fermeture de vanne rapide

#### II.14.6.1.1 Description du problème

On considère une conduite quittant un réservoir de niveau  $z_0$  et terminée par une vanne à la cote  $z_1$ . La vanne est initialement ouverte avec un débit permanent  $Q_0$  et une piézométrie constante (pas de perte de charge)  $y_0 = z_0 - z_1$  jusqu'à l'instant  $t = 0$  où la vanne se ferme (voir figure II.14.2). La fermeture de la vanne entraîne l'apparition d'une onde qui se déplace à la vitesse  $c$ . Elle parcourt la longueur de canalisation entre la vanne et le réservoir en  $L/c$ . On utilise désormais le temps adimensionnalisé :  $T^* = \frac{t}{L/c}$ . Par exemple, l'onde générée à  $t = 0$  ( $T^* = 0$ ) par la fermeture de la vanne arrivera au réservoir pour  $T^* = 1$ .

#### II.14.6.1.2 $0 < T^* < 1$

L'onde de surpression liée à la fermeture de la vanne remonte la conduite (voir figure II.14.3). Elle engendre une augmentation de la ligne piézométrique de  $cQ_0/gS_0$  qui se traduit par une dilatation de la conduite.

**Calcul de l'augmentation de la ligne piézométrique** L'onde se déplace à la vitesse  $-c$  vers le réservoir. On utilise l'équation (II.14.12b) suivant  $c$  à travers l'onde qui se déplace :

$$\frac{cQ_0}{gS_0} + y_0 = \frac{cQ_1}{gS_1} + y_1 \quad (\text{II.14.13})$$

Dans la mesure où  $Q_1 = 0$  (car le débit est arrêté par la vanne), on obtient :

$$y_1 = \frac{cQ_0}{gS_0} + y_0 \quad (\text{II.14.14})$$

### II.14.6.1.3 $T^* = 1$

L'onde de surpression arrive exactement au réservoir (voir figure II.14.4). Si il est suffisamment grand (hypothèse utilisée par la suite), son niveau ne varie pas et la piézométrie  $y$  est maintenue à  $y_0$ . La rencontre de l'onde avec le réservoir crée une onde de dépression qui se propage vers la vanne.

### II.14.6.1.4 $1 < T^* < 2$

L'onde de dépression se propage vers la vanne (voir figure II.14.5). A l'aval de cette onde, la piézométrie reste égale à  $y_1$  et le débit  $Q_1$  reste nul. A l'amont de cette onde, la piézométrie est fixée par le réservoir et on obtient donc une vitesse du fluide dans la conduite de  $(y_0 - y_1)g/c$ . On notera que cette vitesse est négative : l'eau coule vers le réservoir.

**Calcul de la vitesse du fluide** L'onde se déplace à la vitesse  $c$  vers la vanne. On utilise l'équation (II.14.12a) suivant  $-c$  à travers l'onde qui se déplace :

$$-\frac{cQ_0}{gS_0} + y_0 = -\frac{cQ_1}{gS_1} + y_1 \quad (\text{II.14.15})$$

Dans la mesure où  $Q_1 = 0$ , on obtient :

$$U_0 = \frac{Q_0}{S_0} = (y_0 - y_1) \frac{g}{c} \quad (\text{II.14.16})$$

### II.14.6.1.5 $T^* = 2$

L'onde de dépression arrive exactement à la vanne fermée (voir figure II.14.6). La rencontre de l'onde avec la vanne crée une onde de dépression qui se propage vers le réservoir.

### II.14.6.1.6 $2 < T^* < 3$

L'onde de dépression se propage vers le réservoir (voir figure II.14.7). A l'aval de cette onde, la piézométrie reste égale à  $y_0$  et le débit  $Q_0$  transite vers le réservoir. A l'amont de cette onde, la piézométrie vaut  $y_1 = y_0 + cQ_0/gS_0$  et le débit du fluide est nul car la vanne fermée empêche tout déplacement. Attention :  $y_1$  est bien inférieure à  $y_0$  (c'est une dépression) car  $Q_0 < 0$  : l'eau retourne vers le réservoir.

**Calcul de l'augmentation de la ligne piézométrique** L'onde se déplace à la vitesse  $-c$  vers le réservoir. On utilise l'équation (II.14.12b) suivant  $c$  à travers l'onde qui se déplace :

$$\frac{cQ_0}{gS_0} + y_0 = \frac{cQ_1}{gS_1} + y_1 \quad (\text{II.14.17})$$

Dans la mesure où  $Q_1 = 0$  (car le débit est arrêté par la vanne), on obtient :

$$y_1 = \frac{cQ_0}{gS_0} + y_0 \quad (\text{II.14.18})$$

Attention :  $Q_0$  est négatif donc  $y_1 < y_0$ .

#### II.14.6.1.7 $T^* = 3$

L'onde de dépression arrive exactement au réservoir (voir figure II.14.8). Si il est suffisamment grand (hypothèse utilisée par la suite), son niveau ne varie pas et la piézométrie y est maintenue à  $y_0$ . La rencontre de l'onde avec le réservoir crée une onde de surpression qui se propage vers la vanne.

#### II.14.6.1.8 $3 < T^* < 4$

L'onde de surpression se propage vers la vanne (voir figure II.14.9). A l'aval de cette onde, la piézométrie reste égale à  $y_1$  et le débit  $Q_1$  reste nul. A l'amont de cette onde, la piézométrie est fixée par le réservoir et on obtient donc une vitesse du fluide dans la conduite de  $(y_0 - y_1)g/c$ . On notera que cette vitesse est positive : l'eau coule vers la vanne.

**Calcul de la vitesse du fluide :** L'onde se déplace à la vitesse  $c$  vers la vanne. On utilise l'équation (II.14.12a) suivant  $-c$  à travers l'onde qui se déplace :

$$-\frac{cQ_0}{gS_0} + y_0 = -\frac{cQ_1}{gS_1} + y_1 \quad (\text{II.14.19})$$

Dans la mesure où  $Q_1 = 0$ , on obtient :

$$U_0 = \frac{Q_0}{S_0} = (y_0 - y_1) \frac{g}{c} \quad (\text{II.14.20})$$

#### II.14.6.1.9 $T^* = 4$

L'onde de surpression arrive exactement à la vanne fermée (voir figure II.14.2). La rencontre de l'onde avec la vanne crée une onde de surpression qui se propage vers le réservoir. Dans la mesure où les pertes de charge ont été négligées, il n'y a pas d'atténuation du phénomène et il se perpétuera à l'infini. Par ailleurs, on est revenu dans la configuration identique à celle de la fermeture de la vanne.

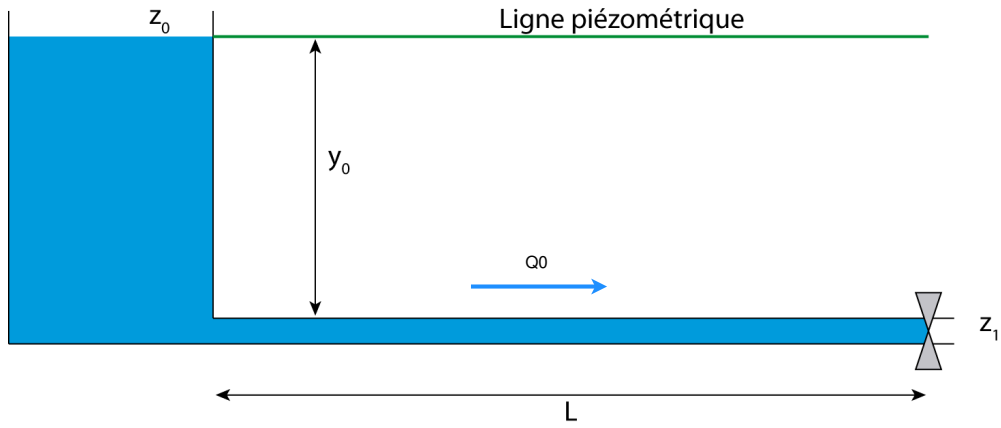


FIGURE II.14.2 –  $T^* = 0$  : Fermeture instantanée de la vanne

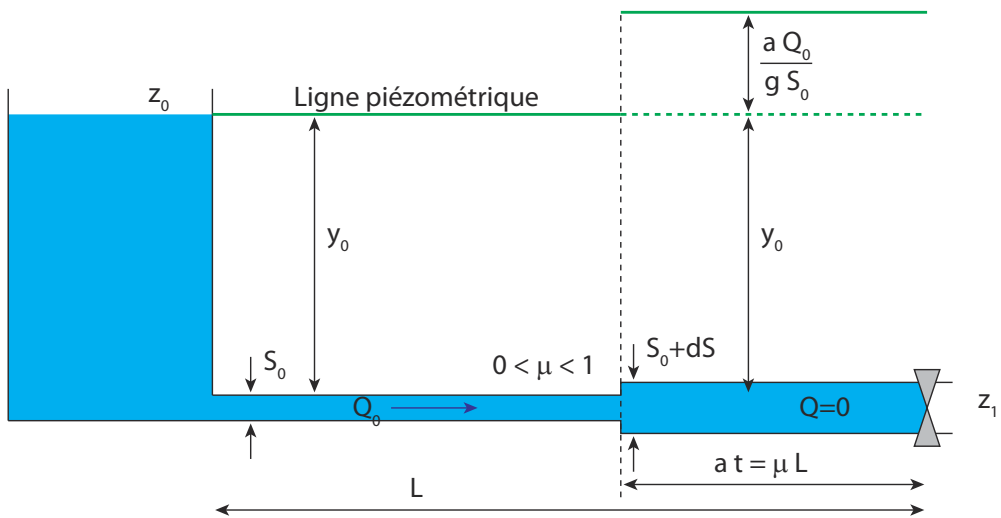


FIGURE II.14.3 –  $0 < T^* < 1$  : Remontée de l'onde de surpression dans la conduite

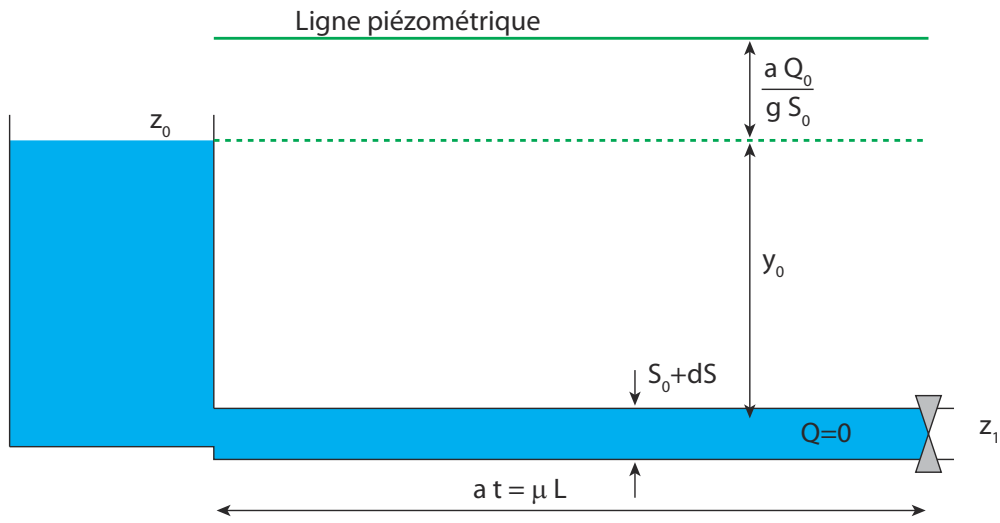


FIGURE II.14.4 -  $T^* = 1$  : Arrivée au réservoir

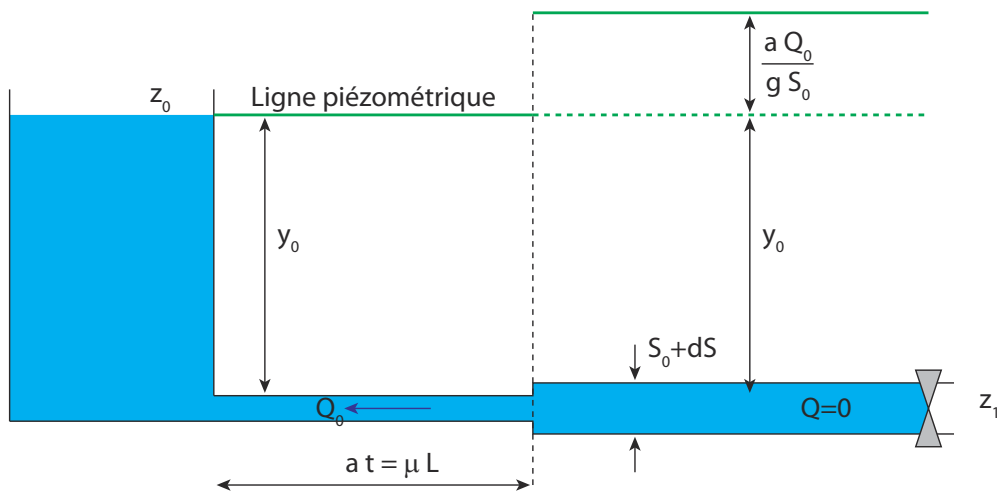


FIGURE II.14.5 -  $1 < T^* < 2$  : Descente de l'onde de dépression dans la conduite

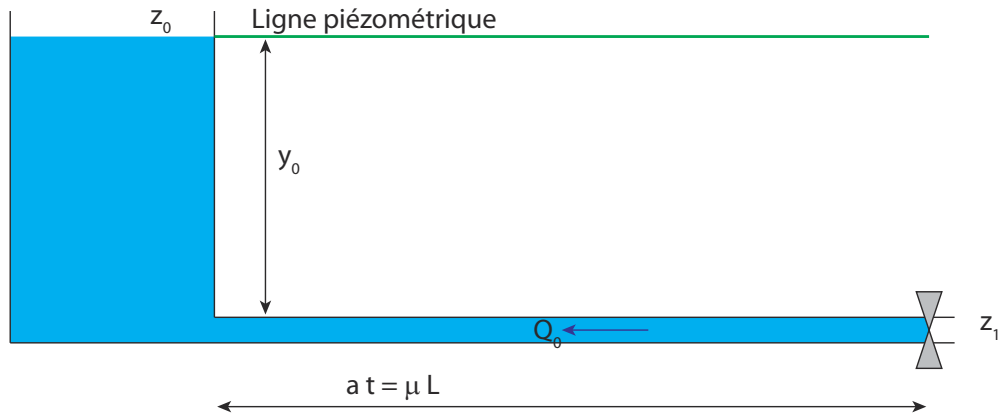


FIGURE II.14.6 -  $T^* = 2$  : Arrivée à la vanne

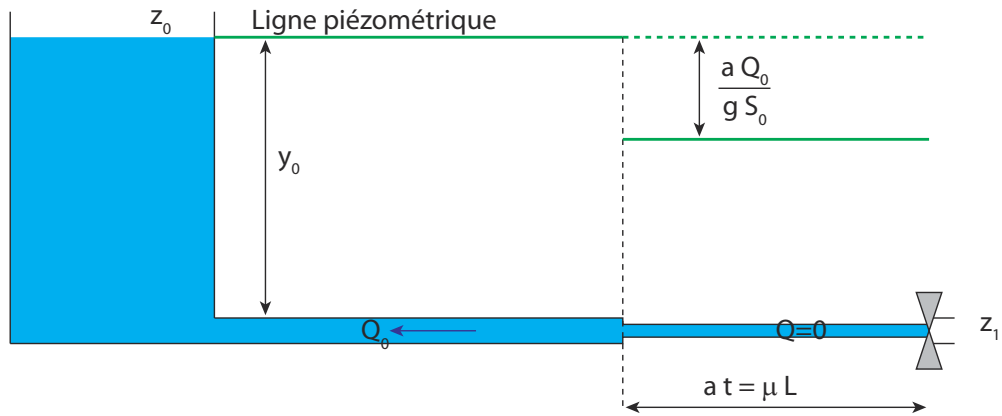


FIGURE II.14.7 -  $2 < T^* < 3$  : Remontée de l'onde de dépression dans la conduite

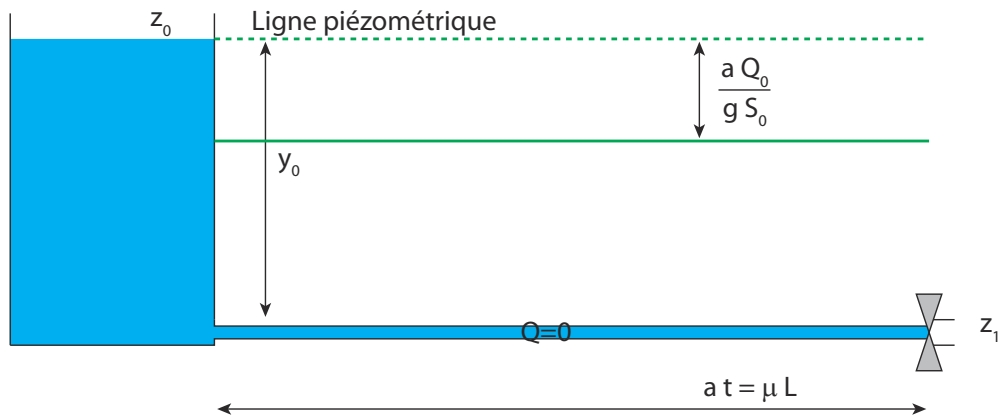
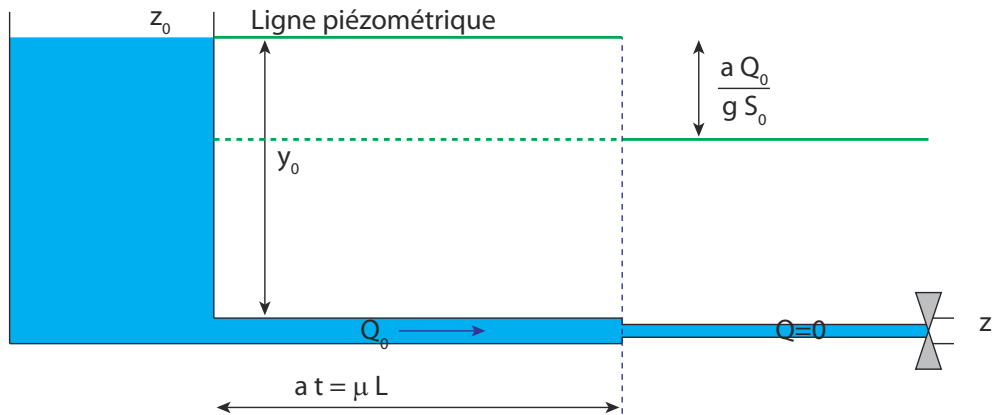


FIGURE II.14.8 -  $T^* = 3$  : Arrivée au réservoir

FIGURE II.14.9 –  $3 < T^* < 4$  : Descente de l'onde de surpression dans la conduite

### II.14.6.2 Application à la fermeture lente d'une vanne



Coup de bélier: fermeture de vanne lente

Considérons à présent une fermeture lente de la vanne, toujours sans considérer de pertes de charge. Il convient d'utiliser une loi de fermeture de vanne. On peut, par exemple, prendre la relation :

$$\xi_{vanne} = \xi_0 \left( \frac{Q}{1 - t/\tau} \right)^2 \quad (\text{II.14.21})$$

où  $\xi_{vanne}$  est la perte de charge singulière due à la vanne,  $\xi_0$  la perte de charge singulière quand la vanne est complètement ouverte.  $\tau$  est le temps total de fermeture de la vanne. La démarche de calcul est identique à celle employée pour une vanne avec fermeture instantanée, à ceci près qu'il faut considérer un débit à la vanne non nul pour tous les instants compris entre le début de la fermeture et la fermeture complète.

Une fermeture lente atténue l'amplitude du phénomène, aussi bien pour les surpressions que pour les dépressions.

### II.14.6.3 Application à la fermeture instantanée d'une vanne avec pertes de charge

Considérons à nouveau la fermeture instantanée de la vanne mais cette fois-ci en considérant des pertes de charge linéaire sur le tronçon. Il n'est pas possible de résoudre manuellement le problème toutefois, en représentant les pertes de charge de manière simplifiée, on peut résoudre le problème.

La solution consiste à localiser la totalité des pertes de charge à l'entrée du réservoir (que l'on représente comme une perte de charge singulière entre les points R et W infiniment proches). On applique cette fois-ci la même démarche que pour une fermeture instantanée sans pertes de charge mais en considérant les points V (la vanne) et W (le début de la conduite) au lieu de R (le réservoir). Pour le calcul, nous serons amenés à déterminer la hauteur piézométrique au niveau du point W qui correspond à la hauteur piézométrique en R à laquelle on retranche la perte de charge correspondant au débit. Dans le cas des débits négatifs, remarquons que la hauteur piézométrique est plus importante en W qu'en R.



Le calcul montre que les variations de piézométrie et de débit diminuent en intensité au cours du temps jusqu'à se stabiliser pour la valeur  $Q = 0$ . Cela paraît logique dans la mesure où l'énergie initiale est progressivement consommée par les pertes de charge.



Troisième partie

Hydraulique à surface libre



# Chapitre III.15

## Description des écoulements



Les différents types d'écoulement

Ce chapitre vise à définir la terminologie employée pour décrire un écoulement à surface libre. Dans le cadre de ce cours, on se borne à un écoulement dont la direction est clairement identifiée. Cette simplification est valable dans bon nombre de configurations rencontrées par l'hydraulicien. Les cas où cette simplification n'est plus valable sont généralement traité par la modélisation, faisant appel à des équations découlant de la formulation de Navier-Stokes.

Dans un premier temps, on caractérisera la géométrie du canal (qu'il soit naturel ou artificiel) puis on définira les grandeurs relatives à l'écoulement.

### III.15.1 Géométrie des canaux

Que l'on s'intéresse à un canal naturel (rivière, fossé, talweg, ...) ou artificiel (canal d'irrigation, de drainage, égout, ...), les paramètres définissant sa géométrie ont la même définition.

#### III.15.1.1 Paramètres longitudinaux

Longitudinalement, on définit (voir figure III.15.1) :

**l'amont et l'aval** : ces deux termes désignent les deux extrémités du canal. Cette définition, initialement introduite pour les fleuves et cours d'eau, est établie telle que l'écoulement se fasse toujours de l'amont vers l'aval. Lors de phénomènes variant dans le temps, il arrive qu'un écoulement change de direction. Il peut alors y avoir une confusion entre l'amont et l'aval défini à l'instant ou l'on observe l'écoulement (et tel que l'eau coule localement de l'amont vers l'aval) et la définition à plus grande échelle qui ne peut changer d'orientation au cours du temps. En première approche, les problématiques liés au régime transitoire seront écarté de sorte qu'il n'y ai pas d'ambigüité sur ces deux définitions.

**la pente du fond** : la pente représente l'inclinaison du canal dans sa direction d'écoulement. Il s'agit de la pente de la ligne de radier (ensemble des points les plus bas de chaque section en travers). Par convention, la pente est positive quand le canal est descendant vers l'aval. La pente du fond est définie par :

$$\sin i = -\frac{z_{av} - z_{am}}{x_{av} - x_{am}} \quad (\text{III.15.1})$$

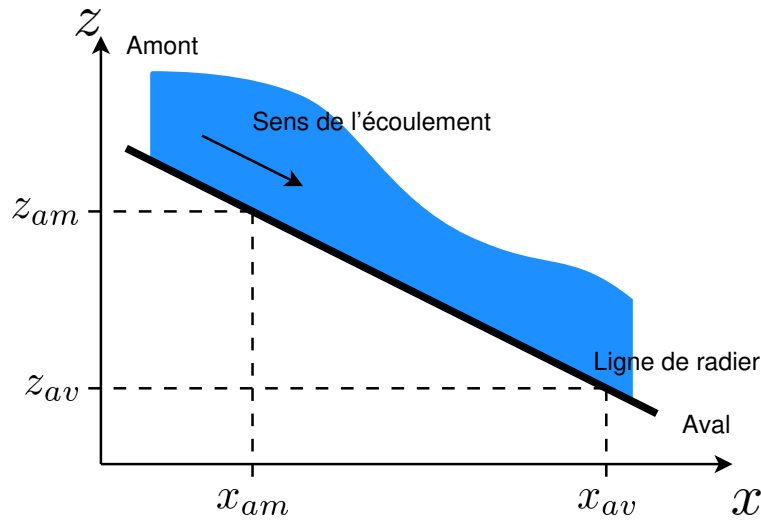


FIGURE III.15.1 – Description longitudinale de la géométrie

où  $\sin i$  est la pente du fond,  $x$  (respectivement  $z$ ) la coordonnée longitudinale (respectivement d'altitude). On fait fréquemment l'hypothèse d'une géométrie presque horizontale de sorte que  $\sin i \approx i$ . A échelle locale, la pente est définie par :

$$i = -\frac{dz}{dx} \quad (\text{III.15.2})$$

Enfin, la pente d'un canal est également notée  $S_0$ .

**le caractère prismatique d'un canal :** Un canal est dit prismatique si la géométrie de sa section en travers est indépendante de l'abscisse. La section d'écoulement n'est alors que fonction du tirant d'eau.

### III.15.1.2 Paramètres transversaux

Transversalement, on définit (voir figures III.15.2, III.15.3, III.15.4 et table III.15.1) :

**la section en travers :** c'est la géométrie du canal dans un plan perpendiculaire à l'axe du canal. On définit également la section (ou surface) mouillée  $S$  qui est la surface de cette section occupée par l'eau.

**la surface libre :** c'est l'interface entre l'eau et l'air au-dessus.

**le radier :** c'est la cote la plus basse de la section en travers.

**la profondeur / le tirant d'eau :** c'est la distance perpendiculaire au fond entre la surface libre et le radier

**$B$  la largeur au miroir :** c'est la largeur de la surface libre

**$\chi$  le périmètre mouillé :** c'est la longueur de l'interface canal / eau

**$R_h$  le rayon hydraulique :** c'est le ratio de la surface mouillée  $S$  sur le périmètre mouillé :

$$R_h = S/\chi$$

**$D_h$  le diamètre hydraulique :** c'est le ratio de la surface mouillée  $S$  sur la largeur au miroir :  $D_h = S/B$

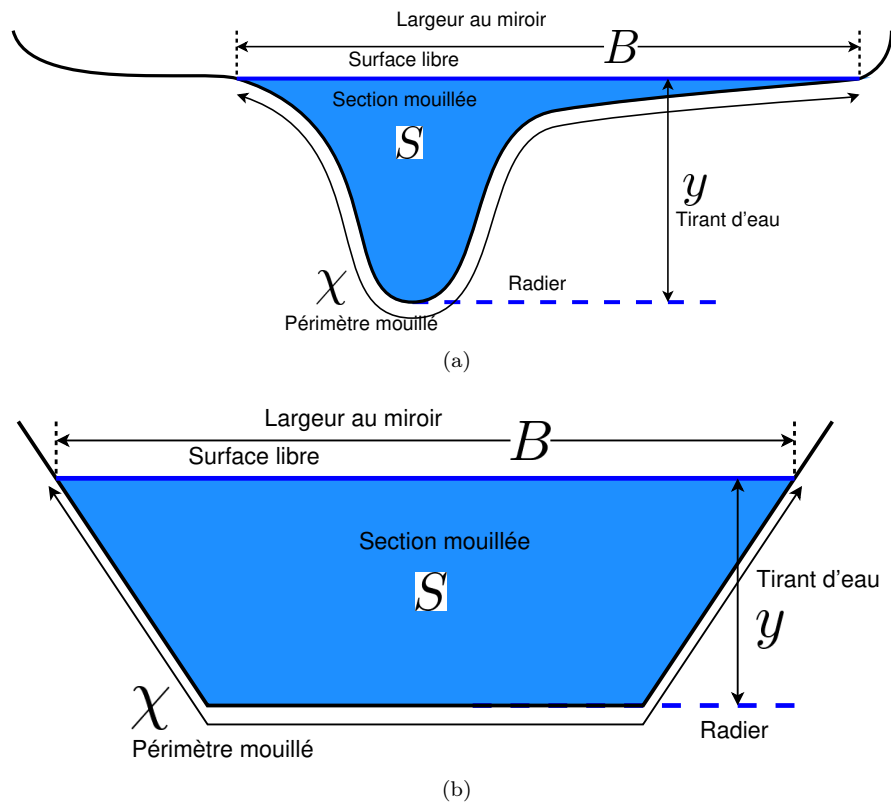


FIGURE III.15.2 – Description transversale de la géométrie. (a) Section naturelle, (b) Section artificielle

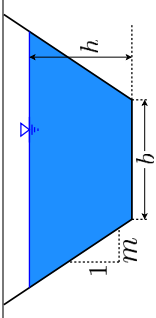
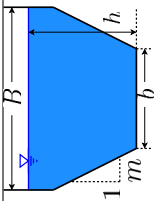
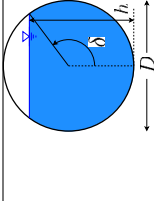
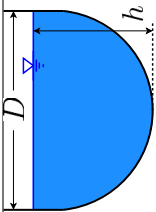
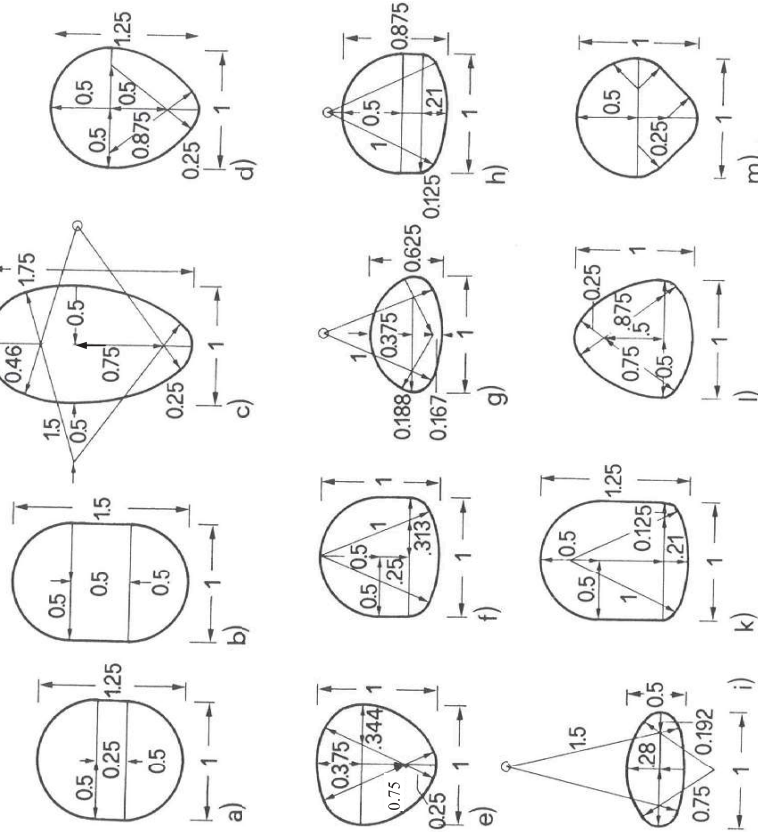
	Canal			
	Trapézoïdal	Semi-trapézoïdal	Circulaire	en U
Hauteur d'eau				
Surface mouillée $S$	$bh + mh^2$	$Bh - \frac{(B-b)^2}{4m}$	$h = \frac{D}{2} (1 - \cos \delta)$ $\frac{D^2}{4} (\delta - \sin \delta \cos \delta)$	$Dh + D^2 \left( \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \right)$
Périmètre mouillé $\chi$	$b + 2h\sqrt{1+m^2}$	$B - b + \frac{2h+b}{m} (\sqrt{1+m^2} - 1)$	$D\delta$	$2h + D \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$
Rayon hydraulique $R_h$	$\frac{bh + mh^2}{b + 2h\sqrt{1+m^2}}$	$\frac{S}{\chi}$	$\frac{D}{4} \left( 1 - \frac{\sin \delta \cos \delta}{\delta} \right)$	$\frac{S}{\chi}$
Largeur au miroir	$B = b + 2mh$	$B = B$	$B = D \sin \delta$	$B = D$
Diamètre hydraulique	$D_h = \frac{bh + mh^2}{b + 2mh}$	$D_h = \frac{S}{B}$	$D_h = \frac{D(\delta - \sin \delta \cos \delta)}{4 \sin \delta}$	$D_h = h + D \left( \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \right)$
$S \times y_G$	$\left( \frac{b}{2} + \frac{mh}{3} \right) h^2$	$\frac{Bh^2}{2} - \frac{h(B-b)^2}{4m} + \frac{(B-b)^3}{24m^2}$	$\frac{D^3}{8} \left( \sin^3 \delta - \frac{\sin^3 \delta}{3} - \delta \cos \delta \right)$	$\frac{D}{2} \left( h - \frac{D}{2} \right)^2 + \frac{\pi D^2}{8} \left( h - \frac{D}{2} \right) + \frac{D^3}{12}$

TABLE III.15.1 – Formulaire de calcul des variables hydrauliques. On notera que l'on peut utiliser les formulations pour les canaux trapézoïdaux pour un canal rectangulaire (en prenant  $m = 0$ ) ou pour un canal triangulaire (en prenant  $B = 0$ ). Tableau de [16], p75.



La figure suivante représente les formes de conduite les plus utilisées en assainissement. Les dimensions sont adimensionnalisées par rapport à la largeur.



José VAZQUEZ (Laboratoire Systèmes Hydrauliques Urbains)

FIGURE III.15.3 – Géométries couramment rencontrées dans un réseau d’assainissement. Illustration d’après [16], p76.

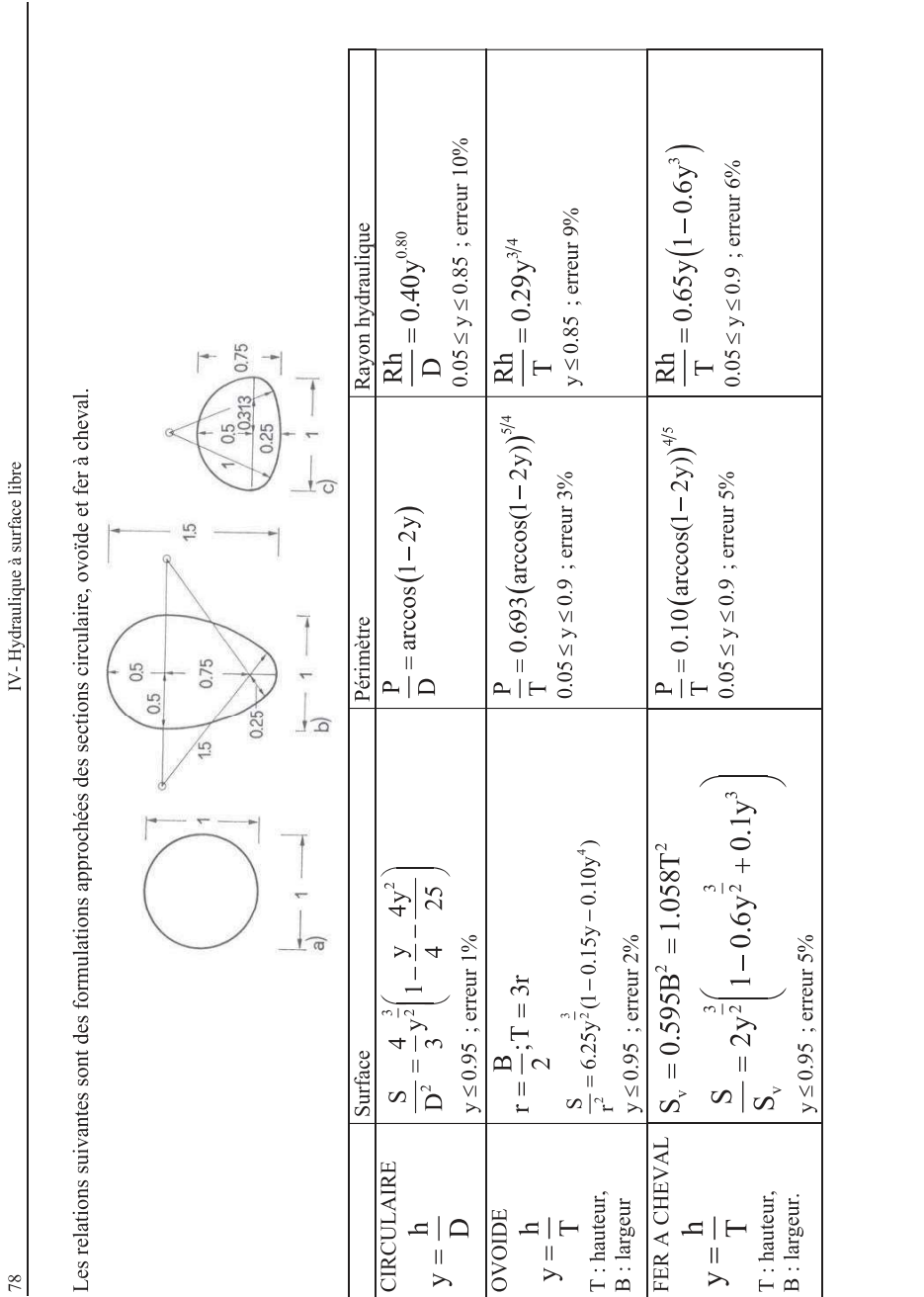


FIGURE III.15.4 – Approximation pour le calcul des paramètres géométriques en réseau d’assainissement. Illustration de [16], p76.

## III.15.2 Caractéristiques des écoulements

Pour totalement caractériser un écoulement à surface libre, il est nécessaire de connaître (outre la géométrie du canal) : le tirant d'eau  $y$  et le vecteur vitesse  $\vec{v}$ . L'hypothèse d'un écoulement unidimensionnel permet de ne s'intéresser qu'à la norme du vecteur vitesse (correspondant à la vitesse moyenne de l'écoulement). C'est l'hypothèse que l'on gardera pour l'ensemble de ce cours.

La figure III.15.6 résume les différents types d'écoulement existants.

### III.15.2.1 Écoulement en charge / à surface libre (voir partie I.2.1)

Un écoulement à surface libre est un écoulement pour lequel il y a une interface entre l'écoulement qui nous intéresse (dans la majorité des cas : l'eau) et un gaz au-dessus. A contrario, un écoulement en charge est un écoulement pour lequel le fluide occupe l'ensemble de la section qui lui est réservé.

Dans les configurations naturelles, il est rare qu'une variation des configurations hydrauliques (débit) modifie la nature de l'écoulement : un écoulement à surface libre reste exclusivement à surface libre et la hauteur d'eau s'adapte en conséquence ou parfois le débit. En revanche, dans les configurations rencontrées en assainissement (et sur lesquelles ce cours se focalise), la variabilité des paramètres hydrauliques et la géométrie des sections mises en  $\frac{1}{2}$ uvre font que le passage écoulement à surface libre - écoulement en charge est fréquent. Il convient donc de détecter ces changements pour utiliser les équations adéquates.

### III.15.2.2 Régime permanent / transitoire (voir partie I.5)

L'écoulement est permanent (ou stationnaire) lorsque la vitesse et la hauteur d'eau ne dépendent pas du temps. L'écoulement est transitoire dans le cas contraire. Dans la réalité, les écoulements sont rarement permanents toutefois la variation temporelle peut être suffisamment lente pour que l'on puisse considérer l'écoulement comme une succession de régimes permanents. On parle alors d'écoulement quasi-permanent.

### III.15.2.3 Uniforme / non-uniforme (voir partie I.5)

Un écoulement est uniforme si les variables caractéristiques de l'écoulement sont identiques quelle que soit la position considérée. Du fait de l'équation de conservation de la masse (voir partie III.15.4), cela implique que l'écoulement est en régime permanent. A contrario, si les variables hydrauliques dépendent de l'espace alors on parle de régime non-uniforme. Le régime non-uniforme se subdivise en régime graduellement varié (les variations sont progressives dans l'espace) et rapidement (ou brusquement) varié : les variations sont très localisées à l'échelle de l'écoulement global (on peut faire le parallèle avec la notion de singularité rencontrée en hydraulique en charge).

## III.15.3 Distribution des vitesses et des pressions dans l'écoulement

### III.15.3.1 Profil de vitesse

Dans une section d'écoulement, la vitesse n'est pas uniforme. En effet, le frottement à la paroi implique une vitesse nulle sur les bords du canal et la vitesse au niveau de la surface libre n'est pas maximale dans la mesure où elle est impactée par les frottements sur l'air (voir Figure III.15.7).

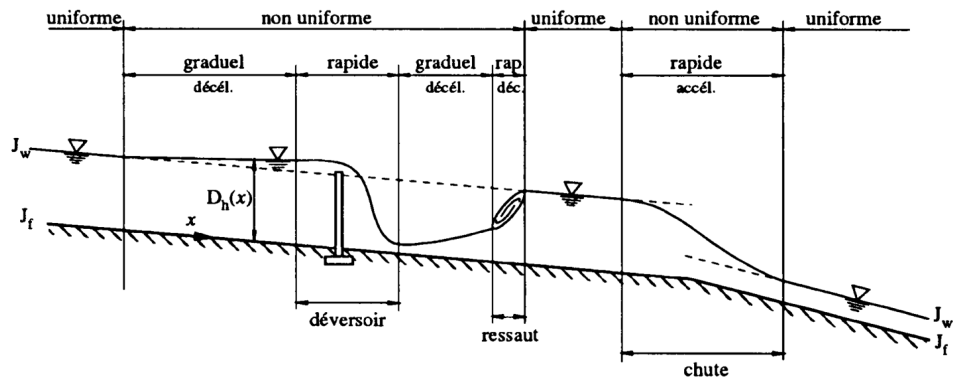


FIGURE III.15.5 – Profil en long caractéristique. Illustration d’après [16], p7.

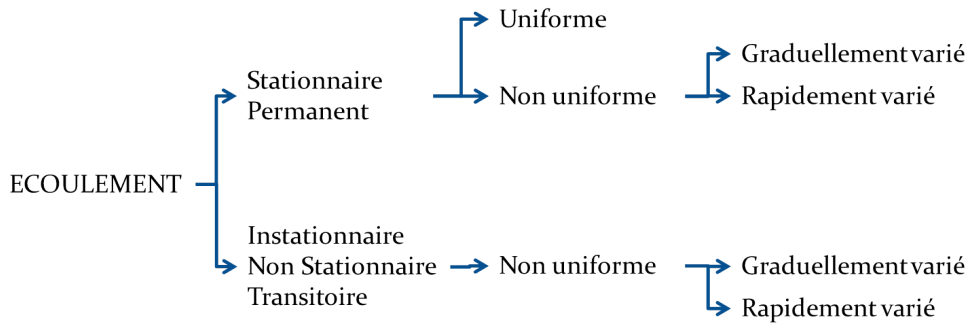


FIGURE III.15.6 – Les différents régimes d’écoulement

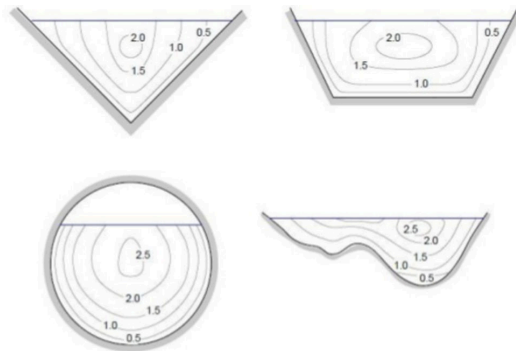


FIGURE III.15.7 – Profils normalisés de vitesse dans différentes sections (Illustration de [2]).

$\theta(^{\circ})$	0	0.1	1	5	10	20	30	45
penne ( $m/m$ )	0.000	0.002	0.017	0.087	0.176	0.364	0.577	1.000
$\cos \theta$	1	1	1	0.996	0.985	0.940	0.866	0.707
Erreur	0.0%	0.0%	0.0%	0.4%	1.5%	6.4%	15.5%	41.4%

TABLE III.15.2 – Approximation sur le calcul de la pression en fonction de la pente

La mesure de la vitesse moyenne étant relativement complexe puisque sa localisation dans une section quelconque est inconnue a encouragé certains auteurs à faire le lien entre vitesse moyenne et vitesse en surface, au centre de l'écoulement. On citera notamment :

- Prony :  $v_{moy} = k \times v_{surface}$  avec  $0,8 < k < 0,9$
- Fargue :  $v_{moy} = 0,842 \times v_{surface}$
- Bazin :  $v_{moy} = v_{surface} - 14 \times R_h \times i$

### III.15.3.2 Profil de pression

Pour un écoulement rectiligne (rayon de courbure infini), le profil de pression est hydrostatique et les courbes isobares sont parallèles au fond : la pression augmente linéairement de la surface vers le fond (voir partie I.7.1).

#### III.15.3.2.1 Détermination de la pression au fond

On considère un écoulement uniforme de sorte que la vitesse soit en tout point la même, l'accélération est donc nulle. On considère le volume de fluide défini à la figure III.15.8. Dans cette condition, la somme des forces qui s'exerce sur un volume de fluide est nulle :

$$\vec{F}_P + \vec{f} + \vec{P} = \vec{0} \quad (\text{III.15.3})$$

On s'intéresse à la projection dans la direction perpendiculaire au fond de l'équation (III.15.3) :

$$F_P - Poids \times \cos \theta = 0 \quad (\text{III.15.4})$$

Par définition, l'intensité de la force de pression vaut  $F_P = P \times dS$  et l'intensité du poids vaut  $Poids = \rho g y dS$ . (III.15.4) devient donc :

$$\begin{aligned} P \times dS - \rho g y dS \cos \theta &= 0 \\ P &= \rho g y \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{III.15.5})$$

On utilise généralement d'hypothèse d'un écoulement quasi-horizontale ( $\cos \theta \approx 1$ ) qui permet d'écrire  $P = \rho g y$ . Le tableau III.15.2 montre que pour les configurations usuellement rencontrées (pente maximale de l'ordre de  $1cm/m$ ) les erreurs commises en négligeant le cosinus de la pente restent négligeables.

#### III.15.3.2.2 Profils de pression pour un canal non-rectiligne

On a montré précédemment (voir partie I.7.1) que l'équation du profil de pression dans la direction normale aux lignes de courant était donnée par :

$$\rho \frac{v^2}{R} = -\frac{d}{dn} (P + \rho g z) \quad (\text{III.15.6})$$

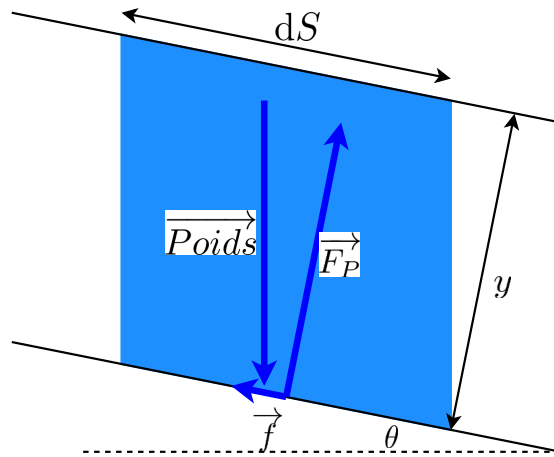


FIGURE III.15.8 – Schéma du volume fluide considéré pour déterminer la pression sur le fond

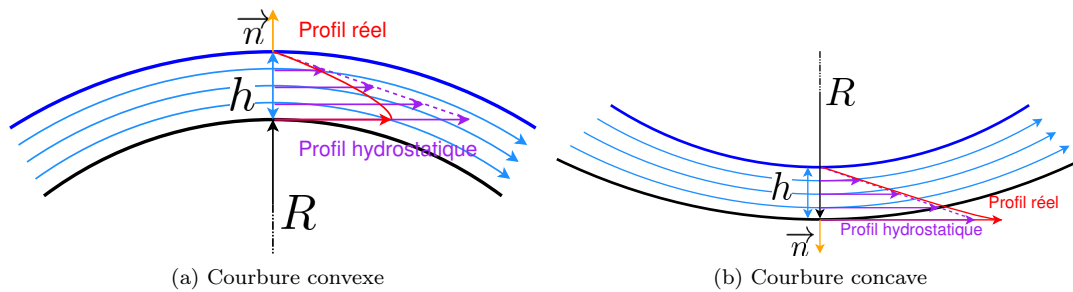


FIGURE III.15.9 – Profil de pression pour un canal non-rectiligne.

Le profil de pression n'est donc plus hydrostatique dès lors qu'il y a une courbure des lignes de courant ( $R \neq \infty$ ). Cette évolution de la pression par rapport à la pression hydrostatique se fait dans le sens des forces centrifuges : une courbure concave (respectivement convexe) entraînera une surpression (respectivement sous-pression).

Il n'est d'ailleurs pas rare dans le cas de courbures convexes d'avoir une pression au fond du canal inférieure à la pression atmosphérique. Cela entraîne un décollement de l'écoulement du fond (voir figure III.15.10).

### III.15.4 Équations de Barré de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant permettent de reproduire de manière satisfaisante les écoulements observés lors d'écoulements en rivière, à la fois en régime usuel mais également en période de crue. Il existe deux écritures pour ces équations, découlant toutes deux des équations de Navier Stokes :

- une écriture pour un écoulement 1D : la vitesse d'écoulement est supposée uniforme sur toute la section d'écoulement
- une écriture pour un écoulement 2D : la vitesse d'écoulement est supposée uniforme sur la verticale.

On considèrera ici uniquement le cas 1D qui reste aujourd'hui largement utilisé bien que les outils de modélisation 2D existent pour répondre à des problématiques précises.



FIGURE III.15.10 – Illustration du phénomène de sous pression sur un déversoir - J. Vazquez©

### III.15.4.1 Hypothèses préliminaires

Moyennant les hypothèses suivantes, les équations de Navier Stokes peuvent se simplifier :

- [H1] L'écoulement est essentiellement dans le plan horizontal.
- [H2] Il n'y a pas de variation significative de la section d'écoulement sur de courtes distances (les variations sont toujours progressives). Il en est de même pour les hauteurs d'écoulement, qui varient doucement d'un point à l'autre de l'écoulement sur un même bief. On parle de régime graduellement varié ou bien d'approximation des grandes longueurs d'onde pour désigner ce régime ou cette approximation. Il s'agit donc d'un régime peu éloigné du régime permanent uniforme. Le rapport caractéristique  $\varepsilon = H/L$  (appelé rapport d'aspect) est petit devant 1 (avec  $H$  : échelle de hauteur et  $L$  échelle de longueur). On a typiquement pour une rivière de  $L = 10\text{km}$  et profonde de  $H = 10\text{m}$  : on a  $\varepsilon = 10^{-3} \ll 1$ .
- [H3] Les lignes de courant au sein de l'écoulement ne subissent pas de bifurcation brutale : on se place loin de toute singularité (élargissement brusque, ...)
- [H4] Les frottements s'exercent exclusivement sur le fond de l'écoulement (lit).
- [H5] La masse volumique de l'eau  $\rho$  est constante (pas d'effet du transport solide en suspension).
- [H6] Le lit est fixe (pas de transport solide, pas d'érosion, pas de dépôt). Le cas d'un lit mobile peut également être traité en ajoutant d'autres équations
- [H7] La pente locale n'est pas trop forte (inférieure à 10-20%). On suppose que l'axe vertical peut être confondu avec l'axe perpendiculaire au fond. Cette hypothèse peut être remise en cause et dans ce cas, des outils numériques spécifiques ont été récemment proposés.

Ces hypothèses relativement contraignantes sont nécessaires pour établir les équations de Saint-Venant. Le corolaire est que la validité des équations de Saint-Venant ne peut être démontrées que si toutes ces hypothèses sont vérifiées.

En pratique, le modélisateur se place souvent dans des configurations où certaines hypothèses ne sont plus valides : très fortes pentes, singularités, ... Dans ces cas, les équations de

base ne peuvent plus décrire exactement la physique rencontrée mais donne néanmoins une approximation de ce qu'il se passe.

C'est le rôle du modélisateur que d'estimer l'écart entre le résultat obtenu en utilisant des équations non valides et la réalité. Le calage du modèle (variation des paramètres afin de reproduire un comportement observé) ou la réalisation d'une analyse de sensibilité (étude de l'impact d'une variation des paramètres utilisés sur les résultats) permet d'estimer de manière plus précise ces écarts entre réalité et résultats numériques.

### III.15.4.2 Écriture des équations

Les équations de Saint-Venant 1D s'écrivent, soit en simplifiant les équations de Navier Stokes, soit en faisant un bilan de masse et de quantité de mouvement sur un volume de contrôle. Les deux approches donnent des résultats identiques :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (\text{III.15.7a})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{S} \right) + gS \frac{\partial h}{\partial x} = gS(S_0 - S_f) \quad (\text{III.15.7b})$$

où  $x$  représente l'abscisse curviligne (le long de l'axe d'écoulement) (en m),  $t$  le temps (s),  $S$  représente la section en travers de l'écoulement ( $\text{m}^2$ ),  $Q$  le débit ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ ),  $q$  le débit unitaire injecté ou prélevé dans le cours d'eau ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ),  $g$  l'accélération de la pesanteur ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ),  $h$  la hauteur d'eau (m),  $S_0$  la pente du fond (m/m) et  $S_f$  la pente de la ligne des frottements (m/m). Le calcul de  $S_f$  sera explicité à la partie III.17.3.1.

La première équation correspond à la conservation de la masse : elle explique comment évolue le niveau d'eau dans le temps en lien avec l'évolution spatiale du débit. Toutefois, elle n'explique pas la mise en mouvement de l'eau. La seconde équation est l'équation de conservation de la quantité de mouvement : elle fait le lien entre la mise en mouvement de l'eau et les actions et forces qui sont appliquées au volume d'eau considéré. Les actions considérés sont le poids de l'eau, l'effet de la pression sur les parois de l'écoulement et les frottements sur le fond du canal.

Sauf cas particulier, les équations de Saint-Venant ne peuvent être résolues facilement à la main. Il est alors nécessaire de faire appel à logiciels de modélisation.



# Chapitre III.16

## Le régime permanent uniforme



Régime permanent uniforme

### III.16.1 Définition et mise en équation

Un écoulement est dit en régime uniforme si les variables descriptives de l'écoulement ne varie pas dans l'espace ( $h$ ,  $v$  et  $Q$  identiques en tous points). Il n'est pas possible d'avoir un régime uniforme avec un écoulement transitoire. On parle donc de régime permanent uniforme (noté parfois RPU).

Un écoulement uniforme n'est possible que pour un canal prismatique. En effet, une variation de la géométrie du canal aura nécessairement une incidence sur les variables de l'écoulement. Dans une telle configuration, on obtient des lignes de courant parfaitement parallèles les unes aux autres et donc une répartition hydrostatique des pressions dans la section en travers. Cette propriété peut d'ailleurs être utilisée pour mesurer un débit : la pression mesurée permet de déduire la hauteur d'eau dans le canal et ainsi d'en déduire le débit de manière unique (voir partie III.16.2.2).

On considère les équations de Saint-Venant établies précédemment (voir partie III.15.4). En appliquant les hypothèses du régime permanent uniforme ( $\partial/\partial t = 0$  et  $\partial/\partial x = 0$ ), à l'équation de conservation de la masse, on montre que  $q = 0$ . Cela montre que les apports latéraux sont nécessairement nuls.

En appliquant les mêmes hypothèses ( $\partial/\partial t = 0$  et  $\partial/\partial x = 0$ ) à l'équation de conservation de la quantité de mouvement, il vient :

$$S_0 - S_f = 0 \quad (\text{III.16.1})$$

L'équation (III.16.1) peut également s'écrire sous la forme  $i = j$ , avec  $i = S_0$  et  $j = S_f$ .  $S_0$  représente la pente du canal et  $S_f$  représente la pente de la ligne des frottements (équivalente à la perte de charge par unité de longueur). Ainsi, l'énergie apportée par la pente du fond est exactement égale à celle dissipée par frottement (voir figure III.16.1).

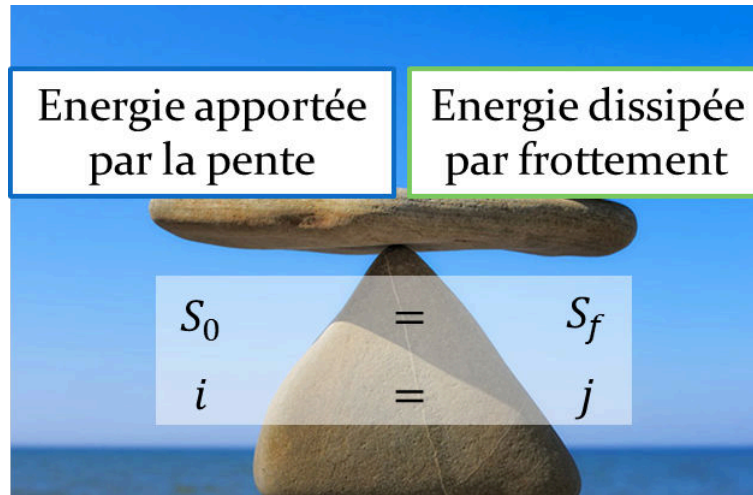
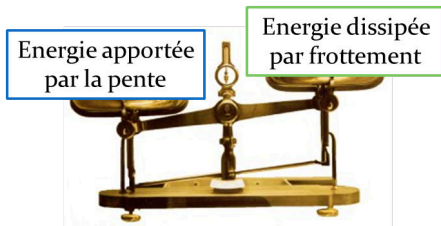


FIGURE III.16.1 – Illustration du régime permanent uniforme

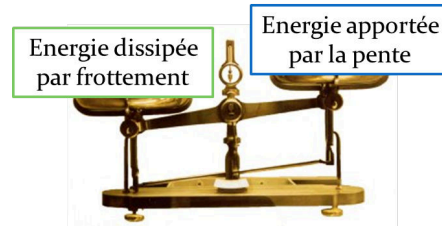
## III.16.2 Propriétés du régime permanent uniforme

### III.16.2.1 Régime d'équilibre

On s'intéresse à un canal prismatique avec un écoulement en régime permanent. Les conditions nécessaires pour avoir un écoulement en régime permanent uniforme sont donc vérifiées. Imaginons localement que l'écoulement soit en régime non-uniforme (donc  $S_0 > S_f$  ou  $S_0 < S_f$ ). On cherche à identifier comment les variables hydrauliques vont s'adapter au cours de l'écoulement.



L'énergie apportée par la pente est supérieure à l'énergie dissipée par frottement donc le fluide gagne de l'énergie au long de l'écoulement. Ce gain d'énergie se traduit par une augmentation de la vitesse de l'écoulement. L'accélération du fluide augmente les frottements dans la mesure où la dissipation d'énergie par frottement est proportionnelle au carré de la vitesse. L'augmentation des frottements se traduit par une augmentation de la dissipation d'énergie qui s'arrêtera dès lors que la dissipation compensera exactement l'énergie apportée par la pente.



L'énergie dissipée par frottement est supérieure à l'énergie apportée par la pente donc le fluide perd de l'énergie au long de l'écoulement. Cette perte d'énergie se traduit par une diminution de la vitesse de l'écoulement et donc par une réduction de l'énergie dissipée par frottement. Cette dissipation s'arrêtera quand l'énergie dissipée par frottement compensera exactement l'énergie apportée par la pente.

L'étude des deux situations ( $S_0 > S_f$  et  $S_0 < S_f$ ) montre que l'écoulement tend spontanément à atteindre la situation  $S_0 = S_f$ . Le régime permanent uniforme traduit donc une situation

d'équilibre vers laquelle tout écoulement essaye de tendre (voir figure III.16.1).

### III.16.2.2 Notion de charge spécifique

On cherche à expliciter les termes de l'équation du régime permanent uniforme. En identifiant que  $S_0$  est la variation de la cote du fond dans le sens de l'écoulement et que  $S_f$  est la variation de la charge, il vient :

$$\begin{aligned} S_0 &= S_f \\ -\frac{dz}{dx} &= -\frac{dH}{dx} \end{aligned} \quad (\text{III.16.2})$$

On introduit maintenant la définition de la charge moyenne de l'écoulement dans (III.16.2) puis on réorganise les termes :

$$\begin{aligned} -\frac{dz}{dx} &= -\frac{dH}{dx} \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{d}{dx} \left( z + h + \frac{v^2}{2g} \right) \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dx} + \frac{d}{dx} \left( h + \frac{v^2}{2g} \right) \\ \frac{d}{dx} \left( h + \frac{v^2}{2g} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.16.3})$$

Pour un écoulement en régime permanent uniforme, on montre que la grandeur  $h + \frac{v^2}{2g}$  est constante au cours de l'écoulement. Cette grandeur est la charge spécifique de l'écoulement et est noté  $H_s$  :

$$H_s = h + \frac{v^2}{2g} \quad (\text{III.16.4})$$

On notera que la charge spécifique est aussi la charge totale  $H$  soustraite de la cote du fond  $z$  :  $H_s = H - z$ . La charge spécifique étant fixée pour un écoulement permanent uniforme, il existe une relation unique entre hauteur d'eau  $h$  et débit  $Q$ .

### III.16.3 Caractérisation du régime permanent uniforme

Afin de dimensionner ou de diagnostiquer des canaux, l'hydraulicien doit pouvoir déterminer la relation entre la hauteur d'eau  $h$  d'un écoulement permanent uniforme et le débit correspondant  $Q$ . Cette profondeur est appelée la profondeur normale et est notée  $h_N$ . En introduisant la formulation de la perte de charge linéaire dans l'équation (III.16.2), il vient :

$$S_0 = -\lambda \frac{1}{D_h} \frac{v^2}{2g} \quad (\text{III.16.5})$$

où  $D_h$  est le diamètre hydraulique de l'écoulement et  $\lambda$  est le coefficient de perte de charge linéaire. Ce coefficient (comme en hydraulique en charge) dépend a priori de la géométrie du canal et des grandeurs descriptives de l'écoulement. Bien que cette approche soit possible, l'approche historique a consisté à faire directement le lien entre la vitesse moyenne de l'écoulement et la pente du fond.

$$\mathbf{85 - Valeur du } K_B \mathbf{ de la formule de Bazin : } C = \frac{87 \sqrt{R}}{K_B + \sqrt{R}}$$

Caractéristiques		Valeurs de $K_B$ m <sup>1/2</sup>
1.	Canaux en béton bien lissé ; canaux en bois raboté, avec la plus grande dimension des planches selon la direction du courant ; parois métalliques sans rouille et décrochements dans les joints.....  (Le plan du canal doit être constitué par des tronçons longs raccordés par des courbes à grand rayon ; l'eau doit être claire).	0,06 <sup>(1)</sup>
2.	Canaux en béton, revêtus, mais non complètement lissés et avec des décrochements peu importants dans les joints. Canaux en bois raboté avec des joints réguliers, mais sans décrochements dans les joints. Canaux en maçonnerie régulière de pierre de taille.....	0,16
3.	Canaux en béton, partiellement revêtus, avec des joints saillants, où coule de l'eau peu claire avec végétation et mousse. Canaux revêtus en pierres sèches.....	0,46
4.	Canaux en terre de section régulière, végétation peu haute sur le fond, sans végétation et courbes amples. canaux en maçonnerie régulière, avec le fond lisse par suite du dépôt de la vase.....	0,85
5.	Canaux en terre de section régulière, végétation peu haute sur le fond, végétation courte sur les berges. Cours d'eau naturels d'allure régulière, sans végétation ni grands dépôts sur le fond.....	1,30
6.	Canaux en terre mal entretenus, avec de la végétation sur le fond et les berges. Canaux en terre, exécutés par des excavateurs mécaniques, mal entretenus.....	1,75

FIGURE III.16.2 – Valeur du coefficient de Bazin. Reproduction de [10]

### III.16.3.1 Formulation de Chezy, Bazin et Kutter

Chezy a étudié les écoulements permanents uniformes et proposé une relation faisant le lien entre vitesse d'écoulement  $v$ , rayon hydraulique  $R_h$  et pente du fond  $S_0$  :  $v = C\sqrt{S_0 R_h}$  où  $C$  est le coefficient de Chezy qui dépend : de la nature de l'écoulement, de la géométrie de la section et de la rugosité.

Bazin et Kutter ont quant à eux proposé deux formulations pour le calcul du coefficient de Chezy.

$$\begin{array}{l} \text{Formule de Bazin} \\ C = \frac{87\sqrt{R_h}}{K_B + \sqrt{R_h}} \quad (\text{III.16.6a}) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Formule de Kutter} \\ C = \frac{100\sqrt{R_h}}{K_K + \sqrt{R_h}} \quad (\text{III.16.6b}) \end{array}$$

Les coefficients  $K_B$  et  $K_K$  sont des constantes ne dépendant que de la rugosité des parois du canal (voir figure III.16.2 et figure III.16.3).

**86 - Valeur du  $K_K$  de la formule de Kutter :  $C = \frac{100 \sqrt{R}}{K_K + \sqrt{R}}$**

Caractéristiques		Valeurs de $K_K$ m <sup>1/2</sup>
1.	Parois en béton bien lissé, section demi circulaire .....	0,12 <sup>(1)</sup>
2.	Idem, section rectangulaire .....	0,15
3.	Parois en bois raboté, section rectangulaire .....	0,20
4.	Parois en bois non raboté, section trapézoïdale ou rectangulaire ; maçonnerie très régulière avec des pierres de taille .....	0,25
5.	Parois en maçonnerie ordinaire, construction soignée .....	0,35
6.	Parois en maçonnerie ayant déjà subi des réparations .....	0,45
7.	Parois revêtues en pierres ordinaires .....	0,55
8.	Parois en maçonnerie ordinaire, fond vaseux .....	0,75
9.	Parois en maçonnerie, à l'abandon .....	1,00
10.	Petits canaux creusés dans le rocher ; canaux en terre bien réguliers, sans végétation .....	1,25 à 1,50
11.	Canaux en terre, mal entretenus avec de la végétation ; cours d'eau naturels, avec lit en terre .....	1,75 à 2,00
12.	Canaux en terre complètement à l'abandon ; cours d'eau naturels avec lit en galets .....	2,50

FIGURE III.16.3 – Valeur du coefficient de Kutter. Reproduction de [10]

### III.16.3.2 Formulation de Manning-Strickler

Manning et Strickler ont également proposé deux formules pour estimer le coefficient de Chezy :

Formule de Manning

$$C = \frac{1}{n} R_h^{1/6} \quad (III.16.7)$$

Formule de Strickler

$$C = K R_h^{1/6} \quad (III.16.8)$$

Les coefficients  $n$  et  $K$  sont des constantes ne dépendant que de la rugosité des parois du canal. On notera le lien évident entre ces deux coefficients :  $K = 1/n$ . La formule de Manning-Strickler ne fait pas intervenir le coefficient de Chezy mais directement le coefficient de Strickler (ou de Manning) :

$$Q = K \sqrt{i} S R_h^{2/3} \quad (III.16.9)$$

Cette formule est de loin la plus largement utilisée dans le monde. Un grand nombre d'auteurs ont proposé des valeurs pour le coefficient de Strickler (voir Annexe D).

### III.16.3.3 La hauteur normale

Le matériau du canal et sa pente étant fixés, la résolution de l'équation de Manning-Strickler (ou d'une autre équation décrivant le régime permanent uniforme) permet de faire le lien entre la hauteur normale et le débit transitant dans le canal (voir figure III.16.4). Dans le cas d'une section évasée, le débit augmente avec la hauteur normale. Cela n'est pas vrai dans le cas des sections rencontrées en assainissement dans la mesure où ces sections sont dites voutées et se ferme dans la partie supérieure. Il en résulte qu'une augmentation de la hauteur d'écoulement, bien qu'impliquant une augmentation de la section d'écoulement se traduit par une réduction du rayon hydraulique (par l'intermédiaire du périmètre mouillé) et donc du débit. Ainsi dans le

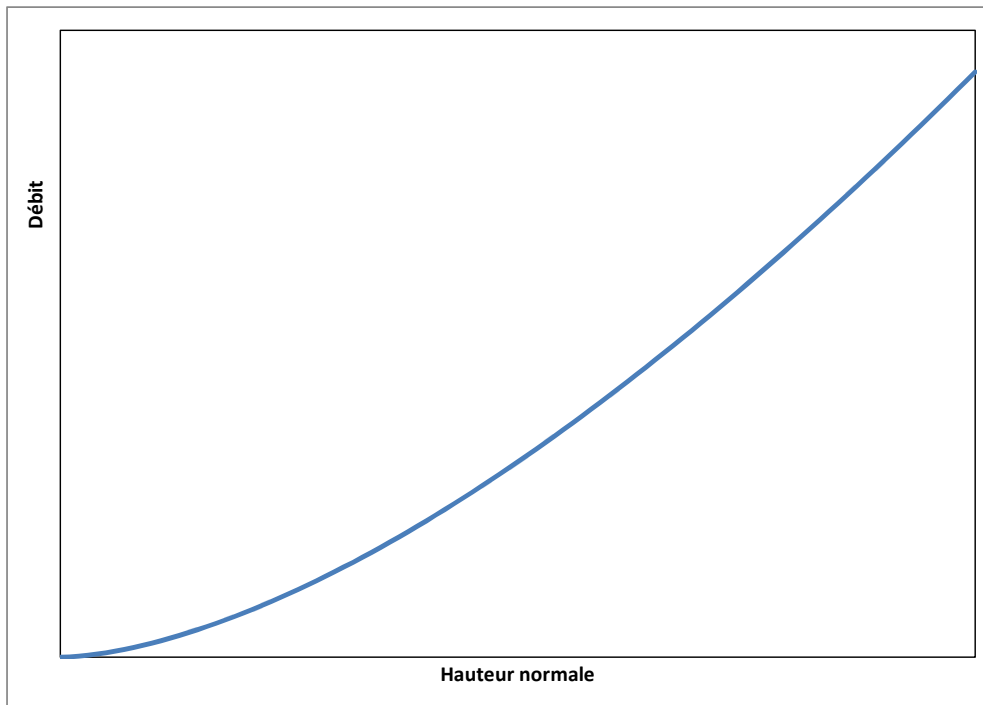


FIGURE III.16.4 – Relation hauteur normale  $h_N$  - débit pour une section évasée : la largeur de la section augmente avec la hauteur

cas des sections voutées, le débit maximal n'est pas le débit pour lequel la section est totalement pleine (voir annexes E, F et G).

### III.16.3.4 Sections composées

Il est fréquent de rencontrer des sections à géométrie complexe avec des matériaux variables sur la section. Dans ce cas, il devient difficile d'estimer un coefficient unique de rugosité. En découpant la section totale en sous-sections associées aux différents matériaux rencontrés (voir figure III.16.5) et en faisant l'hypothèse que la vitesse d'écoulement est la même dans chaque section, on peut calculer un coefficient de Strickler équivalent pour toute la section. La formule d'Einstein donne ainsi :

$$K_{eq}^{3/2} = \frac{\chi}{\sum_i \frac{\chi_i}{K_i^{3/2}}} \quad (\text{III.16.10})$$

où  $i$  est l'indice décrivant chaque sous-section,  $\chi_i$  est le périmètre mouillé associé à la sous-section  $i$  et  $K_i$  est le coefficient de Strickler associé au matériau de la sous-section  $i$ .

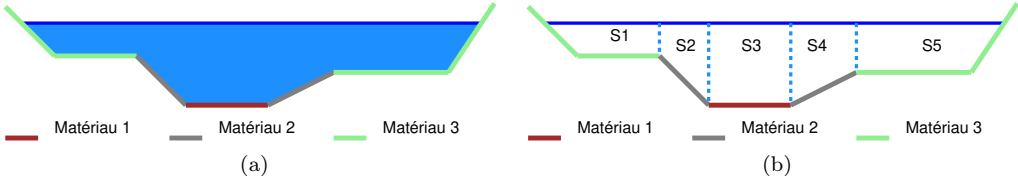


FIGURE III.16.5 – Illustration du calcul du coefficient de rugosité sur une section à géométrie complexe





# Chapitre III.17

## Le régime permanent non-uniforme

Le régime non-uniforme correspond soit à un régime transitoire, soit à un régime permanent. On considère dans ce chapitre uniquement un régime permanent. En effet, le calcul du régime transitoire est relativement complexe et est bien souvent traité par la modélisation numérique.



Régime permanent non uniforme

### III.17.1 Charge spécifique

Nous avons défini la charge spécifique dans le cas du régime permanent uniforme en partant de l'observation que cette grandeur était invariante (voir partie III.16.2.2). Dans le cas d'un écoulement non-uniforme, la charge totale  $H$  varie au long de l'écoulement sous l'effet des pertes de charge. Dans la mesure où  $H_s = H - z$ , la variation longitudinale de la charge spécifique vaut :

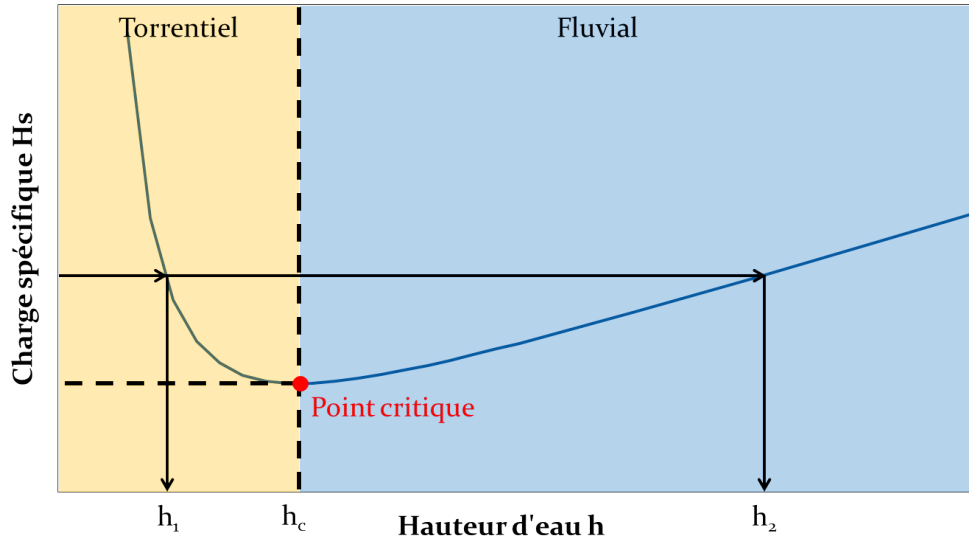
$$\begin{aligned}\frac{dH_s}{dx} &= \frac{dH}{dx} - \frac{dz}{dx} \\ \frac{dH_s}{dx} &= S_0 - S_f\end{aligned}\tag{III.17.1}$$

Ainsi la variation de charge spécifique est liée à la différence entre l'énergie apportée par la pente du fond  $S_0$  et l'énergie dissipée par frottement  $S_f$ . Les valeurs de ces deux pentes ne sont pas liées et il en résulte que la charge spécifique peut croître, diminuer ou rester constante (dans le cas d'un régime permanent uniforme). Le régime permanent uniforme est donc un cas particulier du régime permanent non-uniforme.

L'équation de la charge spécifique donne pour une section donnée une relation entre  $H_s$ ,  $h$  et  $Q$ . Pour décrire un écoulement, il faut donc connaître ces trois valeurs. Dans la nature, c'est généralement le débit ou la charge spécifique qui sont des grandeurs imposées à l'écoulement dont la hauteur d'eau s'adapte en conséquence.

On s'intéresse dans un premier temps à la relation  $H_s(h)$  à  $Q$  fixé (voir figure III.17.1). On observe que :

- Pour un débit fixé, il existe une charge spécifique minimale : c'est l'énergie minimale que doit avoir l'écoulement pour véhiculer le débit choisit. L'endroit de la courbe correspondant à une charge spécifique minimale est appelée le point critique. Au niveau du point critique, la dérivée de  $H_s$  par rapport à  $h$  est nulle. Le calcul de la dérivée (en prenant

FIGURE III.17.1 – Relation  $H_s(h)$  à débit  $Q$  imposé

$Q$  constant) donne :

$$\begin{aligned}
 \frac{dH_s}{dh} &= \frac{d}{dh} \left( h + \frac{Q^2}{2gS^2} \right) \\
 &= \frac{dh}{dh} + \frac{Q^2}{2g} \frac{d}{dh} \left( \frac{1}{S^2} \right) \\
 &= 1 + \frac{Q^2}{2g} \frac{-2}{S^3} \frac{dS}{dh} \\
 &= 1 - \frac{Q^2}{S^2} \frac{1}{g\overline{B}} \quad \text{(III.17.2)}
 \end{aligned}$$

Ainsi, au point critique, la grandeur  $\frac{Q^2}{S^2} \frac{1}{g\overline{B}}$  vaut 1.

- Pour toute charge spécifique au delà du point critique, il y a toujours deux hauteurs d'eau différentes possibles (le strict calcul mathématique donne trois solutions mais l'une d'elle est négative donc physiquement inadmissible). Ces deux hauteurs d'eau appartiennent aux deux régimes d'écoulement (fluvial et torrentiel) et sont appelées profondeurs conjuguées. Le fait qu'un écoulement dans une section en travers prenne l'une ou l'autre de ces deux hauteurs est déterminé par les caractéristiques de l'écoulement hors de cette section.

On s'intéresse maintenant à la relation  $h(Q)$  à  $H_s$  fixée (voir figure III.17.2). On observe que :

- Pour une charge spécifique imposée, il existe un débit maximal que peut prendre l'écoulement. L'endroit de débit maximal définit un point appelé le point critique pour lequel la dérivée de  $Q$  par rapport à  $h$  est nulle. Le calcul de la dérivée (en prenant  $H_s$  constant) donne :

$$\frac{dQ}{dh} = \frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{H_s - h}} (2(H_s - h)B - S) \quad \text{(III.17.3)}$$

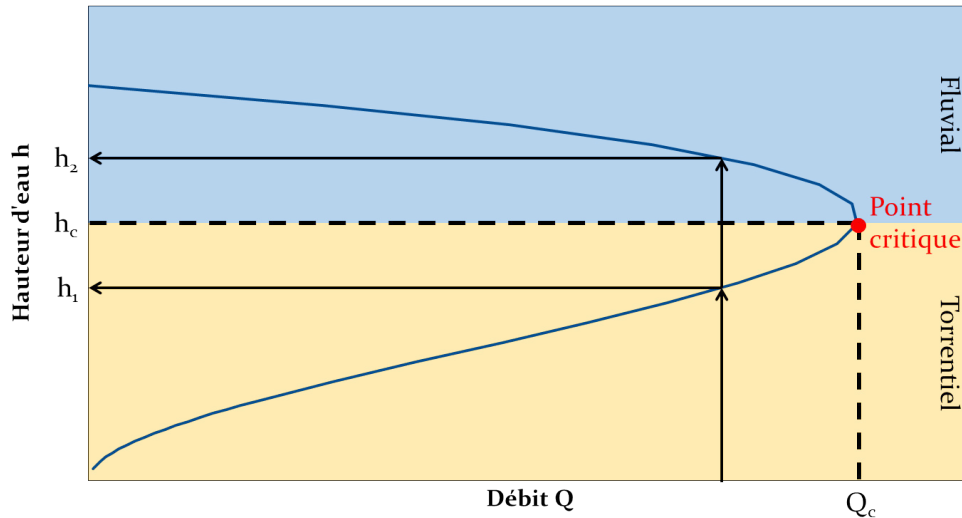


FIGURE III.17.2 – Relation  $h(Q)$  à charge spécifique  $H_s$  imposée

En identifiant dans (III.17.3) que  $H_s - h = \frac{Q^2}{2gS^2}$ , on montre qu’au point critique on a une fois encore la grandeur  $\frac{Q^2}{S^2} \frac{1}{g\overline{B}}$  qui vaut 1.

- Le point critique identifié à partir de la relation  $H_s(h)$  et celui de la relation  $h(Q)$  ont la même signification physique : ils correspondent tous deux à un écoulement critique pour lequel il existe une relation unique entre  $h$  et  $Q$ . Ces points sont donc particulièrement intéressant à connaître pour caractériser l’écoulement.
- Pour tout débit inférieur au débit maximal, il y a toujours deux hauteurs d’eau différentes possibles (le strict calcul mathématique donne trois solutions mais l’une d’elle est négative donc physiquement inadmissible). Ces deux hauteurs d’eau appartiennent aux deux régimes d’écoulement (fluvial et torrentiel) et sont appelées profondeurs conjuguées.

### III.17.2 Hauteur d’eau critique

Au niveau du point critique, on a identifié que la grandeur  $\frac{Q^2}{S^2} \frac{1}{g\overline{B}}$  valait 1. Ce nombre adimensionnel est le ratio de la vitesse moyenne de l’écoulement sur la célérité des ondes de pressions :

$$\text{Fr}^2 = \frac{Q^2}{S^2} \frac{1}{g\overline{B}} = \frac{v^2}{gD_h} \tag{III.17.4}$$

Le nombre de Froude caractérise donc le passage du régime fluvial au régime torrentiel (et vice-versa). On a :

- $\text{Fr} > 1$  : régime torrentiel caractérisé par de fortes vitesses d’écoulement et de faibles hauteurs d’eau
- $\text{Fr} = 1$  : régime critique. Il y a une relation unique entre hauteur d’eau et débit
- $\text{Fr} < 1$  : régime fluvial caractérisé par de faibles vitesses d’écoulement et de fortes hauteurs d’eau

Circulaire	$Fr = \frac{Q}{\sqrt{gDh^4}}$	$h_c = \sqrt{\frac{Q}{\sqrt{gD}}}$
Ovoïde	$Fr = 1,8 \frac{Q}{\sqrt{gTh^4}}$	$h_c = 1,34 \sqrt{\frac{Q}{\sqrt{gT}}}$
Fer à cheval	$Fr = 0,62 \frac{Q}{\sqrt{gTh^4}}$	$h_c = 0,787 \sqrt{\frac{Q}{\sqrt{gT}}}$
Pour les sections ovoïde et fer à cheval, $T$ représente la hauteur de la section		

TABLE III.17.1 – Approximation du nombre de Froude pour des géométries courantes. Tableau de [16], p80.

La hauteur d'eau pour laquelle le nombre de Froude vaut 1 est appelée hauteur critique. Sa détermination est essentielle en hydraulique à surface libre, soit par le calcul direct soit par approximation (voir Table III.17.1).

On définit également la pente critique  $i_c$  qui correspond à une pente du fond telle que la hauteur normale soit identique à la hauteur critique pour le débit considéré :

$$i_c = \frac{gD_h}{K^2 R_h^{4/3}} \quad (\text{III.17.5})$$

On gardera à l'esprit que la pente critique  $i_c$  dépend du débit par l'intermédiaire du rayon et du diamètre hydraulique.

### III.17.3 Régime graduellement varié



L'équation de la ligne d'eau

#### III.17.3.1 Description du problème

Nous avons vu précédemment que tout écoulement cherchait à atteindre une position d'équilibre correspondant au régime permanent uniforme. Ainsi, dans un canal suffisamment long, l'écoulement deviendra uniforme loin de toute perturbation (variation de débit, changement de géométrie, singularité, ...). Le régime graduellement varié correspond à un régime non-uniforme mais présentant des variations spatiales lentes.

Dans cette configuration, la pente de la ligne des frottements  $S_f$  est calculée en faisant l'approximation qu'elle est identique à la pente d'un régime uniforme ayant la même vitesse d'écoulement et le même rayon hydraulique :

$$S_f = \frac{v^2}{K^2 R_h^{4/3}} \quad (\text{III.17.6})$$

### III.17.3.2 Équation de la ligne d'eau

Dans une configuration donnée (géométrie, pente du fond et rugosité de conduite connues), l'hydraulicien est amené à déterminer l'évolution de la hauteur d'eau dans une conduite ou un canal. Dans la pratique, le débit est généralement la grandeur connue et l'on cherche donc la distribution des hauteurs d'eau dans l'ensemble de l'écoulement. Cette distribution est appelée une ligne d'eau. Pour déterminer la ligne d'eau, il faut donc calculer la relation  $h(x)$  ou  $S(x)$ , connaissant  $Q$ ,  $K$ ,  $S_0$  et la géométrie de la section d'écoulement.

Différentes approches permettent de trouver l'équation de la ligne d'eau. On citera notamment :

- la simplification des équations de Saint-Venant
  - l'application du théorème de Bernoulli généralisé entre deux sections d'écoulement
- |                                              |                                                                                                                       |
|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Simplification des équations de Saint-Venant | Application de l'équation de Bernoulli<br>L'équation de Bernoulli généralisée appliquée entre deux sections s'écrit : |
|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Les équations générales de Saint-Venant (III.15.7), couplées au fait qu'il n'y a pas d'apport latéral ( $q = 0$ ) et que l'écoulement est en régime permanent, deviennent :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{(III.17.7a)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{S} \right) + gS \frac{\partial h}{\partial x} = gS(S_0 - S_f) \quad \text{(III.17.7b)}$$

On explicite maintenant les termes de (III.17.7b) :

$$2 \frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{S^2} \frac{\partial S}{\partial x} + gS \frac{\partial h}{\partial x} = gS(S_0 - S_f) \quad \text{(III.17.8)}$$

On introduit maintenant (III.17.7a) :

$$- \frac{Q^2}{S^2} \frac{\partial S}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} + gS \frac{\partial h}{\partial x} = gS(S_0 - S_f) \quad \text{(III.17.9)}$$

Or  $\frac{\partial S}{\partial x} = B$  :

$$\left( gS - \frac{Q^2}{S^2} B \right) \frac{\partial h}{\partial x} = gS(S_0 - S_f) \quad \text{(III.17.10)}$$

En réorganisant les termes, il vient :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{gS(S_0 - S_f)}{gS \left( 1 - \frac{Q^2}{S^2} \frac{B}{gS} \right)}$$

$$= \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2} \quad \text{(III.17.11)}$$

Ces deux approches sont équivalentes et aboutissent rigoureusement à la même équation de la ligne d'eau :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2} \quad \text{(III.17.17)}$$

$$H_{am} - H_{av} = -S_f(x_{am} - x_{av}) \quad \text{(III.17.12)}$$

Si les sections sont proches alors  $x_{am} - x_{av} = dx$  et  $H_{am} - H_{av} = dH$ . Localement l'équation de Bernoulli généralisée s'écrit donc :

$$\frac{dH}{dx} = -S_f \quad \text{(III.17.13)}$$

On introduit maintenant la définition de la charge :  $H = z + H_s$

$$\frac{d(z + H_s)}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dH_s}{dx} = -S_f \quad \text{(III.17.14)}$$

En identifiant que  $dz/dx = -S_0$  et en introduisant la définition de la charge spécifique, il vient :

$$\frac{d}{dx} \left( h + \frac{Q^2}{2gS^2} \right) = S_0 - S_f$$

$$\frac{dh}{dx} + \frac{Q^2}{2g} \frac{-2}{S^3} \frac{dS}{dx} = S_0 - S_f \quad \text{(III.17.15)}$$

En canal prismatique, on peut écrire  $\frac{\partial S}{\partial x} = B$  :

$$\frac{dh}{dx} \left( 1 - \frac{Q^2}{S^2} \frac{B}{gS} \right) = S_0 - S_f \quad \text{(III.17.16)}$$

L'équation de la ligne d'eau est une équation différentielle qui nécessite donc de connaître au moins une valeur de la hauteur d'eau en une position donnée. Ces points particuliers sont appelés des sections de contrôle à partir desquelles on résout (III.17.17) de proche en proche.

### III.17.3.3 Les différentes courbes de remous



Tracé de courbes de remous

Avant de chercher à résoudre l'équation de la ligne d'eau, on souhaite connaître toutes les solutions admissibles suivant les différentes configurations possibles. On étudie donc  $S_0 - S_f$  et  $1 - Fr^2$ .

$S_0 - S_f$  compare les pentes du fond et de la ligne des frottements. On a montré que ces deux pentes étaient égales pour un régime permanent uniforme donc pour une hauteur d'eau  $h$  égale à la hauteur normale  $h_N$ . La hauteur d'eau d'un écoulement peut a priori être supérieure ou inférieure à la hauteur normale  $h_N$ .  $S_0 - S_f$  peut donc être positif ( $h > h_N$ ), nulle ( $h = h_N$ ) ou négatif ( $h < h_N$ ).

$1 - Fr^2$  compare le nombre de Froude à 1 et indique donc si l'écoulement est fluvial ou torrentiel. On a montré que le nombre de Froude valait 1 pour une hauteur d'eau  $h$  égale à la hauteur critique  $h_C$ . La hauteur d'eau d'un écoulement peut a priori être supérieure ou inférieure à la hauteur critique  $h_C$ .  $1 - Fr^2$  peut donc être négatif ( $h > h_C$ ), nulle ( $h = h_C$ ) ou positif ( $h < h_C$ ).

Pour déterminer les différentes courbes de remous, on considère les différentes valeurs de la pente du fond par rapport à la pente critique  $i_c$  (voir (III.17.5)) :

Typologie	Pente du fond	
Pente faible (mild slope)	$S_0 < i_c$	$h_C < h_N$
Pente critique (critical slope)	$S_0 = i_c$	$h_C = h_N$
Pente forte (steep slope)	$S_0 > i_c$	$h_C > h_N$
Pente nulle (horizontal slope)	$S_0 = 0$	$h_N = \infty$
Contre pente (adverse slope)	$S_0 < 0$	

#### III.17.3.3.1 Pente faible (voir figure III.17.3)

**Propriétés** Un canal est en pente faible quand la pente du fond  $S_0$  est inférieure à la pente critique  $i_c$ . Il en découle que la hauteur critique est inférieure à la hauteur normale.

**Détermination des courbes de remous possibles** Pour déterminer les différentes courbes de remous possibles, on se fixe une hauteur d'eau arbitraire en un point et l'on regarde le signe de  $dh/dx$  pour déterminer comment varie la hauteur d'eau.

hauteur imposée	$S_0 - S_f$	$1 - Fr^2$	$dh/dx$	Dénomination
$h < h_c < h_N$	$< 0$	$< 0$	$> 0$	M3
$h_c < h < h_N$	$< 0$	$> 0$	$< 0$	M2
$h_c < h_N < h$	$> 0$	$> 0$	$> 0$	M1

#### III.17.3.3.2 Pente critique (voir figure III.17.4)

**Propriétés** Un canal est en pente critique quand la pente du fond  $S_0$  est égale à la pente critique  $i_c$ . Il en découle que la hauteur critique est confondue à la hauteur normale.

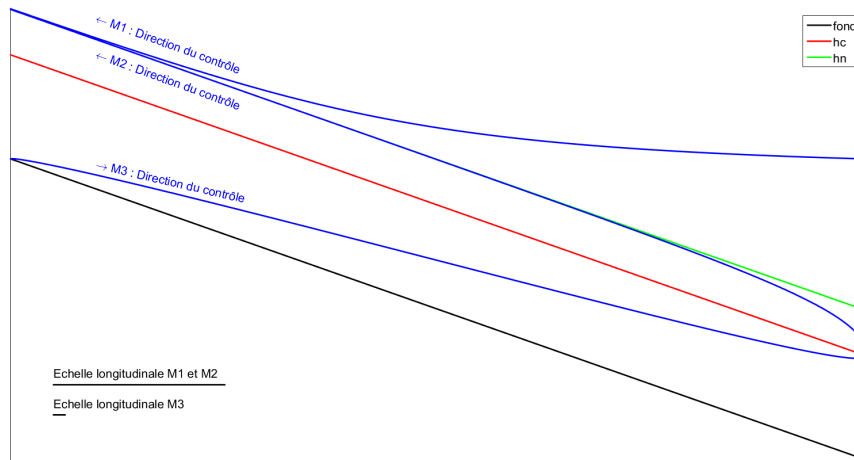


FIGURE III.17.3 – Courbes de remous possibles en pente faible

**Détermination des courbes de remous possibles** Pour déterminer les différentes courbes de remous possibles, on se fixe une hauteur d'eau arbitraire en un point et l'on regarde le signe de  $dh/dx$  pour déterminer comment varie la hauteur d'eau.

hauteur imposée	$S_0 - S_f$	$1 - Fr^2$	$dh/dx$	Dénomination
$h < h_c = h_N$	$< 0$	$< 0$	$> 0$	C3
$h_c = h_N < h$	$> 0$	$> 0$	$> 0$	C1

### III.17.3.3.3 Pente forte (voir figure III.17.5)

**Propriétés** Un canal est en pente forte quand la pente du fond  $S_0$  est supérieur à la pente critique  $i_c$ . Il en découle que la hauteur critique est supérieure à la hauteur normale.

**Détermination des courbes de remous possibles** Pour déterminer les différentes courbes de remous possibles, on se fixe une hauteur d'eau arbitraire en un point et l'on regarde le signe de  $dh/dx$  pour déterminer comment varie la hauteur d'eau.

hauteur imposée	$S_0 - S_f$	$1 - Fr^2$	$dh/dx$	Dénomination
$h < h_N < h_c$	$< 0$	$< 0$	$> 0$	S3
$h_N < h < h_c$	$> 0$	$< 0$	$< 0$	S2
$h_N < h_c < h$	$> 0$	$> 0$	$> 0$	S1

### III.17.3.3.4 Pente nulle (voir figure III.17.6)

**Propriétés** Pour un canal à pente nulle, on peut montrer mathématiquement que la hauteur normale soit tendre vers l'infini. Cela veut dire qu'il n'y a pas d'état d'équilibre hors du cas  $Q = 0$ .

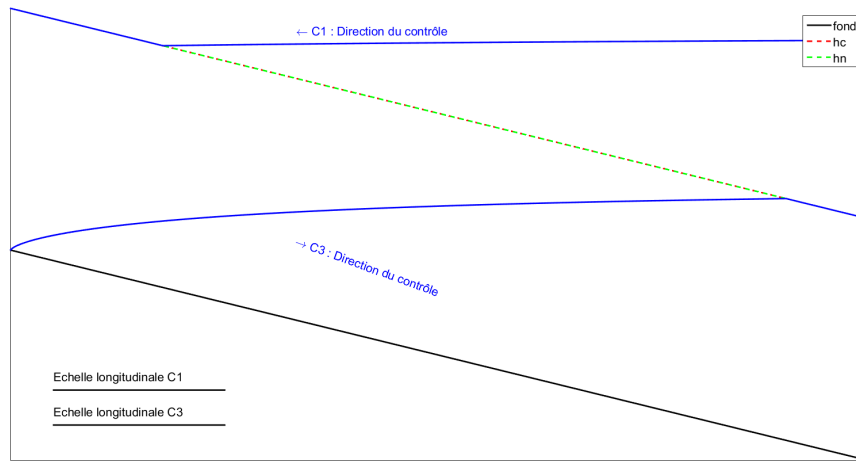


FIGURE III.17.4 – Courbes de remous possibles en pente critique

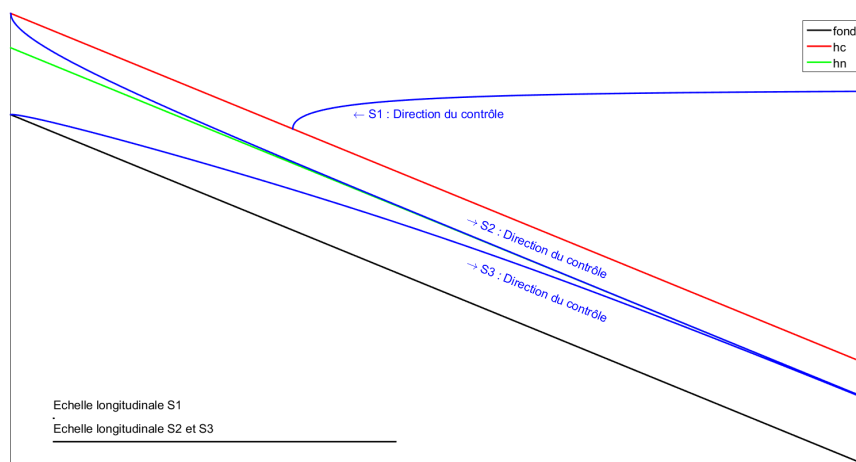


FIGURE III.17.5 – Courbes de remous possibles en pente forte



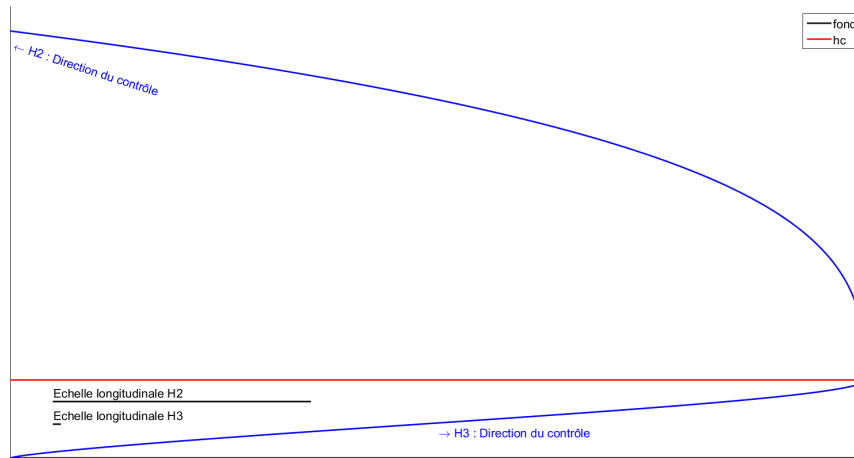


FIGURE III.17.6 – Courbes de remous possibles en pente nulle

**Détermination des courbes de remous possibles** Pour déterminer les différentes courbes de remous possibles, on se fixe une hauteur d'eau arbitraire en un point et l'on regarde le signe de  $dh/dx$  pour déterminer comment varie la hauteur d'eau.

hauteur imposée	$S_0 - S_f$	$1 - Fr^2$	$dh/dx$	Dénomination
$h < h_c < \infty$	$< 0$	$< 0$	$> 0$	H3
$h_c < h < \infty$	$< 0$	$> 0$	$< 0$	H2

### III.17.3.3.5 Contre pente (voir figure III.17.7)

**Propriétés** Un canal est en contre pente faible quand la pente du fond  $S_0$  augmente vers l'aval. Dans une telle configuration, il n'y a pas non plus de position d'équilibre avec un écoulement de l'amont vers l'aval. On notera qu'une position d'équilibre peut être atteinte si l'écoulement s'inverse. A noter également que pour une telle configuration la seule solution mathématique serait d'avoir une profondeur normale  $h_N$  négative ce qui est évidemment impossible. Toutefois, on en déduit que la hauteur d'eau est toujours supérieure à  $h_N$ .

**Détermination des courbes de remous possibles** Pour déterminer les différentes courbes de remous possibles, on se fixe une hauteur d'eau arbitraire en un point et l'on regarde le signe de  $dh/dx$  pour déterminer comment varie la hauteur d'eau.

hauteur imposée	$S_0 - S_f$	$1 - Fr^2$	$dh/dx$	Dénomination
$h < h_c$	$< 0$	$< 0$	$> 0$	A3
$h_c < h$	$< 0$	$> 0$	$< 0$	A2

### III.17.3.4 Les sections de contrôle

La résolution de l'équation différentielle (III.17.17) par intégration ne peut se faire qu'à partir d'un point pour lequel on connaît à la fois l'abscisse et la hauteur d'eau. Un tel point est un

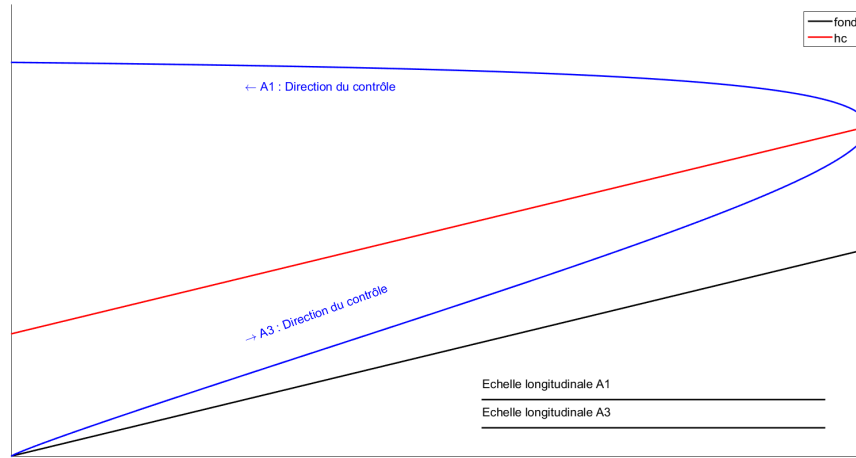


FIGURE III.17.7 – Courbes de remous possibles en contre pente

nommé un point de contrôle et il correspond physiquement à la perturbation qui a provoqué le régime graduellement varié (puisqu'en l'absence de perturbation, l'écoulement se place à sa position d'équilibre : la hauteur normale). De fait, tout écoulement qui n'est pas à sa profondeur normale tente d'y revenir (comme cela a été montré à la partie III.16.2.1).

L'observation des courbes de possibles montrent que dans tous les cas, un écoulement fluvial se rapprochera de la hauteur normale  $h_N$  vers l'amont et qu'un écoulement torrentiel tendra vers  $h_N$  vers l'aval. Ainsi, on cherchera les sections de contrôle :

- à l'amont pour les écoulements torrentiels : courbes de remous M3, C3, S2, S3, H3, A3.

Dans ce cas, l'équation de la ligne d'eau (III.17.17) doit être résolue d'amont en aval.

- à l'aval pour les écoulements fluviaux : courbes de remous M1, M2, C1, S1, H2, A2. Dans ce cas, l'équation de la ligne d'eau (III.17.17) doit être résolue d'aval en amont.

Le sens de résolution de l'équation de la ligne d'eau (III.17.17) peut être déterminé par :

**des considérations physiques.** L'expérimentation montre qu'un écoulement torrentiel est déterminé par l'amont et qu'un écoulement fluvial est déterminé par l'aval.

**l'étude mathématique des équations de Saint-Venant.** Ces équations sont des équations d'onde ce qui signifie qu'en permanence des ondes sont générées et se déplacent dans l'écoulement (pas nécessairement dans le sens de l'eau). Ces ondes portent des informations sur l'écoulement et on montre qu'il est nécessaire de connaître deux de ces informations en un point pour totalement déterminer l'écoulement. En régime torrentiel, on calcule que toutes les ondes vont dans la direction de l'écoulement ; le point de contrôle déterminant l'écoulement est donc nécessairement à l'amont. A contrario en régime fluvial, les ondes voyagent vers l'amont et l'aval simultanément. L'information venant de l'amont étant généralement le débit, le point de contrôle est donc nécessairement à l'aval.

### III.17.3.5 Exemple de courbes de remous (voir figures III.17.8 et III.17.9)



Tracé de courbes de remous

P. Finaud-Guyot

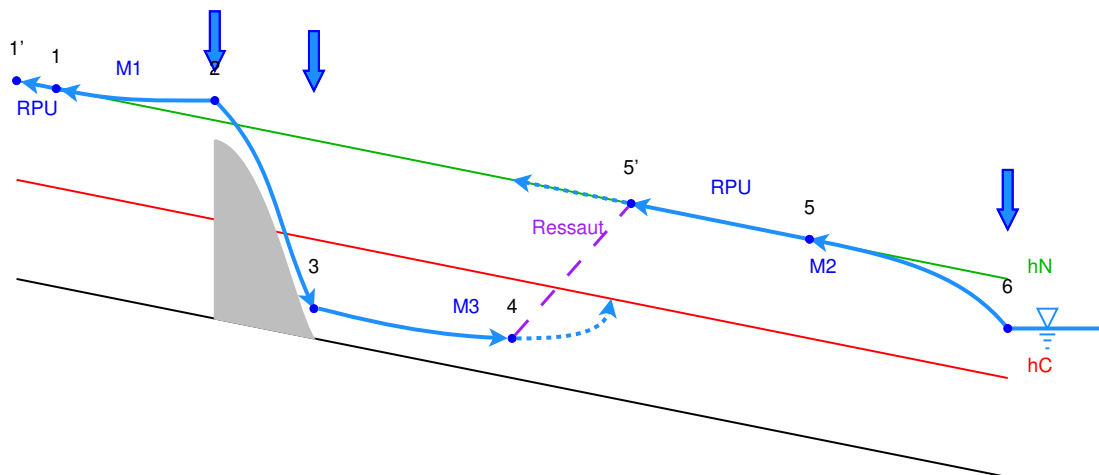


FIGURE III.17.8 – Exemple de courbe de remous pour un canal en pente faible

Le canal est en pente faible ( $h_N > h_C$ ) donc il y a nécessairement un point de contrôle à l'extrémité aval (6 - hauteur d'eau imposée). Par ailleurs, le seuil définit deux points de contrôle à l'amont (2) et à l'aval (3). En partant de ces points (2), (3) et (6), on trace les courbes de remous : respectivement M1, M3 et M2. La courbe M1 et la courbe M2 rejoignent la hauteur normale  $h_N$  respectivement en (1) et (5). On notera qu'une fois que l'écoulement a atteint la hauteur normale, il n'y a pas de raison pour que la hauteur d'eau varie : points (1') et (5'). Au niveau des points (4) et (5'), on note qu'il y a deux courbes de remous simultanément : M2 et M3. Cela indique la présence d'un changement de régime d'écoulement correspondant à un passage torrentiel - fluvial. Un tel changement de régime est appelé un ressaut hydraulique (voir partie III.17.4).

Dans cette partie, on ne cherche pas à comprendre l'écoulement au niveau des singularités qui constituent les points de contrôles. Cela sera abordé à la partie III.18. Sur les différents exemples, on retrouvera :

- les points de contrôle matérialisés par des flèches
- les points numérotés identifiant une spécificité de l'écoulement
- les courbes de remous effectives (en trait plein) correspondant au tracé réel de la ligne d'eau et les courbes de remous potentielles (en pointillés) qui prolongent les courbes de remous effectives quant il y a lieu
- les ressauts hydrauliques qui sont des structures particulières de l'écoulement qui seront abordées ultérieurement (voir partie III.17.4).

### III.17.3.6 Résolution de l'équation de la ligne d'eau

La résolution de la ligne d'eau de manière à connaître les hauteurs d'eau en tout point de l'écoulement peut être faite de plusieurs manières.

#### III.17.3.6.1 Résolution numérique



Calcul de ligne d'eau fluviale  
 Calcul de ligne d'eau torrentielle  
 Calcul de ligne d'eau avec changement de régime sans ressaut  
 Calcul de ligne d'eau avec ressaut

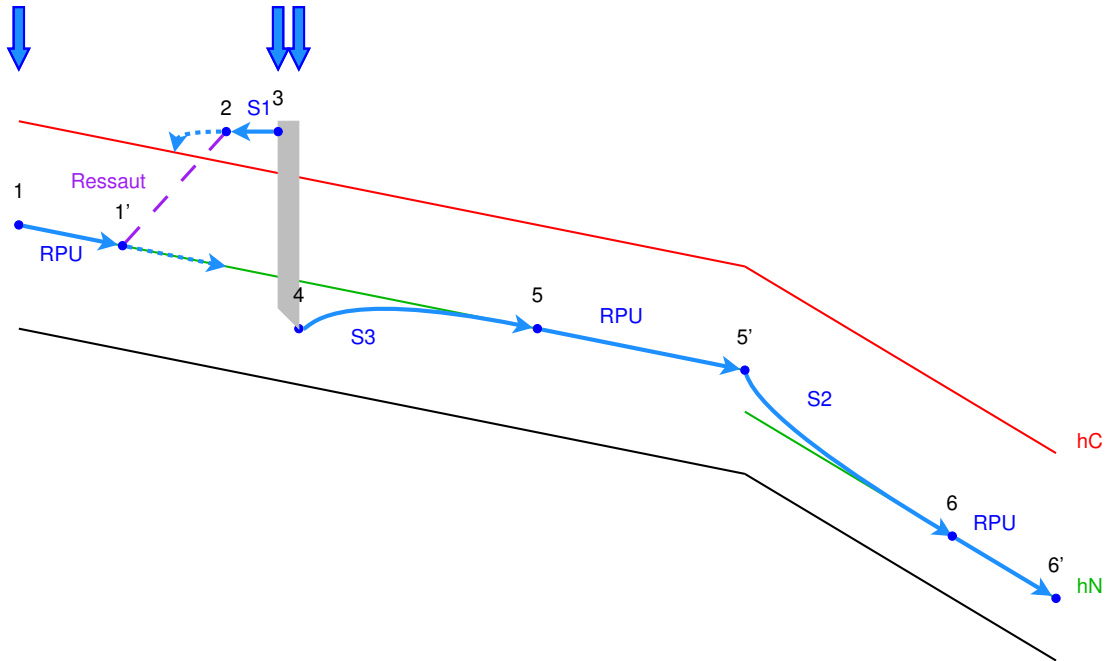


FIGURE III.17.9 – Exemple de courbe de remous pour un canal en pente forte  
 Le canal est en pente forte ( $h_C > h_N$ ) donc il y a nécessairement un point de contrôle à l'extrémité amont (1 - hauteur normale). Par ailleurs, la vanne définit deux points de contrôle à l'amont (3) et à l'aval (4). En partant de ces points (1), (3) et (4), on trace les courbes de remous : respectivement RPU (régime uniforme), S1 et S3. La courbe RPU se prolonge sans fin. Entre le point (2) et le point (1'), il y a une courbe fluviale et une courbe torrentielle donc apparition d'un ressaut hydraulique. La courbe S3 rejoint la hauteur normale  $h_N$  en (5) puis continue jusqu'en (5'). En (5'), il y a un changement de pente du fond qui modifie la valeur de la hauteur normale (mais pas celle de la hauteur critique). Une courbe de remous S2 apparaît au point (5'), rejoint la nouvelle hauteur normale en (6) puis reste à la hauteur normale (6').

La résolution numérique vise à résoudre l'équation de la ligne d'eau en utilisant une discrétisation numérique. L'équation (III.17.17) discrétisée est alors résolue de proche en proche à partir d'une section de contrôle.

Dans tous les cas, on approxime la dérivée de (III.17.17) par :

$$\frac{dh}{dx} \approx \frac{h_{i+1} - h_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (\text{III.17.18})$$

où  $x_i$  et  $x_{i+1}$  sont les abscisses de deux points de calcul,  $h_i$  et  $h_{i+1}$  sont les hauteurs d'eau pour ces points. Par convention, l'axe des  $x$  est orienté dans le sens de l'écoulement :  $x_{i+1}$  est donc plus à l'aval que  $x_i$ . En désignant le second membre de (III.17.17) par  $f(h)$ , l'équation de la ligne d'eau se résout en estimant  $f_{i+1/2}$  : la valeur de  $f(h)$  entre  $x_i$  et  $x_{i+1}$ . La méthode la plus couramment employée consiste à estimer  $f_{i+1/2}$  en faisant la moyenne pondérée de  $f(h)$  en  $x_i$  et en  $x_{i+1}$  :

$$f_{i+1/2} = \theta f(h_i) + (1 - \theta) f(h_{i+1}) \quad (\text{III.17.19})$$

où  $\theta$  est un coefficient de pondération entre 0 et 1.

L'équation de la ligne d'eau discrétisée devient donc :

$$h_{i+1} - h_i = (\theta f(h_i) + (1 - \theta) f(h_{i+1})) (x_{i+1} - x_i) \quad (\text{III.17.20})$$

L'équation discrétisée (III.17.20) doit ensuite être résolue de proche en proche à partir d'un point de contrôle. Comme précédemment, le point de contrôle devra être à l'amont en régime torrentiel et à l'aval en régime fluvial. Pour la suite, nous supposons que l'écoulement est fluvial et que par conséquent le couple  $(x_{i+1}, h_{i+1})$  est parfaitement connu. On note que pour résoudre (III.17.20), il faut connaître  $f(h_i)$  ce qui nécessiterait de connaître  $h_i$  (que l'on cherche). L'approche consiste donc à choisir une valeur de  $h_i$ . Dans le cas présenté ici, nous considérons un écoulement fluvial donc un écoulement qui tend vers la hauteur normale vers l'amont. On a donc nécessairement  $h_N > h_i > h_{i+1}$  où  $h_N < h_i < h_{i+1}$ . Il est important de faire un choix de  $h_i$  avec un sens physique faute de quoi la résolution ne peut se faire correctement. A partir de la valeur de  $h_i$ , on peut aisément recalculer  $f(h_i)$  et ainsi en déduire la dernière inconnue :  $x_i$ .

Cette méthode itérative présente l'avantage d'être facilement utilisable dans un logiciel de calcul (Matlab, Excel, ...).

Le coefficient de pondération  $\theta$  est dans la grande majorité des cas pris égal à 1/2. Toutefois, il n'est pas impossible que le point de contrôle corresponde à un écoulement critique ; par exemple  $h_{i+1} = h_C$ . Dans ce cas, il faut calculer  $f(h_i)$  :

$$f(h_i) = f(h_C) = \frac{S_0 - S_f(h_C)}{1 - \text{Fr}^2(h_C)} \quad (\text{III.17.21})$$

Dans la mesure où  $\text{Fr}(h_C) = 1$ , le calcul de  $f(h_i)$  même à une indétermination mathématique. Dans ce cas, on définit  $\theta$  tel que le coefficient pondérateur de  $f(h_i)$  soit égal à 0 dans (III.17.20).

### III.17.3.6.2 Résolution par abaque

Dans le cas de courbes de remous dans un canal rectangulaire, l'équation de la ligne d'eau peut être résolue facilement. En réécrivant l'équation (III.17.17) pour faire apparaître  $Y = h/h_N$ ,  $f = h_C/h_N$  et  $X = S_0 x/h_N$ , on peut obtenir une courbe adimensionnée pour chaque configuration possible. Ces courbes sont regroupées à l'annexe H. Le choix de l'abaque dépend du type de courbe rencontrées (voir tableau III.17.2).

Pour déterminer l'équation de la ligne d'eau pour n'importe quelle géométrie de canal prismatique, il suffit d'identifier le canal rectangulaire équivalent présentant les mêmes propriétés (même débit  $Q$ , pente du fond  $S_0$ , coefficient de frottement  $K$ , hauteur normale  $h_N$  et critique  $h_C$ ) que le canal prismatique réel. On transpose ensuite la ligne d'eau à partir de l'abaque.

Cette méthode conduit à des écarts de maximum 10% par rapport à la courbe de remous réelle.

Type de courbes	Conditions	Abaque
S1, S2	Pente forte ( $h_C > h_N$ ) $h > h_N$	A
M1, C1	Pente faible ( $h_C \leq h_N$ ) $h > h_N$	B
M2, M3	Pente faible ( $h_C < h_N$ ) $h < h_N$	C
S3, C3	Pente forte ( $h_C \geq h_N$ ) $h < h_N$	D

TABLE III.17.2 – Clé de choix pour l’abaque de résolution de la courbe de remous. D’après [16]

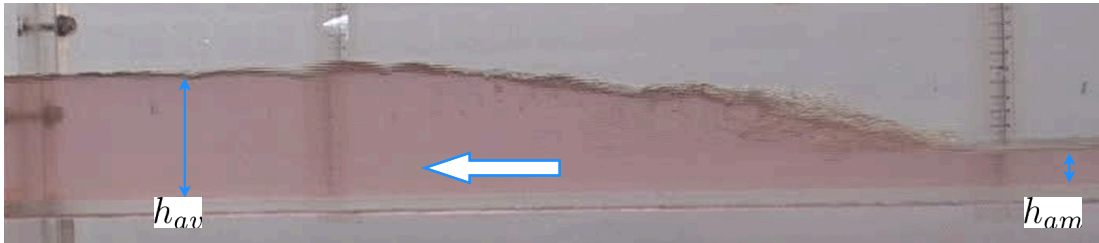


FIGURE III.17.10 – Illustration d’un ressaut hydraulique. Crédit photo : J. Vazquez©

### III.17.4 Régime rapidement varié



Le ressaut hydraulique

Dans un écoulement, il peut arriver que l’écoulement passe d’un régime torrentiel à un régime fluvial. Ce changement de régime d’écoulement, très localisé et dissipateur d’énergie, est dénommé un ressaut hydraulique. Il apparaît lors du passage d’une courbe M3, C3, S2, S3, H3 ou A3 vers une courbe M1, M2, C2, S1, H2 ou A2.

La dissipation d’énergie au passage d’un ressaut se fait sous forme de dissipation turbulente à l’origine de fortes vitesses d’écoulement pouvant avoir une action érosive significative sur le canal. Ainsi, la détermination de la position du ressaut est essentielle pour l’hydraulicien. Un ressaut est caractérisé par ses hauteurs d’eau amont  $h_{am}$  et aval  $h_{av}$ , sa longueur et la perte de charge qu’il entraîne. Les hauteurs d’eau amont et aval sont appelées profondeurs conjuguées du ressaut.

#### III.17.4.1 Relation entre les profondeurs conjuguées

Sur le papier, l’hydraulicien identifie l’existence d’un ressaut par la présence de deux courbes de remous (une fluviale et une torrentielle). Le ressaut apparaîtra à l’endroit où ses deux profondeurs conjuguées appartiendront à chacune des deux courbes de remous. On cherche donc à établir une relation entre les profondeurs conjuguées du ressaut.

Dans la mesure où le ressaut est à l’origine d’une forte dissipation d’énergie difficilement estimable, il n’est pas possible d’utiliser la relation de Bernoulli. En revanche, on peut appliquer

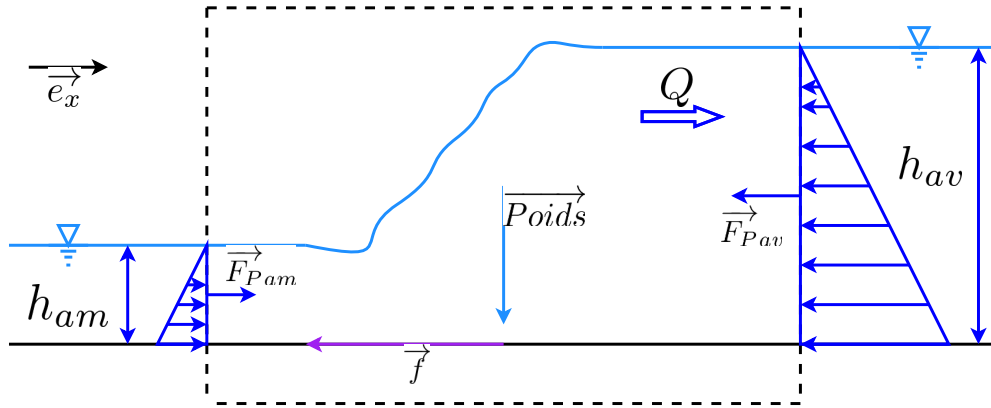


FIGURE III.17.11 – Schéma descriptif d'un ressaut

le théorème d'Euler à un volume de fluide contenant le ressaut dans son intégralité (voir figure III.17.11). Les forces qui s'exercent sur le volume de fluide sont :

- les forces de pression à l'amont et l'aval :  $\vec{F}_{P,am} = \rho g y_{G,am} S_{am} \vec{e}_x$  et  $\vec{F}_{P,av} = -\rho g y_{G,av} S_{av} \vec{e}_x$
- les forces de frottements sur le fond que l'on considère négligeable étant donnée la faible longueur du ressaut par rapport à la longueur de l'écoulement
- le poids de l'eau dont la composante verticale est compensée par la réaction du fond. On néglige l'action de la réaction du fond dans le sens de l'écoulement ce qui revient à considérer que le canal est à fond plat.

Le théorème d'Euler appliquée au volume de fluide identifié s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{S_{am}} (\rho \vec{v}) \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_{av}} (\rho \vec{v}) \vec{v} \cdot \vec{n} dS &= \vec{F}_{P,am} + \vec{F}_{P,av} \\ \rho \frac{Q^2}{S_{av}} \vec{e}_x - \rho \frac{Q^2}{S_{am}} \vec{e}_x &= \rho g y_{G,am} S_{am} \vec{e}_x - \rho g y_{G,av} S_{av} \vec{e}_x \\ \frac{Q^2}{S_{am}} + g y_{G,am} S_{am} &= \frac{Q^2}{S_{av}} + g y_{G,av} S_{av} \end{aligned} \quad (\text{III.17.22})$$

L'équation (III.17.22) traduit le fait que la grandeur  $\frac{Q^2}{S} + g y_G S$  (appelée l'impulsion) se conserve à travers un ressaut. En développant l'équation (III.17.22) pour différentes formes de géométries, on peut obtenir des relations simplifiées (exactes ou approchées) entre les hauteurs conjuguées (voir tableau III.17.3).

### III.17.4.2 Positionnement du ressaut

Le positionnement du ressaut se fait à partir de l'équation (III.17.22). Il existe différentes méthodes pour positionner le ressaut qui arrivent à un résultat très similaire.

#### III.17.4.2.1 Méthode de l'impulsion

Cette méthode consiste à tracer l'impulsion de chacune des courbes de remous. Le point d'intersection des courbes d'impulsion donne l'emplacement du ressaut (voir figure III.17.12).

#### III.17.4.2.2 Méthode de la courbe conjuguée

Cette méthode consiste à tracer la courbe des profondeurs conjuguées d'une courbe de remous. L'intersection entre la courbe conjuguée et l'autre courbe de remous indique l'emplacement

Section	Formulation	
Rectangulaire	$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 8Fr_2^2} \right)$ <p>où les points 1 et 2 sont conjugués (1 peut être choisit arbitrairement à l'amont (resp. à l'aval) du ressaut et 2 à l'aval (resp. à l'amont))</p>	Exacte
Trapézoïdal	$\left( \frac{h_{av}}{h_{am}} \right)^3 \left( \frac{1 + B_{av}}{1 + B_{am}} \right) \left( \frac{2 + 3B_{av}}{1 + B_{av}} \right) - \left( \frac{2 + 3B_{am}}{1 + B_{am}} \right) = \frac{6Q^2}{gm^2 h_{am}^5 (1 + B_{am})^2} \left[ 1 - \left( \frac{h_{am}}{h_{av}} \right)^2 \left( \frac{1 + B_{am}}{1 + B_{av}} \right) \right]$	
Circulaire $y = h/D$ $y_1 < 0.7$	$\frac{y_{av} - y_{am}}{1 - y_{am}} = \left( \frac{q_D - y_{am}^2}{q_0 - y_{am}^2} \right)^{0.95}$ $q_D = \frac{Q}{\sqrt{gD^5}}$ $q_0 = \frac{3}{4} y_{am}^{3/4} \left( 1 + \frac{4}{9} y_{am}^2 \right)$	Approchée
Fer à cheval ou ovoïde $y = h/T$ $y_1 < 0.7$	$\frac{y_{av} - y_{am}}{1 - y_{am}} = \left( \frac{q_D - y_{am}^2}{q_0 - y_{am}^2} \right)^{0.95}$ $q_D = \frac{Q}{\sqrt{gB^2 T^3}}$ $q_0 = \frac{3}{4} y_{am}^{3/4} \left( 1 + \frac{4}{9} y_{am}^2 \right)$	Approchée

TABLE III.17.3 – Relations simplifiées pour le calcul des hauteurs conjuguées. D'après [16, 12]

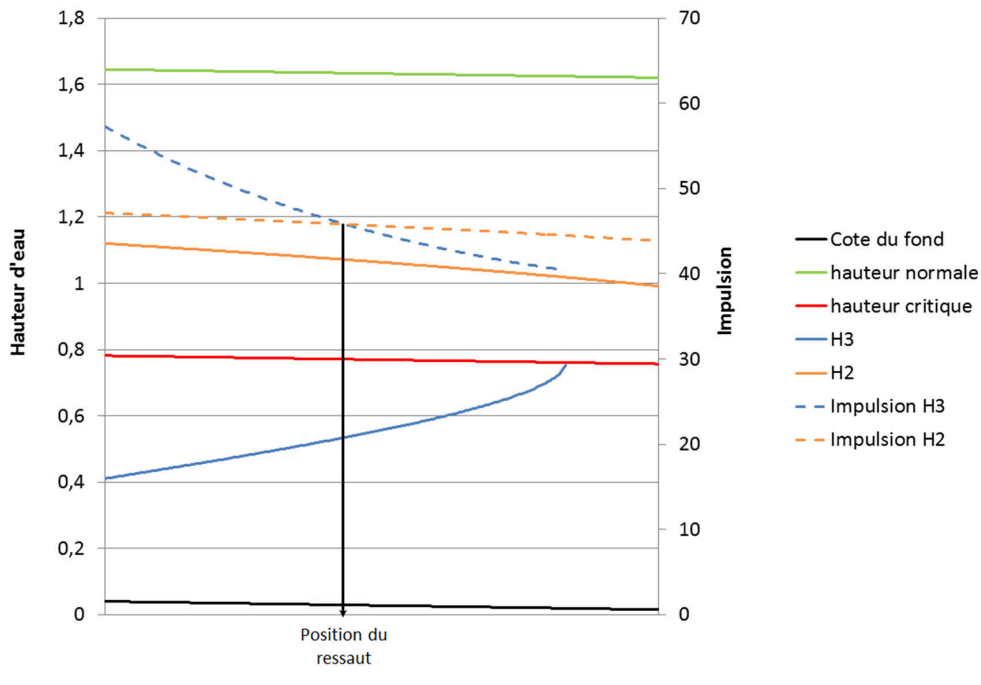


FIGURE III.17.12 – Illustration de la méthode de l'impulsion. Les courbes H2 et H3 correspondent aux courbes de remous calculées à partir de l'équation de la ligne d'eau.



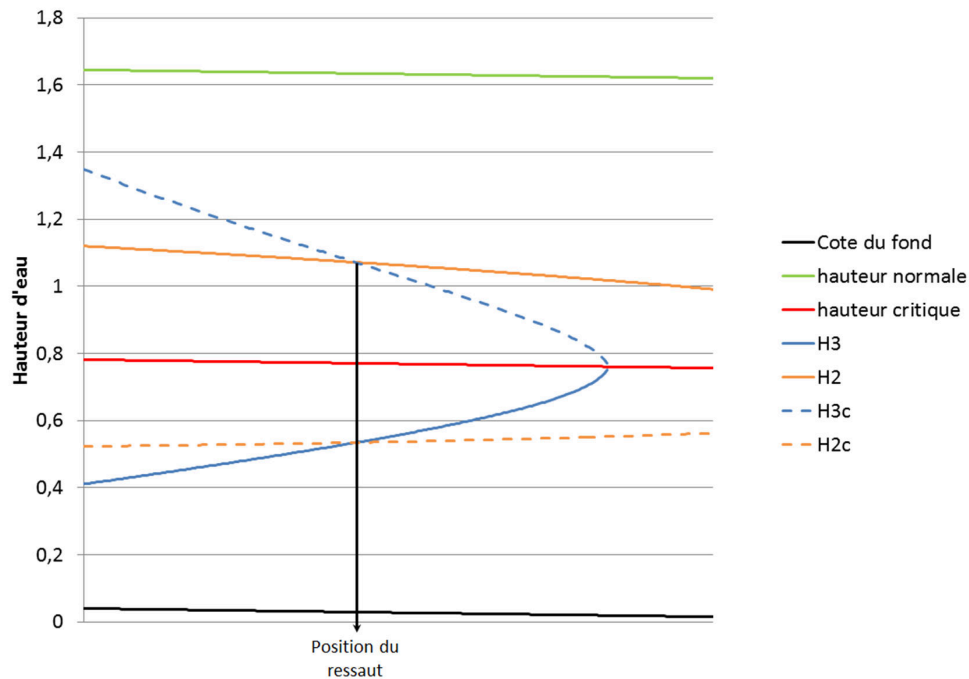


FIGURE III.17.13 – Illustration de la méthode de la courbe conjuguée. Les courbes H2 et H3 correspondent aux courbes de remous calculées à partir de l'équation de la ligne d'eau. Les courbes H2c et H3c sont leurs courbes conjuguées respectives.

ment du ressaut (voir figure III.17.13). On notera sur l'exemple que le tracé des deux courbes conjuguées donne la même position de ressaut.

### III.17.4.3 Perte de charge dans un ressaut

La perte de charge dans un ressaut peut se calculer avec le théorème de Bernoulli généralisé :

$$\begin{aligned} \Delta H_{ressaut} &= (H_s)_{am} - (H_s)_{av} \\ &= \left( h + \frac{Q^2}{2gS^2} \right)_{am} - \left( h + \frac{Q^2}{2gS^2} \right)_{av} \end{aligned} \quad (\text{III.17.23})$$

Une autre solution consiste à tracer directement l'impulsion et la charge spécifique en fonction de la profondeur. Connaissant l'une des profondeurs (amont ou aval) du ressaut, il suffit de lire l'impulsion et la charge spécifique correspondante (voir figure III.17.14). Dans l'illustration, on admet que  $h_{am}$  est connue. On peut directement lire  $I_{am}$  et  $H_{s,am}$ . L'impulsion ne variant pas à travers un ressaut, on a  $I_{av} = I_{am}$  ce qui impose la valeur de  $h_{av}$ . De cette valeur, on peut en déduire la charge spécifique à l'aval du ressaut et donc calculer la différence de charge.

### III.17.4.4 Longueur du ressaut

La longueur d'un ressaut est la distance entre l'amont du ressaut et le point pour lequel toute l'énergie peut être considérée comme dissipée. Suivant les auteurs, différentes formules permettent d'estimer la longueur d'un ressaut :

**Sinniger et Hager** [15] :

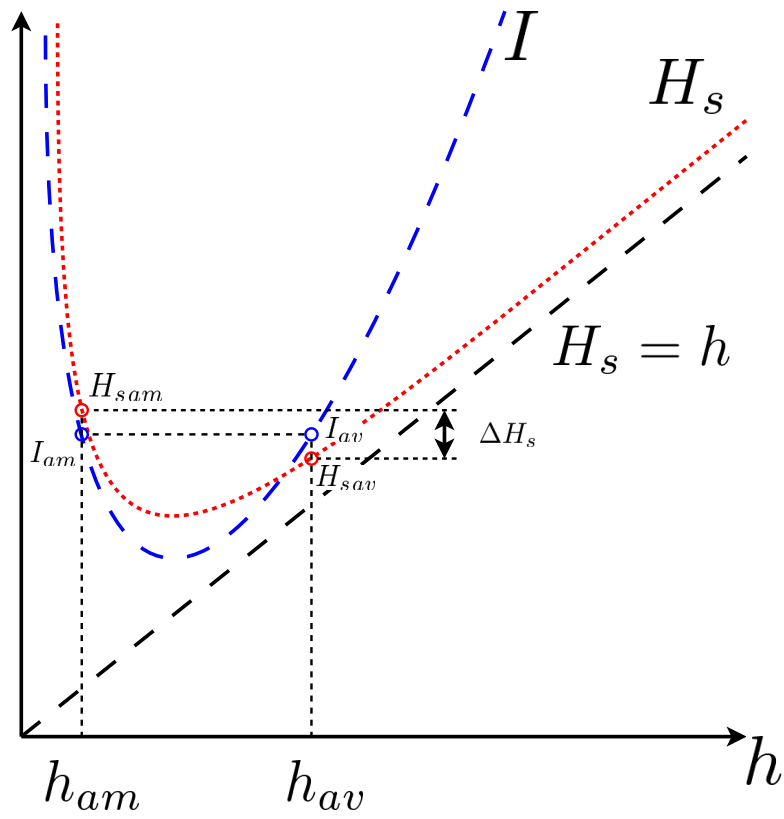


FIGURE III.17.14 – Illustration du calcul de la perte de charge dans un ressaut

$$L_{ressaut} = 35h_{av} \frac{\sqrt{Fr_{am}}}{8 + Fr_{am}} \quad (\text{III.17.24})$$

**Degoutte :**

$$4,5h_{av} < L_{ressaut} < 6h_{av} \quad (\text{III.17.25})$$

**Vazquez [16] :**

$$5 < \frac{L_{ressaut}}{h_{av} - h_{am}} < 7 \quad (\text{III.17.26})$$



# Chapitre III.18

## Les ouvrages

Les singularités rencontrées en hydraulique à surface libre sont nombreuses. Les formules synthétisées dans ce cours ne sont qu'un aperçu des configurations les plus courantes.

### III.18.1 Les seuils frontaux

Un seuil frontal est un ouvrage en travers du bief. Le débit du bief doit obligatoirement passer au-dessus de cet ouvrage. Les seuils (aussi appelés déversoirs) sont des dispositifs permettant :

- le maintien du niveau d'eau à leur amont
- de mesurer sous certaines conditions le débit à partir d'une mesure de hauteur d'eau
- un partage du débit amont

#### III.18.1.1 Quelques définitions

On distingue (voir figure III.18.1) :

- les seuils frontaux quand le seuil est installé en travers de l'écoulement
- les seuils latéraux quand le débit déversé génère un écoulement secondaire. Ce type de seuil se situe donc à la jonction de trois écoulements de débit distinct.

Un seuil ou un déversoir peut être noyé ou dénoyé (voir figure III.18.2). Dans le cas dénoyé, l'écoulement sur le seuil ne dépend que des conditions à l'amont de l'ouvrage. En revanche, lorsqu'il est noyé, le débit transitant sur l'ouvrage est fonction des conditions amont et aval. Cette notion noyé-dénoyé s'applique également aux vannes.

La crête d'un seuil correspond à sa cote maximale sur laquelle l'eau va déverser et la pelle (ou hauteur de pelle) correspond à la hauteur d'eau nécessaire à l'amont avant déversement (voir figure III.18.3).

#### III.18.1.2 Loi de déversoir pour un seuil en paroi mince sans contraction latérale (déversoir de Bazin)

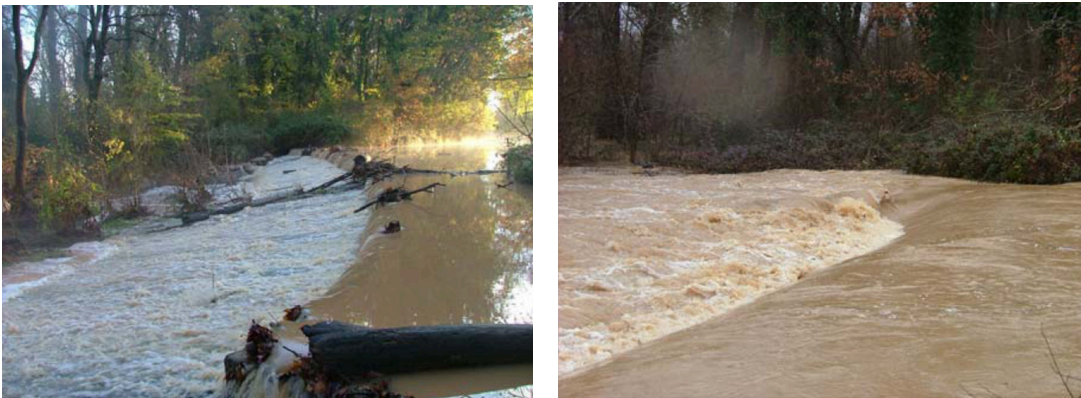
On considère un seuil en paroi mince ayant une hauteur de pelle  $p$ . La hauteur d'eau à l'amont du seuil est  $y$  pour un débit  $Q$  permanent. En supposant que la section non influencée par le seuil et la section du seuil sont peu éloignées, on peut écrire la conservation de la charge entre un point de la section amont et un point de la section du seuil (voir figure III.18.4) :

$$\begin{aligned} H_{am} &= H_{seuil} \\ \frac{v_{am}^2}{2g} + p + h &= \frac{v^2(z)}{2g} + p + h - z \end{aligned} \quad (\text{III.18.1})$$



(a) Seuil frontal sur l'Ill (68). On notera en rive droite la présence d'une passe à poisson. (b) Déversoir latéral sur l'Ill à l'aval de Fislis (68).

FIGURE III.18.1 – Photos de deux seuils (a) frontal, (b) latéral. Pascal Finaud-Guyot©



(a) Seuil dénoyé

(b) Seuil noyé lors de la crue de janvier 2006

FIGURE III.18.2 – Photos du seuil de Trets sur l'Arc (13). G. Degoutte ©

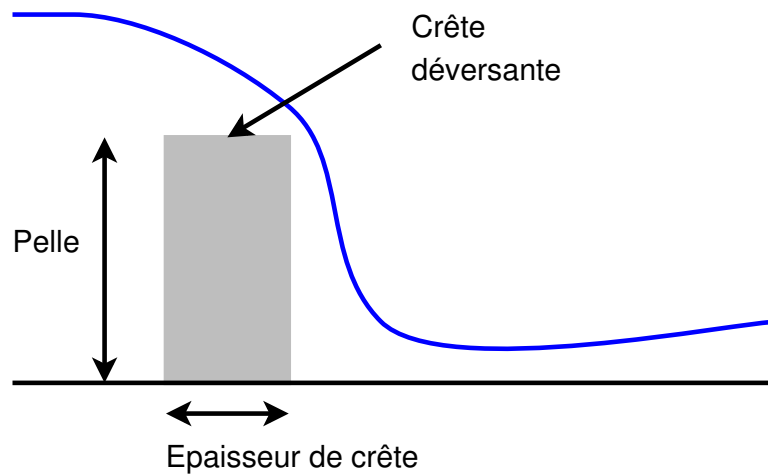


FIGURE III.18.3 – Profil longitudinal schématique d'un seuil

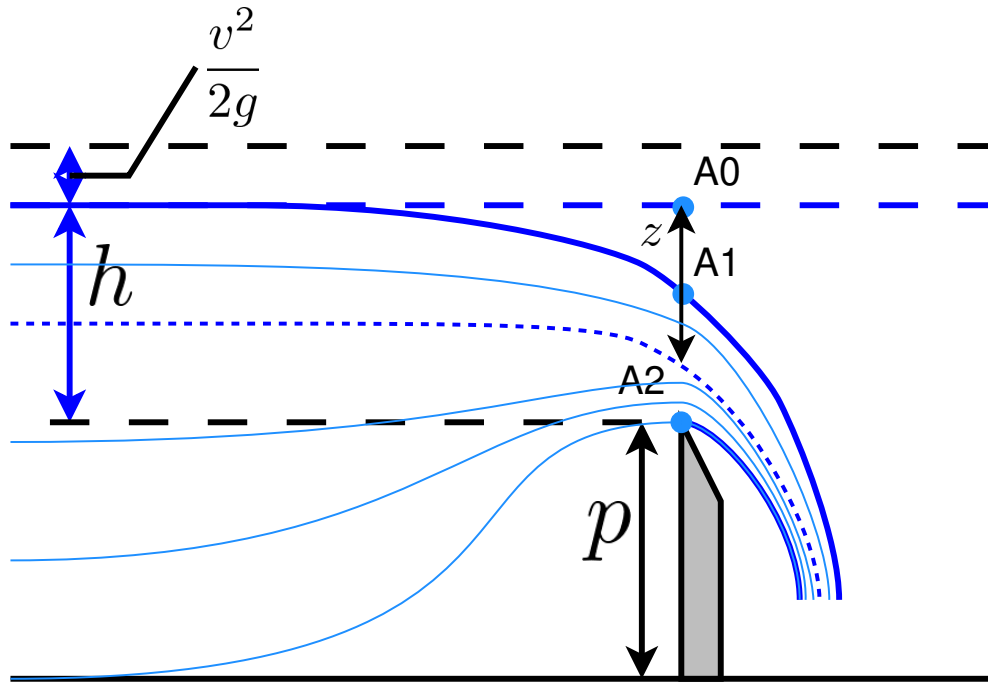


FIGURE III.18.4 – Représentation schématique d’un seuil en paroi mince

Ainsi, il est possible de déterminer la vitesse d’écoulement sur le seuil en fonction de l’altitude :

$$v(z) = \sqrt{2g \left( \frac{v_{am}^2}{2g} + z \right)} \tag{III.18.2}$$

Le calcul du débit déversé nécessite l’intégration du profil de vitesse sur la section d’écoulement :

$$Q_{theo} = \int_{A2}^{A1} L(z) v(z) dz \tag{III.18.3}$$

Le seuil étant fixé, la relation  $L(z)$  est supposée connue. On fait l’hypothèse pour plus de simplicité d’un seuil rectangulaire donc  $L(z) = L = cste$ . L’intégration du profil de vitesse entre A2 et A1 est complexe dans la mesure où la position de A1 n’est pas connue. On réalise dans l’intégration sur la distance A0-A2 qui est connue (puisque égale à  $h$ ). Ce calcul donne lieu à une surestimation du débit réel (puisque l’on intègre sur une section surestimée) ; on introduit donc un coefficient correctif  $C_c$  :

$$\begin{aligned}
Q_{dev} &= C_c L \int_{A2}^{A0} v(z) dz \\
&= C_c L \int_0^h \sqrt{2g \left( \frac{v_{am}^2}{2g} + z \right)} dz \\
&= C_c L \sqrt{2g} \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{v_{am}^2}{2g} + z \right)^{3/2} \right]_0^h \\
&= \frac{2}{3} C_c L \sqrt{2g} \left[ \left( \frac{v_{am}^2}{2g} + h \right)^{3/2} - \left( \frac{v_{am}^2}{2g} \right)^{3/2} \right] \\
&= \frac{2}{3} C_c L \sqrt{2gh}^{3/2} \left[ \left( \frac{v_{am}^2}{2gh} + 1 \right)^{3/2} - \left( \frac{v_{am}^2}{2gh} \right)^{3/2} \right] \quad (\text{III.18.4})
\end{aligned}$$

On notera que pour le passage de la première ligne à la seconde, on a remplacé les bornes de l'intégrale en identifiant qu'en A0 :  $z = h$  et en A2,  $z = 0$ . Par ailleurs, pour passer de la seconde ligne à la troisième, l'hypothèse d'un seuil rectangulaire de largeur  $L$  a été faite. La formulation (III.18.4) est relativement lourde à utiliser. Par convention, le coefficient correctif a été modifié sous la forme d'un coefficient adimensionnel, prenant en compte la vitesse de l'écoulement à l'amont du seuil (souvent considérée comme négligeable) :

$$C_d = C_c \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{v_{am}^2}{2gh} + 1 \right)^{3/2} - \left( \frac{v_{am}^2}{2gh} \right)^{3/2} \right] \quad (\text{III.18.5})$$

(III.18.4) devient donc :

$$Q_{dev} = C_d L \sqrt{2gh}^{3/2} \quad (\text{III.18.6})$$

Il convient d'être vigilant sur la définition de ce coefficient de débit  $C_d$ . En effet, il existe beaucoup d'autres formulations suivant les auteurs. Lorsque l'on cherchera une valeur de  $C_d$  dans une abaque, il conviendra de vérifier la formule du débit déversé pour savoir si il faut prendre en compte les termes  $2/3$  et  $\sqrt{2g}$ . En première approche pour un seuil en paroi mince, on prend  $C_d = 0,42$ .

Le rapport de *synthèse des lois d'écoulement au droit des seuils et déversoirs*<sup>1</sup> établi par le CETMEF ([9]) liste les formules valables dans un grand nombre de configuration (y compris pour des seuils de forme complexe).

Pour des seuils rectangulaires, non contractés, en paroi mince, différents auteurs ont proposé des formulations pour le coefficient de débit  $C_d$  (les formulations proposées ici sont écrites telles que les termes  $2/3$  et  $\sqrt{2g}$  ne sont pas intégrés dans le coefficient de débit).

#### Bazin

$$C_d = \frac{3}{2} \left( 0,405 + \frac{0,003}{h} \right) \left( 1 + 0,55 \left( \frac{h}{h+p} \right)^2 \right) \quad (\text{III.18.7})$$

Les limitations associées à cette formule sont :

- $0,08m < h < 0,70m$
- $L > 4h$
- $0,2m < p < 2m$

**Rehbock** Cette formulation est l'une des plus communément admise et employée.

$$C_d = 0,605 + \frac{1}{1050h - 3} + 0,08 \frac{h}{p} \quad (\text{III.18.8})$$

1. <https://www.cerema.fr/fr/centre-ressources/boutique/notice-deversoirs-synthese-lois-ecoulement-au-droit-seuils>



Les limitations associées à cette formule sont :  
 –  $0,05m < h$

### III.18.1.3 Hauteur d'eau à l'aval de l'ouvrage

La perte de charge associée au passage d'un seuil est généralement suffisamment faible pour pouvoir considérer que la charge se conserve entre l'amont et l'aval :

$$\begin{aligned} H_{am} &= H_{av} \\ H_{s,am} + z_{am} &= H_{s,av} + z_{av} \end{aligned} \quad (\text{III.18.9})$$

Le niveau d'eau pouvant être déterminé par la relation de Bazin (III.18.6), il est possible de déterminer la charge spécifique à l'amont de l'ouvrage. La dénivelée  $z_{am} - z_{av}$  étant l'une des caractéristiques géométriques du seuil, il est possible de connaître la charge spécifique de l'écoulement à l'aval :

$$H_{s,av} = H_{s,am} + z_{am} - z_{av} \quad (\text{III.18.10})$$

La connaissance de la charge spécifique à l'aval du seuil  $H_{s,av}$  et du débit  $Q_{dev}$  est suffisante pour pouvoir déterminer le niveau d'eau à l'aval de l'ouvrage.

Attention, cette approche ne tient pas compte d'un éventuel contrôle de l'ouvrage par l'aval donc cette relation n'est valable que lorsque l'ouvrage est dénoyé. Dans le cas contraire, la hauteur d'eau est imposée par l'écoulement aval.

### III.18.1.4 Autres configurations

Il est fréquent que le seuil étudié ne correspondent par aux caractéristiques du déversoir de Bazin, soit du fait de son installation (avec une pelle incliné par rapport à la verticale ou oblique par rapport à l'axe d'écoulement), soit du fait des conditions d'écoulement (seuil noyé), soit parce que sa géométrie est différente (voir figure III.18.5).

On ne présentera pas ici les équations à appliquer pour chaque configuration qui sont dans bien des cas des adaptations de la loi de déversoir de Bazin (III.18.6). Plusieurs ouvrages synthétisent ces relations, on citera notamment :

- Pernès, P., 2004, *Hydraulique unidimensionnelle : Partie 1, Analyse dimensionnelle et similitude, Généralités sur les écoulements unidimensionnels, Écoulements en charge, Écoulements à surface libre*, Cemagref Editions.
- Lencastre, A., 1999, *Hydraulique générale*, Eyrolles Safege.
- CETMEF, 2005, *Notice sur les déversoirs – Synthèse des lois d'écoulement au droit des seuils et déversoirs*.
- ENGEES Anjou Recherche, 2006, *Guide technique sur le fonctionnement des déversoirs d'orage*.

### III.18.1.5 Déversoir latéral

Les déversoirs latéraux sont les ouvrages les plus complexes à traiter. En effet, le débit déversé dépend de la hauteur d'eau sur la crête du déversoir au droit du déversement et l'équation de la ligne d'eau sur le déversoir dépend du débit (voir figure III.18.6). On obtient donc deux équations différentielles à résoudre simultanément. Hager a montré que la charge spécifique de l'écoulement dans un déversoir latéral pouvait être considérée comme constante entre l'entrée et la sortie.

La prise en compte de la variation de débit au long du déversoir latéral modifie l'équation de la ligne d'eau :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{S_0 - S_f + \frac{1}{gS} \frac{dQ}{dx} (u \cos \alpha - 2v)}{1 - Fr^2} \quad (\text{III.18.11})$$

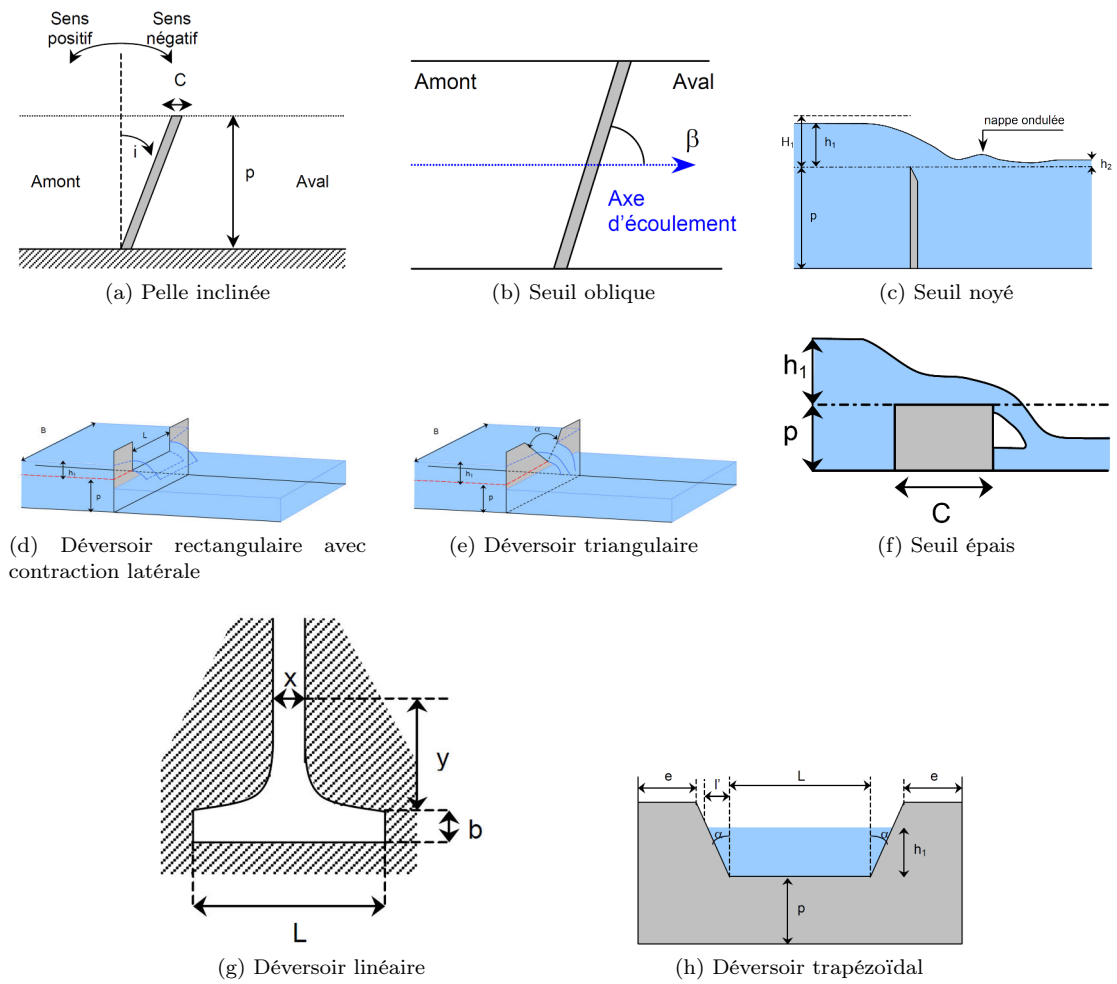


FIGURE III.18.5 – Différents types de seuils. Illustrations de

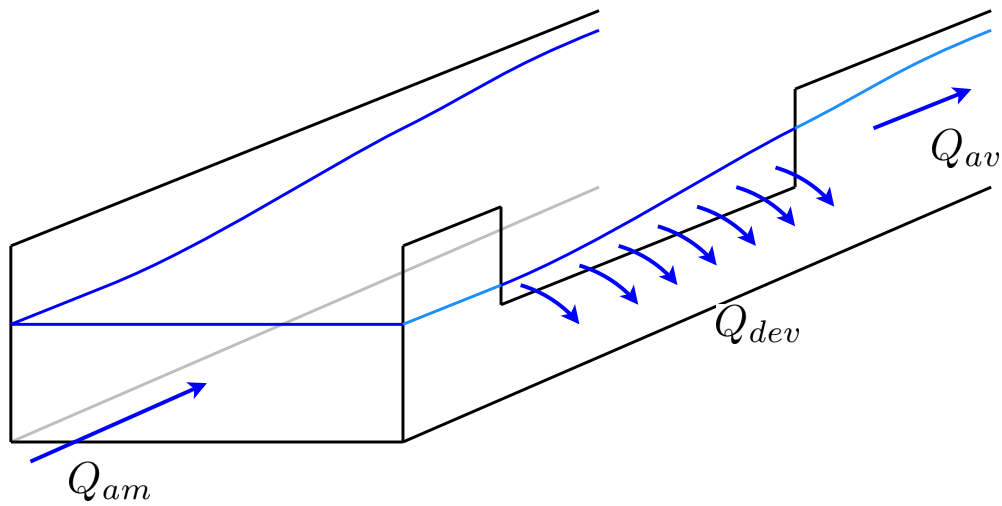


FIGURE III.18.6 – Schéma d'un déversoir latéral

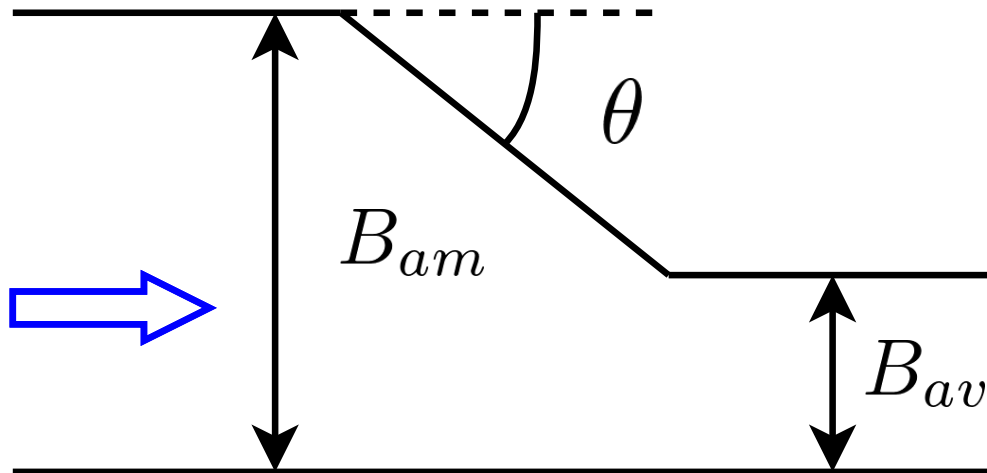


FIGURE III.18.7 – Schéma d'un déversoir latéral

où  $u$  est la vitesse déversée,  $v$  la vitesse de l'écoulement et  $\alpha$  l'angle formé entre la vitesse déversée et l'axe du canal. Le terme  $dQ/dx$  représente la variation de débit le long du déversoir. Le calcul de  $dQ/dx$  peut se faire via plusieurs formules qui dépendent du domaine d'application, des auteurs et du type de déversoir latéral. On retiendra la formule suivante qui reste la plus généraliste :

$$\frac{dQ}{dx} = -\frac{3}{5}n^*c\sqrt{g}(h-p)^{3/2}\left(\frac{1-W}{3-2y-W}\right)^{1/2}\left(1-\theta\left(\frac{3(1-y)}{y-W}\right)^{1/2}\right) \quad (\text{III.18.12})$$

où :

- $n^*$  représente le nombre de crête déversante (1 ou 2)
- $c$  est un coefficient de forme : 1 pour un déversoir en paroi mince et 0,8 pour un déversoir en paroi épaisse
- $h$  est la hauteur d'eau sur la crête
- $p$  est la hauteur de pelle
- $W$  est la hauteur de pelle adimensionnée par rapport à la charge spécifique  $H_s$  :  $W = p/H_s$
- $y$  est la hauteur d'eau adimensionnée par rapport à la charge spécifique  $H_s$  :  $y = h/H_s$
- $\theta$  est l'angle d'entonnement (voir figure III.18.7). L'angle d'entonnement est toujours négatif. En effet, l'entonnement est la réduction de largeur du canal dans le sens de l'écoulement. Réduire la largeur de l'écoulement à l'aval permet de faire monter la ligne d'eau et donc de réduire la longueur de déversoir nécessaire pour déverser un débit donné.

Le calcul de la ligne d'eau et du débit déversé nécessite la résolution simultanée des équations (III.18.11) et (III.18.12). Ce travail peut être fait avec un logiciel de calcul numérique (Matlab, Excel, ...).

Dans le cas des canaux rectangulaires, il existe des abaques qui permettent un calcul simplifié (voir Annexe I). Ces abaques représentent la ligne d'eau adimensionnée sur un déversoir latéral fictif dans différentes configurations de géométrie (avec ou sans entonnement) et d'écoulement (fluvial ou torrentiel).

Lencastre fait état de la formule proposée par Dominguez ([3] cité par [10]). Cette formule simplifiée permet de calculer le débit déversé connaissant les hauteurs à l'amont et à l'aval du déversoir :

$$Q_{dev} = \varphi\mu L\sqrt{2gh_0}^{3/2} \quad (\text{III.18.13})$$

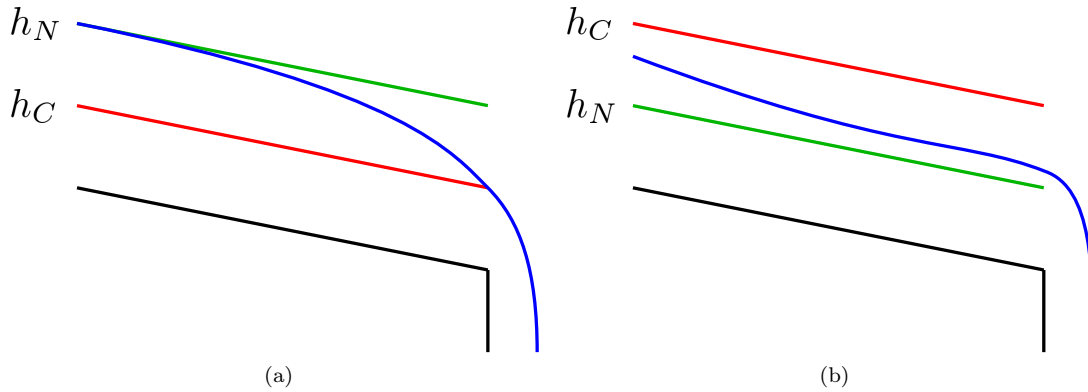


FIGURE III.18.8 – Les chutes. (a) régime fluvial, (b) régime torrentiel.

où  $\varphi$  et  $\mu$  sont deux paramètres tabulés,  $L$  est la longueur du déversoir latéral et  $h_0$  et  $h_1$  sont respectivement les hauteurs d'eau à l'amont et à l'aval dans le cas d'un écoulement torrentiel (à l'aval et à l'amont dans le cas d'un écoulement fluvial). Les tables permettant de déterminer  $\varphi$  et  $\mu$  sont fournies dans [10], p595.

## III.18.2 Les chutes

Le comportement des chutes dépend de la nature de l'écoulement à l'amont (fluvial ou torrentiel).

Dans le cas d'un écoulement fluvial, la chute agit comme un déversoir en garantissant une hauteur critique au droit de la chute (voir figure III.18.8a). Dans le cas d'un écoulement torrentiel, la chute n'a pas d'incidence sur la ligne d'eau et elle conserve l'évolution naturelle qu'elle aurait du avoir sans la présence de la chute.

## III.18.3 Les vannes

### III.18.3.1 Fonctionnement dénoyé

Les équations de vanne sont établies en supposant la conservation de la charge spécifique (pas de pente du fond significative à proximité immédiate de la vanne et pas de perte de charge) entre une section située dans le plan d'eau à l'amont et la section au niveau de la veine contractée :

$$\begin{aligned}
 h_{am} + \frac{Q^2}{2gS_{am}^2} &= h_{av} + \frac{Q^2}{2gS_{av}^2} \\
 Q &= h_{av}L\sqrt{2gh_{am}}\sqrt{\frac{h_{am}}{h_{av} + h_{am}}}
 \end{aligned}
 \tag{III.18.14}$$

On notera la similarité entre l'équation (III.18.14) et (III.18.4). La hauteur d'eau à l'aval étant difficilement déterminable, on exprime cette hauteur en fonction de l'ouverture de la vanne  $a$  :  $h_{av} = C_c a$  :

$$Q = C_c a L \sqrt{2gh_{am}} \sqrt{\frac{h_{am}}{h_{av} + h_{am}}}
 \tag{III.18.15}$$

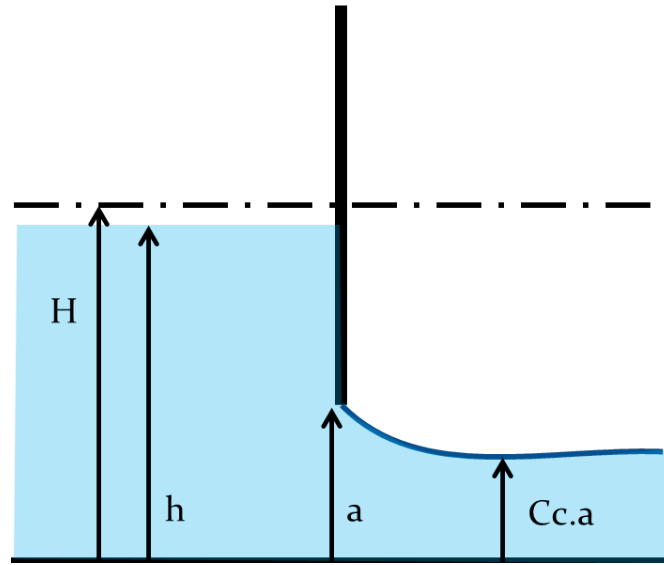


FIGURE III.18.9 – Schéma d'une vanne

Cette formulation a l'avantage de faire apparaître la section débitante de la vanne :  $aL$ . Comme pour les déversoirs, on introduit un coefficient de débit  $C_d$  :

$$C_d = C_c \sqrt{\frac{h_{am}}{h_{av} + h_{am}}} = C_c \frac{1}{\sqrt{\frac{C_c a}{h_{am}} + 1}} \quad (\text{III.18.16})$$

On prendra les mêmes précautions qu'avec le coefficient de débit pour les déversoirs : il convient de prendre garde à la prise en compte (ou non) du terme  $\sqrt{2g}$ . Le débit à travers une vanne dénoyée s'écrit donc :

$$Q_{vanne} = C_d a L \sqrt{2g h_{am}} \quad (\text{III.18.17})$$

Dans la grande majorité des cas, on prend  $C_d = C_c = 0,61$ .

### III.18.3.2 Hauteur d'eau à l'aval de l'ouvrage

La perte de charge associée au passage d'une vanne est généralement suffisamment faible pour pouvoir considérer que la charge se conserve entre l'amont et l'aval :

$$\begin{aligned} H_{am} &= H_{av} \\ H_{s,am} + z_{am} &= H_{s,av} + z_{av} \end{aligned} \quad (\text{III.18.18})$$

Le niveau d'eau pouvant être déterminé par l'équation de vanne (III.18.17), il est possible de déterminer la charge spécifique à l'amont de l'ouvrage. La dénivelée  $z_{am} - z_{av}$  étant l'une des caractéristiques géométriques de la vanne (généralement nulle), il est possible de connaître la charge spécifique de l'écoulement à l'aval :

$$H_{s,av} = H_{s,am} + z_{am} - z_{av} \quad (\text{III.18.19})$$

La connaissance de la charge spécifique à l'aval du seuil  $H_{s,av}$  et du débit  $Q_{dev}$  est suffisante pour pouvoir déterminer le niveau d'eau à l'aval de l'ouvrage.

Attention, cette approche ne tient pas compte d'un éventuel contrôle de l'ouvrage par l'aval donc cette relation n'est valable que lorsque l'ouvrage est dénoyé. Dans le cas contraire, la hauteur d'eau est imposée par l'écoulement aval.

### III.18.3.3 Fonctionnement noyé

Une vanne est en régime noyé lorsque la hauteur d'eau à l'aval est supérieure à la hauteur conjuguée de  $h_{av}$  calculée avec un fonctionnement dénoyé. Poncelet propose d'utiliser la même formulation que pour une vanne dénoyée avec le même coefficient de débit mais en remplaçant  $h_{am}$  par la différence  $h_{am} - h_{av}$  où  $h_{av}$  est la hauteur d'eau à l'aval de la vanne en régime noyé.

## Quatrième partie

# Annexes





Annexe A

# Géométrie des parois planes

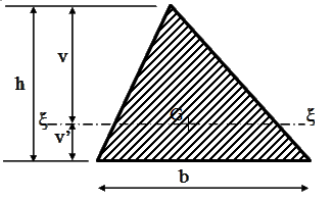
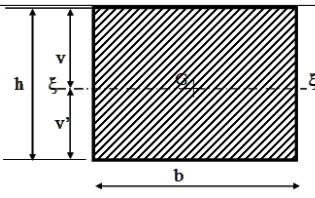
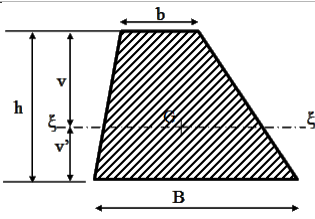
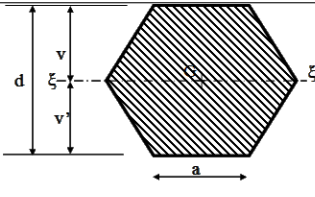
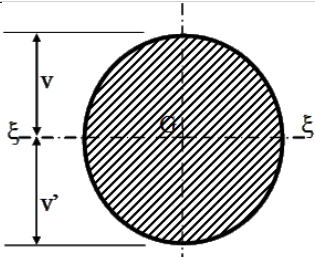
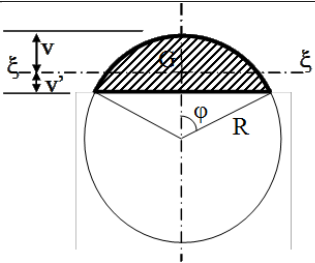
	$v = \frac{2h}{3} \quad v' = \frac{h}{3}$ $S = \frac{bh}{2} \quad I_{\xi\xi} = \frac{bh^3}{36}$
	$v = \frac{h}{2} \quad v' = v$ $S = bh \quad I_{\xi\xi} = \frac{bh^3}{12}$
	$v = \frac{h}{3} \frac{2B+b}{B+b} \quad v' = \frac{h}{3} \frac{B+2b}{B+b}$ $S = \frac{h}{2} (B+b) \quad I_{\xi\xi} = \frac{h^3 (B^2 + 4Bb + b^2)}{36(B+b)}$
	$v = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $S = \frac{d^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \quad I_{\xi\xi} = \frac{v'}{48\sqrt{3}} = \frac{5a^4\sqrt{3}}{16}$
	$v = R \quad v' = v$ $S = \pi R^2 \quad I_{\xi\xi} = \frac{\pi R^4}{4}$
	$v = R \left( 1 - \frac{4 \sin^3(\varphi)}{3(2\varphi - \sin(2\varphi))} \right)$ $v' = R(1 - \cos(\varphi)) - v$ $S = \frac{R^2}{2} (2\varphi - \sin(2\varphi))$ $I_{\xi\xi} = \frac{R^4}{16} (4 - \sin(4\varphi)\varphi) - \frac{R^4}{9} \frac{(1 - \cos(2\varphi))^3}{2\varphi - \sin(2\varphi)}$

TABLE A.1 – Formules de calcul des grandeurs nécessaires à la détermination d'une poussée sur une surface pour des formes géométriques simples

## Annexe B

# Coefficients de perte de charge singulière

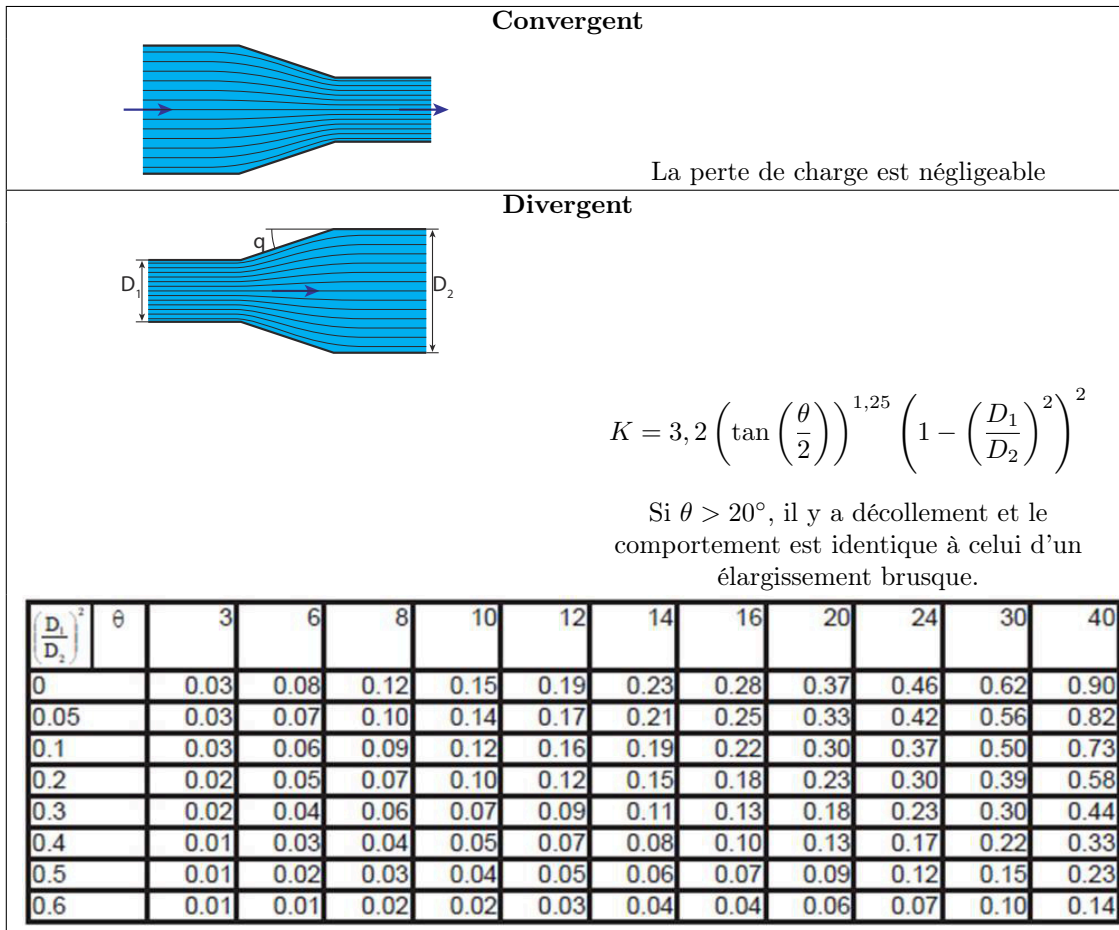


TABLE B.1 – Coefficient de perte de charge pour les cônes

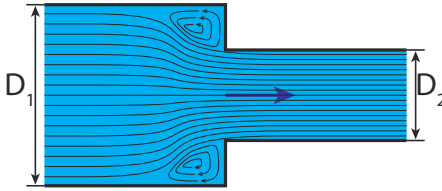
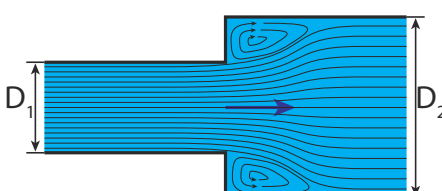
Rétrécissement										
										
$K = 0,5 \left( 1 - \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right)$										
$\frac{D_2}{D_1}$	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
K	0.500	0.495	0.480	0.455	0.420	0.375	0.320	0.255	0.180	0.095
Élargissement										
										
$K = \left( 1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2 + \frac{1}{9} \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^2$										
$\frac{D_1}{D_2}$	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
K	1.000	0.980	0.922	0.829	0.708	0.569	0.424	0.287	0.175	0.109

TABLE B.2 – Coefficient de perte de charge pour un changement brusque de diamètre

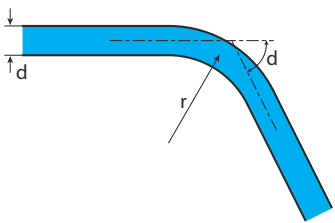
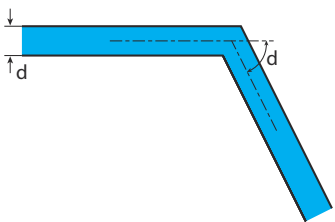
<b>Arrondi</b>					
					
$K = \left( 0,131 + 1,847 \left( \frac{d}{2r} \right)^{7/2} \right) \frac{\delta}{90^\circ}$					
r/d =>	1	1.5	2	2.5	3
delta(°)					
11.25	0.037	0.021	0.018	0.017	0.017
22.5	0.074	0.043	0.036	0.034	0.034
30	0.098	0.057	0.048	0.046	0.045
45	0.147	0.085	0.073	0.069	0.067
60	0.196	0.114	0.097	0.092	0.090
90	0.294	0.170	0.145	0.138	0.134
180	0.589	0.341	0.291	0.275	0.269
<b>Brusque</b>					
					
$K$ indépendant du diamètre					
delta(°)	22.5	30	45	60	90
K	0.07	0.11	0.24	0.47	1.13

TABLE B.3 – Coefficient de perte de charge pour des coudes

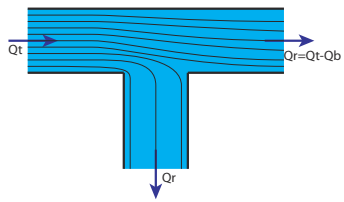
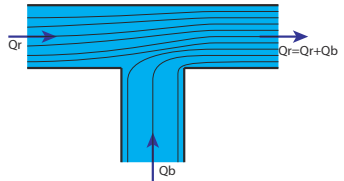
Branchement de prise à 90° de même diamètre et à angles vifs						
						
$\Delta H_r = K_r \frac{V_t^2}{2g}$ $\Delta H_b = K_b \frac{V_t^2}{2g}$						
$Q_b/Q_t$	$Q_b/Q_t \rightarrow 0$	0.2	0.4	0.6	0.8	$Q_b/Q_t \rightarrow 1$
$K_r$	0.40	0.26	0.15	0.06	0.02	0.00
$K_b$	1.00	1.01	1.05	1.15	1.32	1.45
Branchement d'amenée à 90° de même diamètre et à angles vifs						
						
$\Delta H_r = K_r \frac{V_t^2}{2g}$ $\Delta H_b = K_b \frac{V_t^2}{2g}$						
$Q_b/Q_t$	$Q_b/Q_t \rightarrow 0$	0.1	0.2	0.4	0.8	$Q_b/Q_t \rightarrow 1$
$K_r$	0	0.16	0.27	0.46	0.60	0.55
$K_b$	-0.60	-0.37	-0.18	0.26	0.94	1.20

TABLE B.4 – Coefficient de perte de charge pour les tés

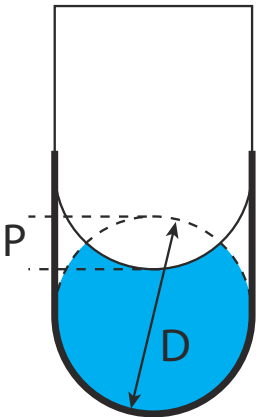
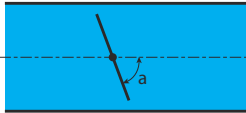
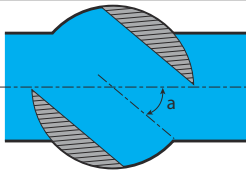
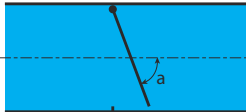
<b>Vanne opercule</b>																							
	<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>\frac{P}{D}</math></th> <th><math>\frac{1}{8}</math></th> <th><math>\frac{2}{8}</math></th> <th><math>\frac{3}{8}</math></th> <th><math>\frac{4}{8}</math></th> <th><math>\frac{5}{8}</math></th> <th><math>\frac{6}{8}</math></th> <th><math>\frac{7}{8}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>K</td> <td>0.07</td> <td>0.26</td> <td>0.81</td> <td>2.06</td> <td>5.52</td> <td>17</td> <td>98</td> </tr> </tbody> </table>	$\frac{P}{D}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	K	0.07	0.26	0.81	2.06	5.52	17	98						
$\frac{P}{D}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$																
K	0.07	0.26	0.81	2.06	5.52	17	98																
<b>Vanne à papillon</b>																							
	<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>\alpha^\circ</math></th> <th>5</th> <th>10</th> <th>15</th> <th>20</th> <th>30</th> <th>40</th> <th>45</th> <th>50</th> <th>60</th> <th>70</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>K</td> <td>0.24</td> <td>0.52</td> <td>0.90</td> <td>1.5</td> <td>3.9</td> <td>11</td> <td>19</td> <td>33</td> <td>118</td> <td>750</td> </tr> </tbody> </table>	$\alpha^\circ$	5	10	15	20	30	40	45	50	60	70	K	0.24	0.52	0.90	1.5	3.9	11	19	33	118	750
$\alpha^\circ$	5	10	15	20	30	40	45	50	60	70													
K	0.24	0.52	0.90	1.5	3.9	11	19	33	118	750													
<b>Robinet à boisseau</b>																							
	<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>\alpha^\circ</math></th> <th>5</th> <th>10</th> <th>15</th> <th>20</th> <th>30</th> <th>40</th> <th>45</th> <th>50</th> <th>55</th> <th>60</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>K</td> <td>0.05</td> <td>0.29</td> <td>0.75</td> <td>1.6</td> <td>5.5</td> <td>17</td> <td>31</td> <td>53</td> <td>110</td> <td>206</td> </tr> </tbody> </table>	$\alpha^\circ$	5	10	15	20	30	40	45	50	55	60	K	0.05	0.29	0.75	1.6	5.5	17	31	53	110	206
$\alpha^\circ$	5	10	15	20	30	40	45	50	55	60													
K	0.05	0.29	0.75	1.6	5.5	17	31	53	110	206													
<b>Clapet à battant</b>																							
	<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>\alpha^\circ</math></th> <th>20</th> <th>30</th> <th>40</th> <th>45</th> <th>50</th> <th>55</th> <th>60</th> <th>65</th> <th>70</th> <th>75</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>K</td> <td>1.7</td> <td>3.2</td> <td>6.6</td> <td>9.5</td> <td>14</td> <td>20</td> <td>30</td> <td>42</td> <td>62</td> <td>90</td> </tr> </tbody> </table>	$\alpha^\circ$	20	30	40	45	50	55	60	65	70	75	K	1.7	3.2	6.6	9.5	14	20	30	42	62	90
$\alpha^\circ$	20	30	40	45	50	55	60	65	70	75													
K	1.7	3.2	6.6	9.5	14	20	30	42	62	90													

TABLE B.5 – Coefficient de perte de charge pour des appareils de robinetterie



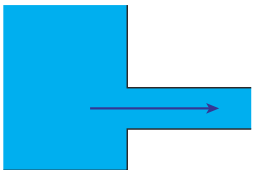
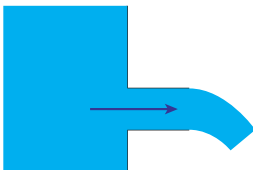
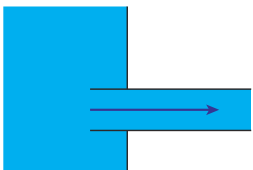
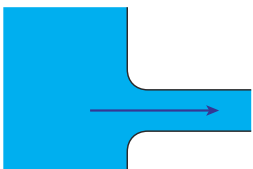
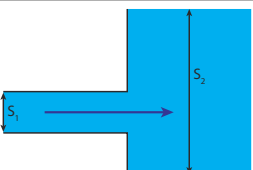
<b>Départ</b>	
<p>Sans saillie à l'intérieur du réservoir, avec raccordement à angles vifs</p> 	$K = 0,5$
<p>Sans saillie à l'intérieur du réservoir, avec raccordement à angles vifs, ajutage débitant à gueule bée</p> 	$K = 1,0$
<p>Sans saillie à l'intérieur du réservoir, avec raccordement à angles vifs, ajutage débitant à gueule bée</p> 	$K = 1,0$ Pour une saillie dont la longueur est comprise entre 1 et 2 fois le diamètre
<p>Sans saillie à l'intérieur du réservoir, avec raccordement de profil arrondi</p> 	$K = 0,05$ Cette valeur est une moyenne, elle dépend du profil de l'arrondi.
<b>Arrivée</b>	
	$K = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2$ $S_2 \gg S_1 \Rightarrow K = 1$

Table B.6 – Coefficient de perte de charge pour le raccordement d'une conduite avec un grand réservoir



## Appendix C

# Rugosité de différents matériaux

Caractéristiques	Rugosité $\epsilon$ en mm		
	Inférieur	Supérieur	Normale
Surface de la conduite assez lisse :			
— 3 rangs longitudinaux de rivets			
- 3 rangs transversaux	1,8	2,1	2,0
- 2 rangs transversaux	1,5	1,8	1,6
- 1 rang transversal	1,1	1,5	1,3
— 2 rangs longitudinaux de rivets			
- 3 rangs transversaux	1,2	1,5	1,3
- 2 rangs transversaux	0,9	1,2	1,1
- 1 rang transversal	0,6	0,9	1,2
— 1 rang longitudinal de rivets			
- 3 rangs transversaux	0,8	1,1	1,0
- 2 rangs transversaux	0,5	0,8	0,6
- 1 rang transversal	0,3	0,5	0,4
<b>6 - Conduites en bois.</b>			
Végétation excessive sur les parois. Douves rugueuses			
avec joints saillants	0,3	3,5	3,2
En service, en bon état	0,12	0,3	0,2
Neuve, excellente construction	0,03	0,12	0,07
<b>7 - Tuyaux en amiante ciment.</b>		0,025	0,015
<b>8 - Tuyaux en fer.</b>			
Fer forgé rouillé.	0,15	3,00	0,6
Fer galvanisé, fonte revêtue.	0,06	0,3	0,15
Fonte, non revêtue, neuve.	0,25	1,0	0,5
Fonte avec corrosion.	1,0	3,0	1,5
Fonte avec dépôt.	1	4,0	2,0
<b>9 - Tuyaux en grès.</b>			
Avec des joints très bien alignés.	0,06		
Tuyaux de 1, 0 m : D < 600 mm	—	0,3	0,15
D > 600 mm	—	0,6	0,3
de 0, 6 m : D < 300 mm	—	0,3	0,15
D > 300 mm	—	0,6	0,3
<b>10 - Tuyaux d'égout en service, quand les matériaux neufs ont des rugosités inférieures à celles qui sont indiquées pour les tuyaux en service :</b>			
Avec couche de boue inférieure à 5 mm.	0,6	3,0	1,5
Avec incrustations boueuses ou graisseuses inférieures à 25 mm.	6,0	30	15
Avec matériau solide sableux sur le seuil, déposé d'une manière irrégulière.	60,0	300	150
<b>11 - Matériaux lisses.</b>			
Laiton, cuivre, plomb	0,04	0,010	0,007
Aluminium.	0,0015	0,005	0,004
<b>12 - Matériaux ultralisses.</b>			
Verre	0,001	0,002	—
Polyuréthane + époxy, appliqué au pistolet sans air et à la température ambiante, de 0,1 à 0,2 mm d'épaisseur ; (sans joints).	0,002	0,004	—
Vinyle (acétochlorure de polyvinyle ou polychlorure de vinyle (idem)).	0,003	0,004	—
Araldite (époxy). Idem.	0,0025	0,003	—

Figure C.1 – Table de rugosité pour différents matériaux

<b>1 - Galeries.</b>			
Roche non revêtue sur tout le périmètre.	100	1000	—
Roche revêtue seulement sur le seuil.	10	100	—
<b>2 - Conduites en béton.</b>			
Très rugueuse : bois de coffrage : béton maigre avec des dégâts d'érosion ; joints imparfaitement alignés.	0,6	3,0	1,5
Rugueux : attaquée par les matériaux anguleux entraînés ; empreintes de coffrage visibles.	0,4	0,6	0,5
Granuleuse : surface lissée à la taloche en bon état, joints bien exécutés.	0,18	0,4	0,3
Centrifugée : (en tuyaux).	0,15	0,5	0,3
Lisse : coffrages métalliques neufs ou presque neufs ; finissage moyen avec des joints bien soignés.	0,06	0,18	0,1
Très lisse : neuve, parfaitement lisse, coffrages métalliques ; finissage parfait, par des ouvriers qualifiés et joints bien soignés.	0,015	0,06	0,03
<b>3 - Conduites en acier : bout soudés, intérieur continu.</b>			
Incrustations ou tuberculisations considérables.	2,4	12,2	7,0
Tuberculisation générale, 1 à 3 mm.	0,9	2,4	1,5
Peinture à la brosse avec de l'asphalte, émail ou bitume, en couche épaisse.	0,3	0,9	0,6
Rouille légère.	0,15	0,30	0,2
Conduite plongée dans l'asphalte chaud.	0,06	0,15	0,1
Revêtement en béton centrifugé.	0,05	0,15	0,1
Revêtement en émail centrifugé.	0,01	0,3	0,06
Bitume naturel (gelsonite) appliqué au pistolet, à froid de 0,4 mm d'épaisseur.	—	—	0,042
Email bitumineux (goudron de houille), appliqué à la brosse de 2 à 2,5 mm d'épaisseur.	—	—	0,040
Idem, appliqué à la truelle.	—	—	0,030
Idem, à chaud lissé à la flamme.	—	—	0,012
<b>4 - Conduites en acier : (éléments rivés l'un à l'autre). (Joints écartés de 5 à 10 mètres, soudure longitudinale)</b>			
Incrustations ou tuberculisations considérables	3,7	12,2	8,0
Tuberculisation générale, 1 à 3 mm	1,4	3,7	2,5
Rouillée	0,6	1,4	1,0
Peinture à la brosse avec de l'asphalte ou bitume, en couche épaisse	0,9	1,8	1,5
Conduite plongée dans l'asphalte chaud ou peinte à la brosse avec du graphite	0,3	0,9	0,6
Conduite neuve, avec de l'émail centrifugé	0,15	0,6	0,4
<b>5 - Conduites en acier : éléments rivés transversalement et longitudinalement. (Joints transversaux écartés de 1,8 à 2,4 m)</b>			
Incrustations ou tuberculisations considérables	6,0	12,2	9,0
Tuberculisation générale, 1 à 3 mm :	4,6	6,0	5,0
– 3 rangs de rivets dans les joints transversaux	3,0	4,6	3,5
– 2 rangs de rivets dans les joints transversaux	2,1	3,0	2,5

Figure C.2 – Table de rugosité pour différents matériaux



## Appendix D

# Détermination du coefficient de Manning-Strickler

# ANNEXE 1

## Estimation du coefficient de Manning-Strickler

### Abaque CEMAGREF

Nature de la surface de l'écoulement	K coefficient de Strickler
<b>Rivières naturelles</b> : Pour les cours d'eau à section suffisamment constante on se reportera au tableau suivant	
<b>Petit cours d'eau de largeur inférieure à 30 m cours d'eau de plaine :</b>	
net, droit, niveau d'eau élevé, peu de variation de la section mouillée	30 à 40
idem, mais pierres et mauvaises herbes plus nombreuses	30
net, sinueux avec seuils et mouillées	25
idem, mais avec pierres et mauvaises herbes	20
idem, mais niveau bas	20
cours paresseux, mauvaises herbes, trous d'eau profonds	15
nombreuses mauvaises herbes et nombreux trous d'eau	10
pentés et fond irrégulier, nombreuses souches, arbres et buissons, arbres tombés dans la rivière	5 à 7
<i>cours d'eau de montagne</i> (Pas de végétation dans le lit, rives escarpées, arbres et broussailles pour les niveaux élevés)	
fond en gravier et cailloux, peu de gros galets	25
fond avec gros graviers	20
<b>Plaines d'inondation</b>	
pâturages sous broussailles	30 à 35
zones cultivées, absences de récoltes	35
zones cultivées, récoltes sur pied	25 à 30
broussailles dispersées et mauvaises herbes ou broussailles et quelques arbres en hiver	20
quelques arbres et broussailles en été; broussaille moyenne ou dense en hiver	15
broussaille moyenne ou dense en été	10
souches d'arbres sans rejet	25
souches d'arbres avec rejets durs	16
forêt de hautes futaies; peu de broussailles	10
forêt de hautes futaies; peu de broussailles avec niveau d'eau atteignant les branches	8
souches denses	7
<b>Grands cours d'eau largeur maximale supérieure à 30 m</b> (La valeur de K est supérieure à celle des petits cours d'eau d'allure analogue car les rives offrent moins de résistance efficace)	
section régulière sans broussailles	25 à 40
section irrégulière et rugueuse	10 à 25
<b>Canaux artificiels, galeries ou conduites à surface lisse</b>	
<b>Surface très lisses et sans saillies</b> (verre neuf et net; pyroline - cuivre)	100 à 110
<b>Surfaces lisses, sans saillies</b> (bois net raboté; métal soudé non peint; ciment mortier ou béton bien lissé, bien soigné et sans débris; surfaces très lisses avec courbures moyennes)	80 à 90



<b>Surfaces avec légères aspérités</b> (acier riveté ou peint; fer forgé ou coulé; bois non raboté; ciment et mortier; béton coffré avec de l'acier ou du bois lisse sans débris et pas de courbures; canaux en béton très lisse avec joints; tuyau de drainage ordinaire; égout vitrifié sans saillie; brique vernissée, grès; asphalte lisse; moellons dressés avec joints cimentés; surfaces lisses ou très lisses avec fortes courbures)	<b>70 à 80</b>
<b>Surfaces avec aspérités moyennes</b> (métal incrusté; métal riveté avec rivets grossiers; canaux en métal avec larges saillies vers l'intérieur; bois très grossier (madriers); béton avec bord lisse et fond rugueux; petit canal en béton, assez droit et régulier dont la surface est recouverte d'un léger dépôt; bois ou béton avec développement d'algues et de mousses; égouts avec regards; drains enterrés avec joint ouvert; terre particulièrement régulière; canaux avec plafond en sable fin (surfaces non ridées); surfaces lisses avec courbes excessives)	<b>65</b>
<b>Surfaces rugueuses</b> (métal très incrusté; <b>béton coulé non lissé</b> ; béton coulé aux coffrages en bois rugueux; béton très rugueux ou vieux; maçonnerie vieille ou mal soignée; canaux en maçonnerie moyenne avec joints nombreux ou nombreuses courbes; bois ou béton avec développement dense d'algues ou de mousse; canaux en terre très régulière, état neuf, bon alignement; sable moyen; pierres dressées, joints cimentés)	<b>55 à 60</b>
<b>Surfaces très rugueuses</b> (canaux en métal avec très fortes saillies vers l'intérieur ou fortes courbures, ou développement de végétation importante ou débris accumulés; canaux en béton avec maçonnerie en très mauvais état ou très grossière; canaux très larges en gravier fin plus sable ou en terre régulière meuble, sans développement de végétation; radiers pavés; moellons bruts assemblés au ciment)	<b>50</b>
<b>Surfaces à rugosité très importante</b> (lit en gravier fin; canaux avec dépôts ou végétation; canaux en terre moyenne, dimensions modérées; moellons bruts grossièrement assemblés au ciment)	<b>45</b>
<b>Surfaces assez grossières</b> (aqueducs métalliques à section semi-circulaire en tôle plissée; terre en mauvais état; gravier moyen; canaux en terre de petites dimensions ou plus larges avec développement de végétation ou gros galets; fossés en bon état; canaux en terre sinueux sans végétation; blocage cimenté; béton sur roche régulièrement excavée)	<b>40</b>
<b>Surfaces grossières</b> (excavation rocheuse très régulière; gros graviers; pierre sèche; canaux en terre, dragués, sans végétation ou enherbés; chenaux d'évacuation de crue, larges et entretenus; béton sur roche irrégulièrement excavée; canaux et fossés avec nombreuses pierres lisses; canaux et fossés avec pierres rugueuses au fond et végétation sur les bords)	<b>35</b>
<b>Surfaces très grossières</b> (excavations rocheuses uniformes; canaux avec développements considérable de végétation; chenaux d'évacuation de crues, larges, mais peu entretenus; blocage sec; canaux en terre sinueux avec mauvaises herbes plus ou moins denses ou plantes aquatiques; canaux en terre sinueux avec fond en terre et berges en blocage au fond pierreux et berges recouvertes de mauvaises herbes)	<b>30</b>
<b>Surfaces excessivement grossières</b> (excavations rocheuses irrégulières; canaux en terre en très mauvais état, très sinueux avec pierres rugueuses et végétation importante; lits majeurs d'évacuation de crue dégagés, mais entretenus de façon discontinue)	<b>25</b>
<b>Divers</b>	
canaux non entretenus, mauvaises herbes et broussailles coupées	<b>20</b>
canaux en excavation avec broussailles; fond net, broussailles sur les berges	<b>20</b>
fond net, broussailles sur les berges avec niveau d'écoulement maximum sans débordement	<b>15</b>
canaux avec mauvaises herbes denses aussi hautes que la hauteur de l'écoulement	<b>12</b>
broussailles très denses, niveau d'eau élevé	<b>10</b>

P. Finaud-Guyot

## Appendix E

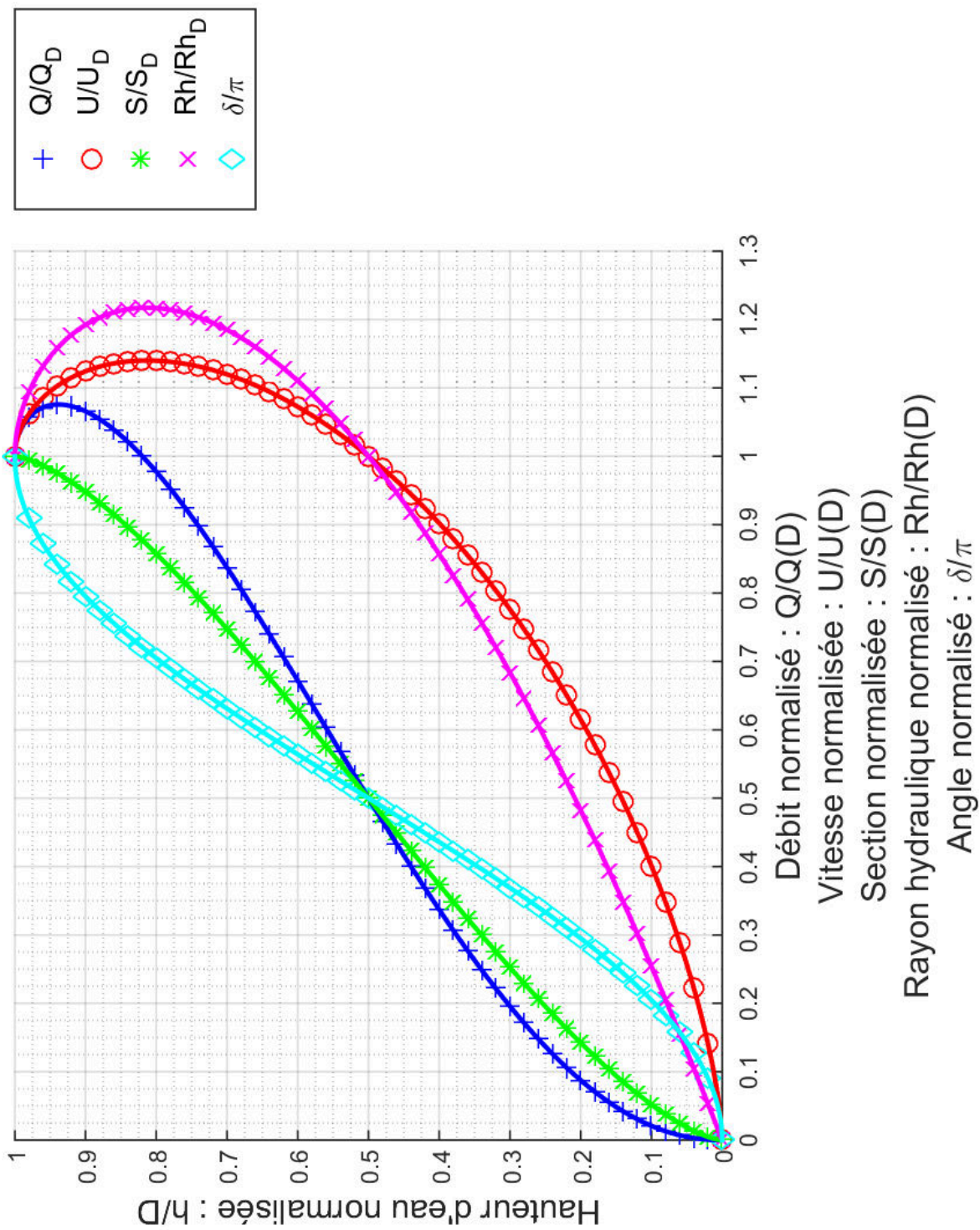
### Relations approchées pour une section circulaire

#### E.1 Géométrie

On définit  $y = h/D$ . Pour une section circulaire, on a les relations approchées suivantes:

- Section mouillée :  $S(y) \approx \frac{4}{3} D^2 y^{3/2} \left( 1 - \frac{1}{4} y - \frac{4}{25} y^2 \right)$ . Pour  $y \leq 0,95$ , l'erreur commise sur  $S$  est inférieure à 1%.
- Périmètre mouillé :  $\chi(y) = D \arccos(1 - 2y)$
- Rayon hydraulique :  $R_h(y) \approx \frac{2}{3} D y \left( 1 - \frac{1}{2} y \right)$ . Pour  $0,05 \leq y \leq 0,85$ , l'erreur commise sur  $R_h$  est inférieure à 10%.

#### E.2 Régime permanent uniforme



En section circulaire, il existe des relations approchées permettant de déterminer la hauteur d'eau en régime permanent uniforme normalisée :  $Y = h_N/D$ . On définit  $Q_N$ :

$$Q_N = \frac{Q}{K\sqrt{i}D^{8/3}}$$

Pour  $Y \leq 0,95$ , l'approximation faite par les formules suivantes reste inférieure à 1%:

– Estimation de  $Y$ , connaissant le débit  $Q$  (donc  $Q_N$ )

$$Y = 0,926\sqrt{1 - \sqrt{1 - 3,11Q_N}}$$

– Estimation de  $Q$  connaissant  $Y$ :

$$Q_N = \frac{3}{4}Y^2 \left( 1 - \frac{7}{12}Y^2 \right)$$

P. Finaud-Guyot

## Appendix F

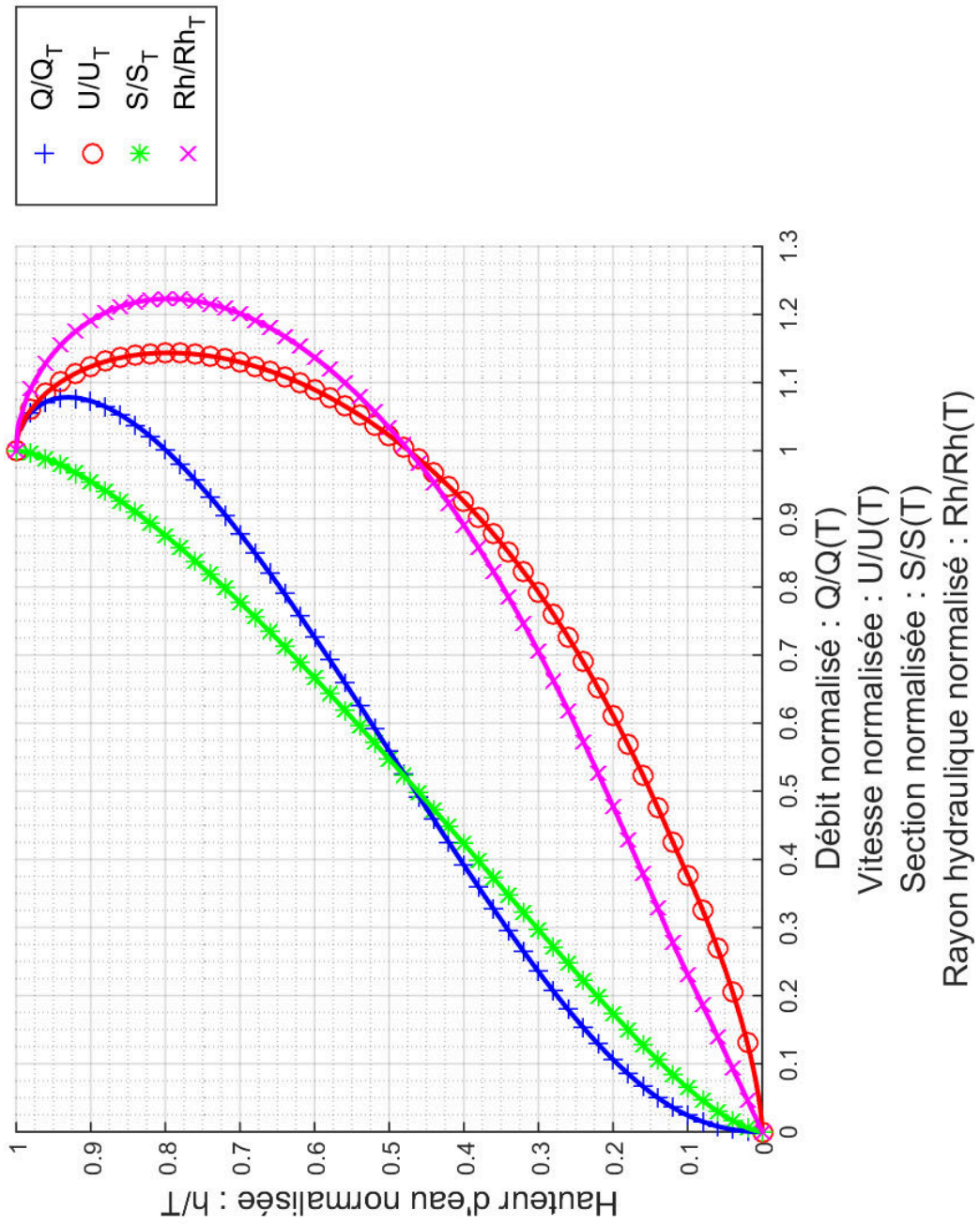
# Relations approchées pour une section fer à cheval

### F.1 Géométrie

On définit  $y = h/T$  où  $T$  est la hauteur du fer à cheval. Pour une section fer à cheval, on a les relations approchées suivantes:

- Section mouillée :  $S(y) \approx 2,116T^2 y^{3/2} (1 - 0,6y^{3/2} + 0,10y^3)$ . Pour  $y \leq 0,95$ , l'erreur commise sur  $S$  est inférieure à 5%.
- Périmètre mouillé :  $\chi(y) \approx 0,10T [\arccos(1 - 2y)]^{4/5}$ . Pour  $0,05 \leq y \leq 0,9$ , l'erreur commise sur  $\chi$  est inférieure à 5%.
- Rayon hydraulique :  $R_h(y) \approx 0,65T (1 - 0,6y^3)$ . Pour  $0,05 \leq y \leq 0,9$ , l'erreur commise sur  $R_h$  est inférieure à 6%.

### F.2 Régime permanent uniforme





En section fer à cheval, il existe des relations approchées permettant de déterminer la hauteur d'eau en régime permanent uniforme normalisée :  $Y = h_N/T$  où  $T$  est la hauteur du fer à cheval (par ailleurs, on note  $B$  sa largeur maximale). On définit  $Q_N$  et  $q_N$  :

$$Q_N = 0,212K\sqrt{i}B^{8/3} = 0,457K\sqrt{i}T^{8/3}$$

$$q_N = \frac{Q}{Q_N}$$

Pour  $Y \leq 0,93$ , les formules suivantes donnent des approximations raisonnables :

– Estimation de  $Y$ , connaissant le débit  $Q$  (donc  $q_N$ )

$$Y = 0,85\sqrt{1 - \sqrt{1 - q_N}}$$

– Estimation de  $Q$  connaissant  $Y$  :

$$q_N = 2,8Y^2(1 - 0,8Y^2 + 0,25Y^6)$$

P. Finaud-Guyot

## Appendix G

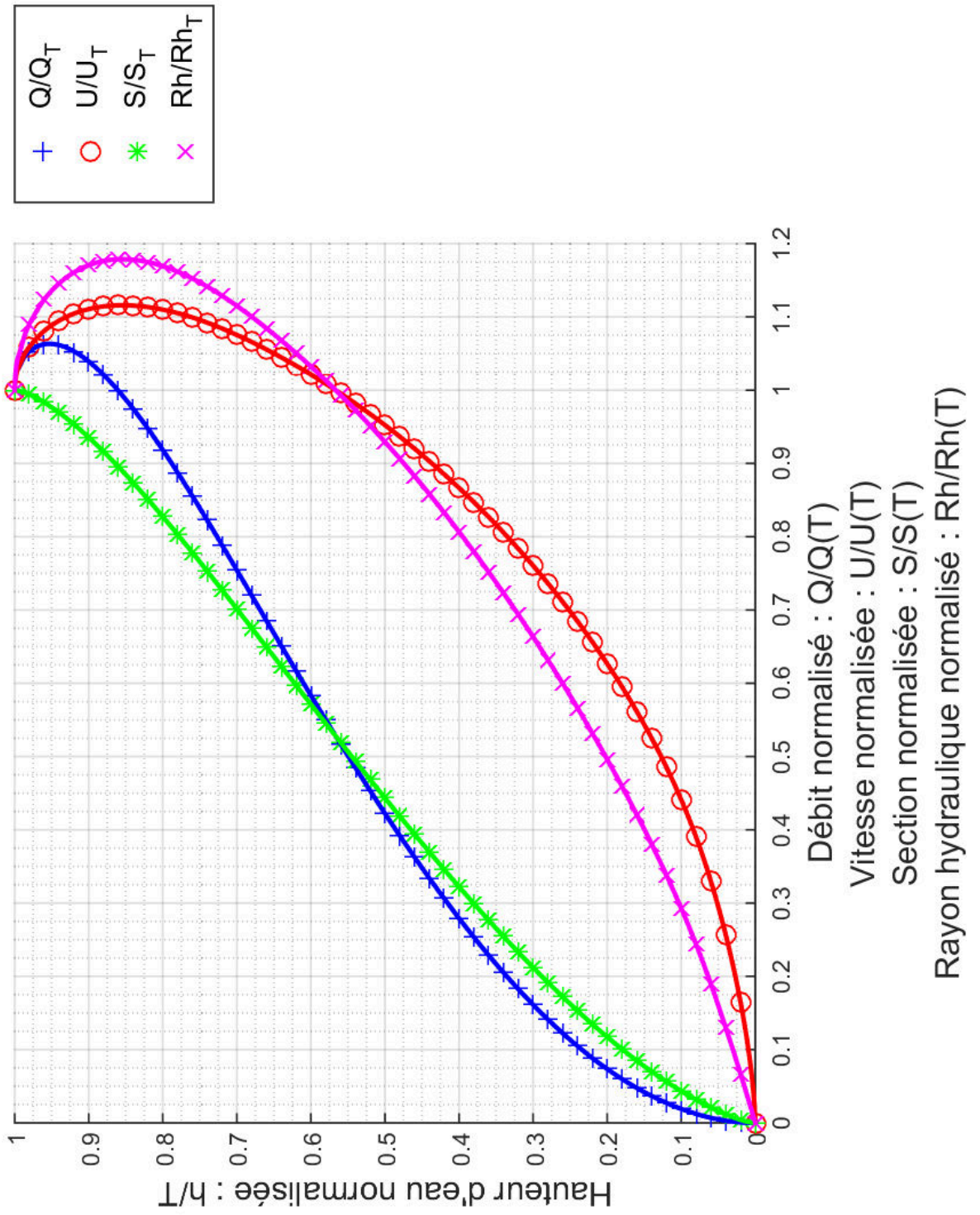
# Relations approchées pour une section ovoïde

### G.1 Géométrie

On définit  $y = h/T$  où  $T$  est la hauteur de l'ovoïde. Pour une section ovoïde, on a les relations approchées suivantes:

- Section mouillée :  $S(y) \approx 0,695T^2 y^{3/2} (1 - 0,15y - 0,10y^4)$ . Pour  $y \leq 0,95$ , l'erreur commise sur  $S$  est inférieure à 2%.
- Périmètre mouillé :  $\chi(y) \approx 0,693T [\arccos(1 - 2y)]^{5/4}$ . Pour  $0,05 \leq y \leq 0,9$ , l'erreur commise sur  $\chi$  est inférieure à 3%.
- Rayon hydraulique :  $R_h(y) \approx 0,29Ty^{3/4}$ . Pour  $y \leq 0,85$ , l'erreur commise sur  $R_h$  est inférieure à 9%.

### G.2 Régime permanent uniforme



En section ovoïde, il existe des relations approchées permettant de déterminer la hauteur d'eau en régime permanent uniforme normalisée :  $Y = h_N/T$  où  $T$  est la hauteur de l'ovoïde (par ailleurs, on note  $B$  sa largeur maximale). On définit  $Q_N$  et  $q_N$ :

$$Q_N = 0,503K\sqrt{i}B^{8/3} = 0,171K\sqrt{i}T^{8/3}$$

$$q_N = \frac{Q}{Q_N}$$

Pour  $Y \leq 0,95$ , les formules suivantes donnent des approximations raisonnables:

– Estimation de  $Y$ , connaissant le débit  $Q$  (donc  $q_N$ )

$$Y = 1,09\sqrt{1 - \sqrt{1 - 0,884q_N}}$$

– Estimation de  $Q$  connaissant  $Y$ :

$$q_N = 1,9Y^2(1 - 0,42Y^2)$$



# Appendix H

## Abaques de calcul de l'équation de la ligne d'eau

Cette abaque est issu de [16].

### H.1 Démonstration de l'équation

On cherche à adimensionnaliser l'équation de la courbe de remous en canal rectangulaire (III.17.17):

$$\frac{dh}{d(x')} = \frac{S_0 - \frac{Q^2}{K^2 S^2 R_h^{4/3}}}{1 - \frac{Q^2 B}{g S^3}} \quad (\text{H.1})$$

où  $x'$  est l'axe des abscisses définit par le modélisateur : son origine est placée de manière décorrélée de la physique de l'écoulement, de même que son orientation (bien que l'axe  $x'$  soit généralement croissant dans le sens de l'écoulement).

On introduit le paramètre  $\alpha = h_N/B$  qui caractérise la géométrie du canal. On a donc:

- $S = Bh = hh_N/\alpha$
- $R_h = Bh/(B + 2h) = hh_N/(2h\alpha + h_N)$
- $Q^2 = K^2 S_0 S^2 (h_N) R_h^{4/3} (h_N)$
- $Q^2 = g S^3 (h_C) / B$

En intégrant ces relations dans (H.1), on trouve:

$$\frac{dh}{d(x')} = \frac{S_0 - \frac{K^2 S_0 S^2 (h_N) R_h^{4/3} (h_N)}{K^2 S^2 R_h^{4/3}}}{1 - \frac{\frac{g S^3 (h_C) B}{g S^3}}{B}} = S_0 \frac{1 - \frac{S^2 (h_N) R_h^{4/3} (h_N)}{S^2 R_h^{4/3}}}{1 - \frac{S^3 (h_C)}{S^3}} \quad (\text{H.2})$$

En intégrant les relations sur la géométrie dans (H.2), on trouve:

$$\frac{dh}{d(x')} = S_0 \frac{1 - \frac{\left(\frac{h_N^2}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{h_N}{2\alpha+1}\right)^{4/3}}{\left(\frac{hh_N}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{hh_N}{2h\alpha+h_N}\right)^{4/3}}}{1 - \frac{\left(\frac{h_C h_N}{\alpha}\right)^3}{\left(\frac{hh_N}{\alpha}\right)^3}} = S_0 \frac{1 - \left(\frac{h_N}{h}\right)^2 \left(\frac{h_N}{h}\right)^{4/3} \left(\frac{2\frac{h}{h_N}\alpha+1}{2\alpha+1}\right)^{4/3}}{1 - \left(\frac{h_C}{h}\right)^3} \quad (\text{H.3})$$

Pour adimensionnaliser (H.3), on pose :  $X = S_0 x/h_N$ ,  $Y = h/h_N$  et  $f = h_C/h_N$ . Dans la définition de  $X$ ,  $x$  représente un axe des abscisses dont l'origine est positionnée à l'endroit où  $Y \approx 1$  avec la même échelle que l'axe  $x'$  : un déplacement de  $1m$  dans une direction sur l'axe  $x$  correspond à un déplacement de  $1m$  dans la même direction sur l'axe  $x'$  (et vice-versa)

$$\frac{dh}{d(x')} = S_0 \frac{1 - Y^{-2} Y^{-4/3} \left(\frac{2Y\alpha+1}{2\alpha+1}\right)^{4/3}}{1 - \left(\frac{f}{Y}\right)^3} = S_0 \frac{Y^3 - Y^{-1/3} \left(\frac{2Y\alpha+1}{2\alpha+1}\right)^{4/3}}{Y^3 - f^3} \quad (\text{H.4})$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{dh}{d(x')} &= \frac{d(Yh_N)}{d(Xh_N/S_0)} \\ &= h_N \frac{dY}{d(Xh_N/S_0)} + Y \frac{dh_N}{d(Xh_N/S_0)} \\ &= h_N \frac{dY}{(h_N/S_0)dX + (X/S_0)dh_N - (Xh_N/S_0^2)dS_0} \\ &= S_0 \frac{dY}{dX} \end{aligned} \quad (\text{H.5})$$

En combinant (H.4) et (H.5), il vient :

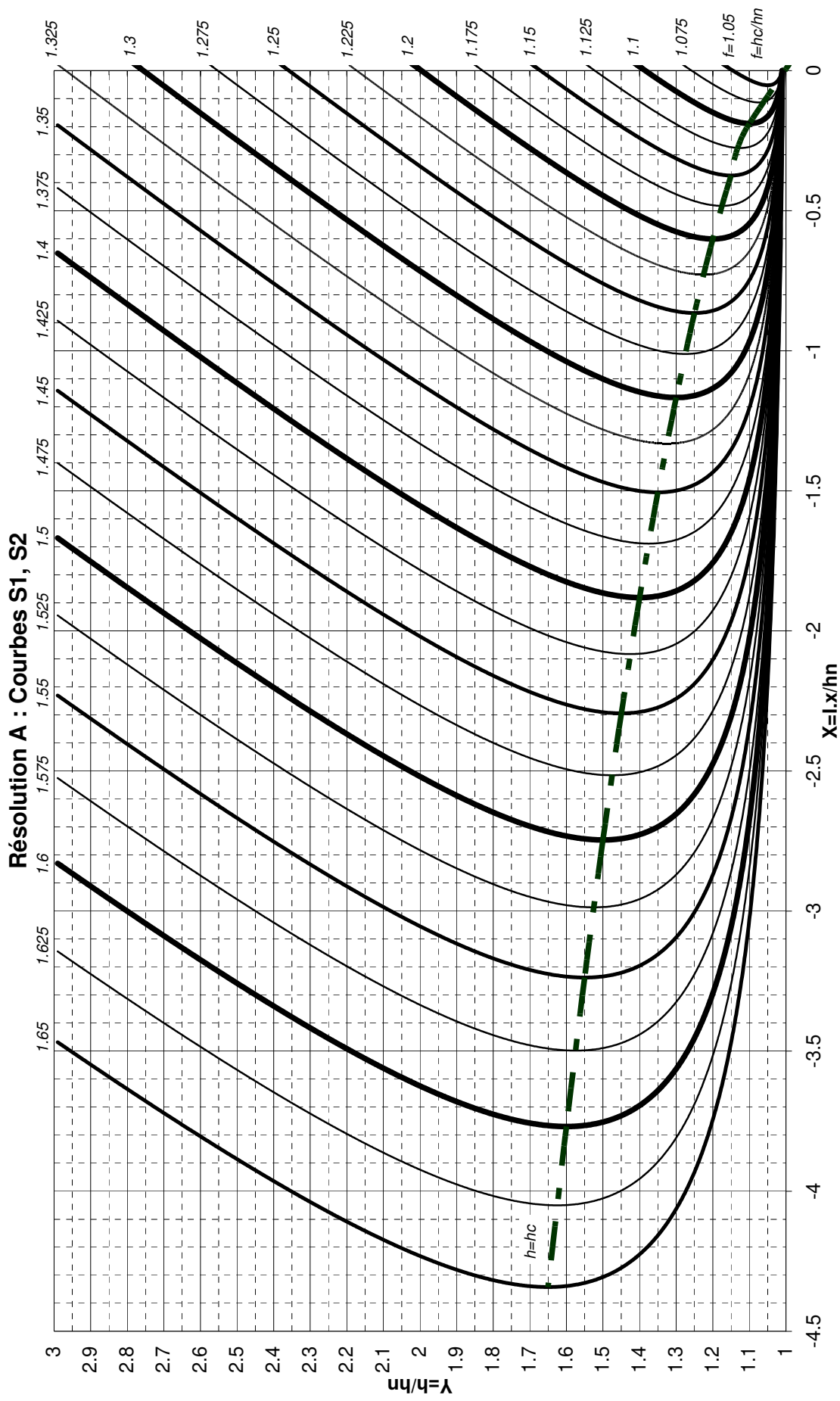
$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y^3 - Y^{-1/3} \left(\frac{2Y\alpha+1}{2\alpha+1}\right)^{4/3}}{Y^3 - f^3} \quad (\text{H.6})$$

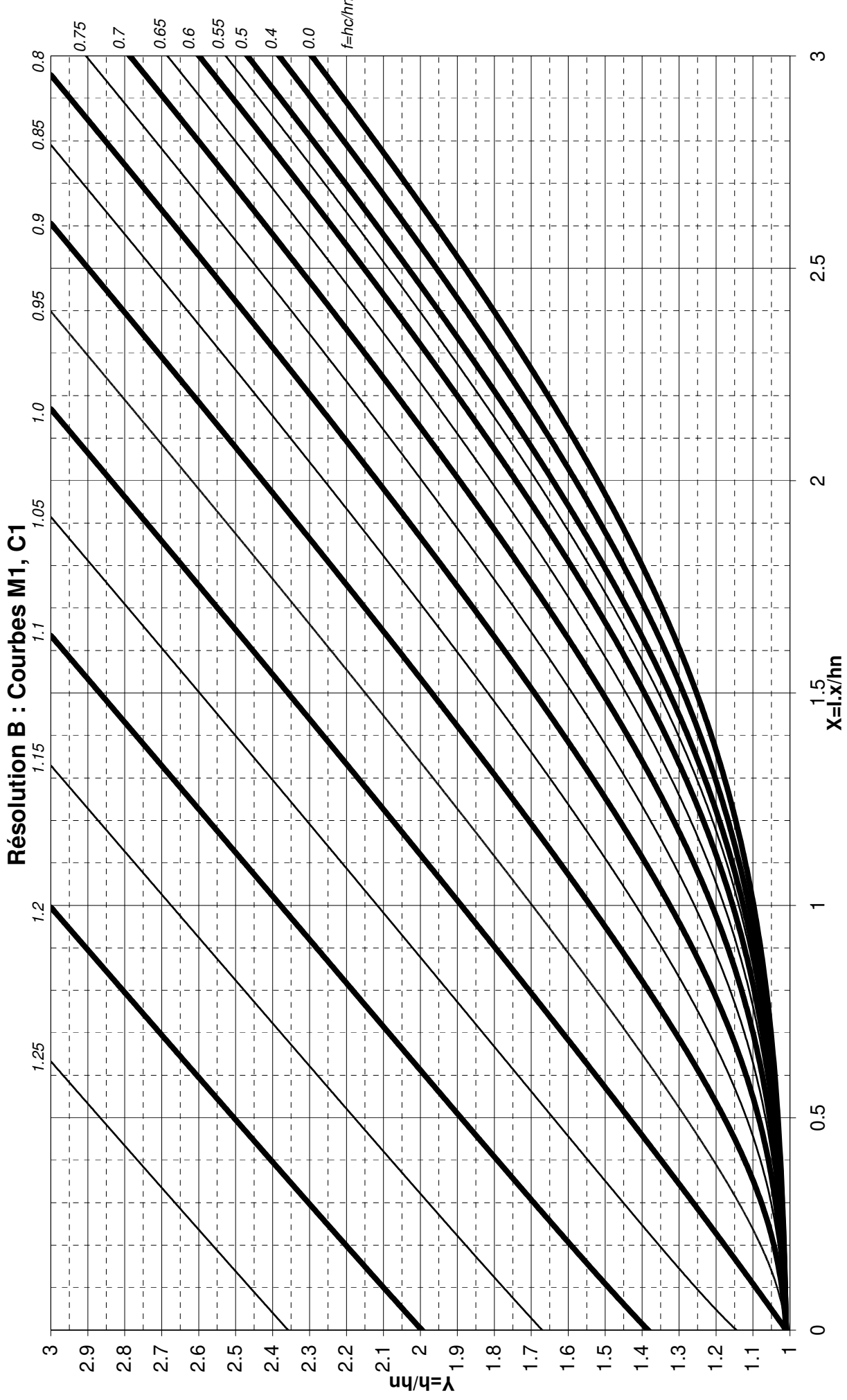
On constate que les solutions de l'équation (H.6) sont identiques à une constante près (pour  $\alpha$  et  $f$  fixé). La connaissance d'un couple  $X$  et  $Y$  (donc  $h$ ) permet de déterminer cette constante d'intégration et donc de retrouver la courbe  $Y(X)$  sur tous le domaine d'intérêt. La résolution de (H.6) pour différent  $\alpha$  montre une faible variation des solutions obtenues. En pratique, l'équation (H.6) a été résolue et tabulée pour  $\alpha = 1$ .



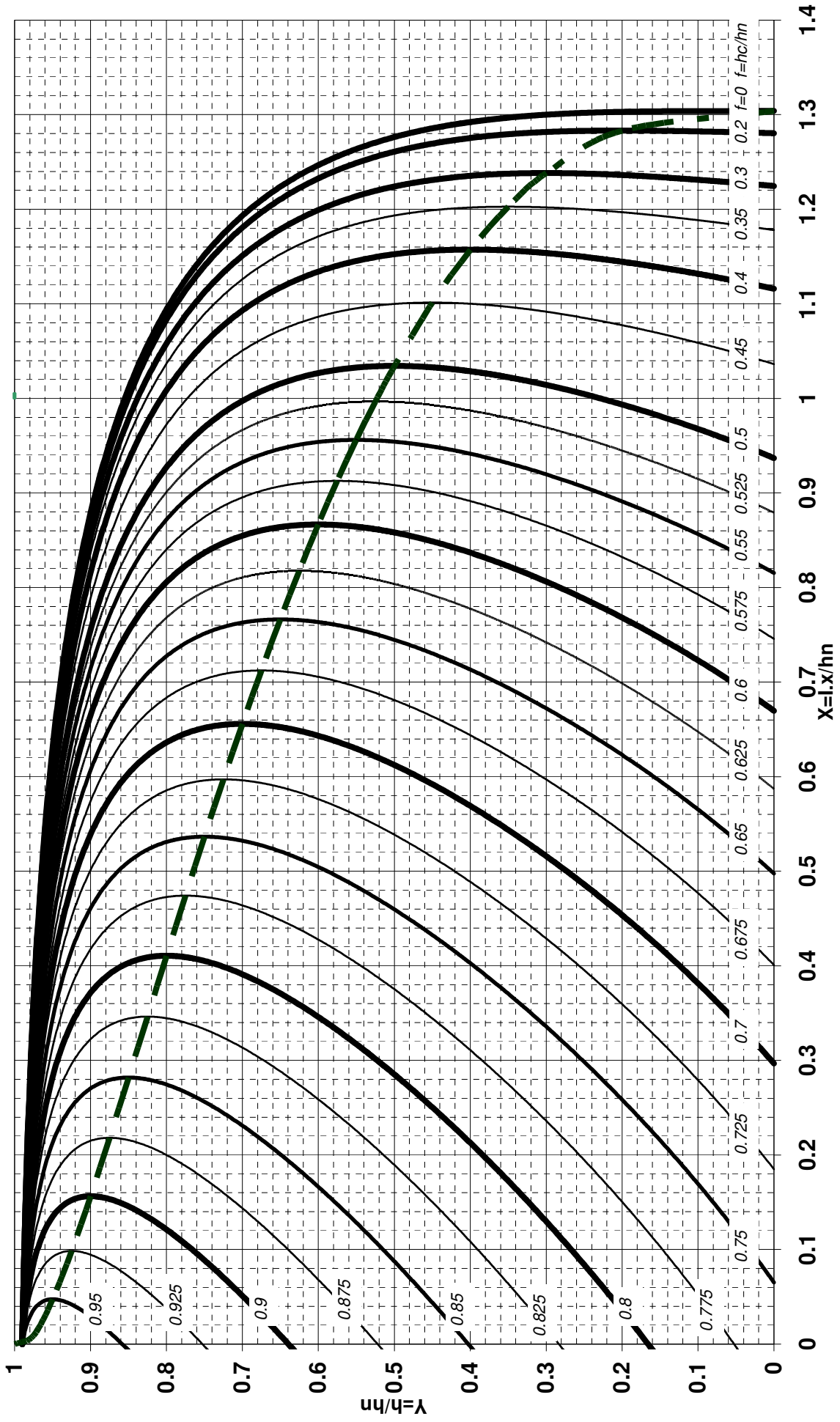


9. - ABAQUES DE LA METHODE PAR SUBSTITUTION POUR LE CALCUL DE LA COURBE DE REMOUS

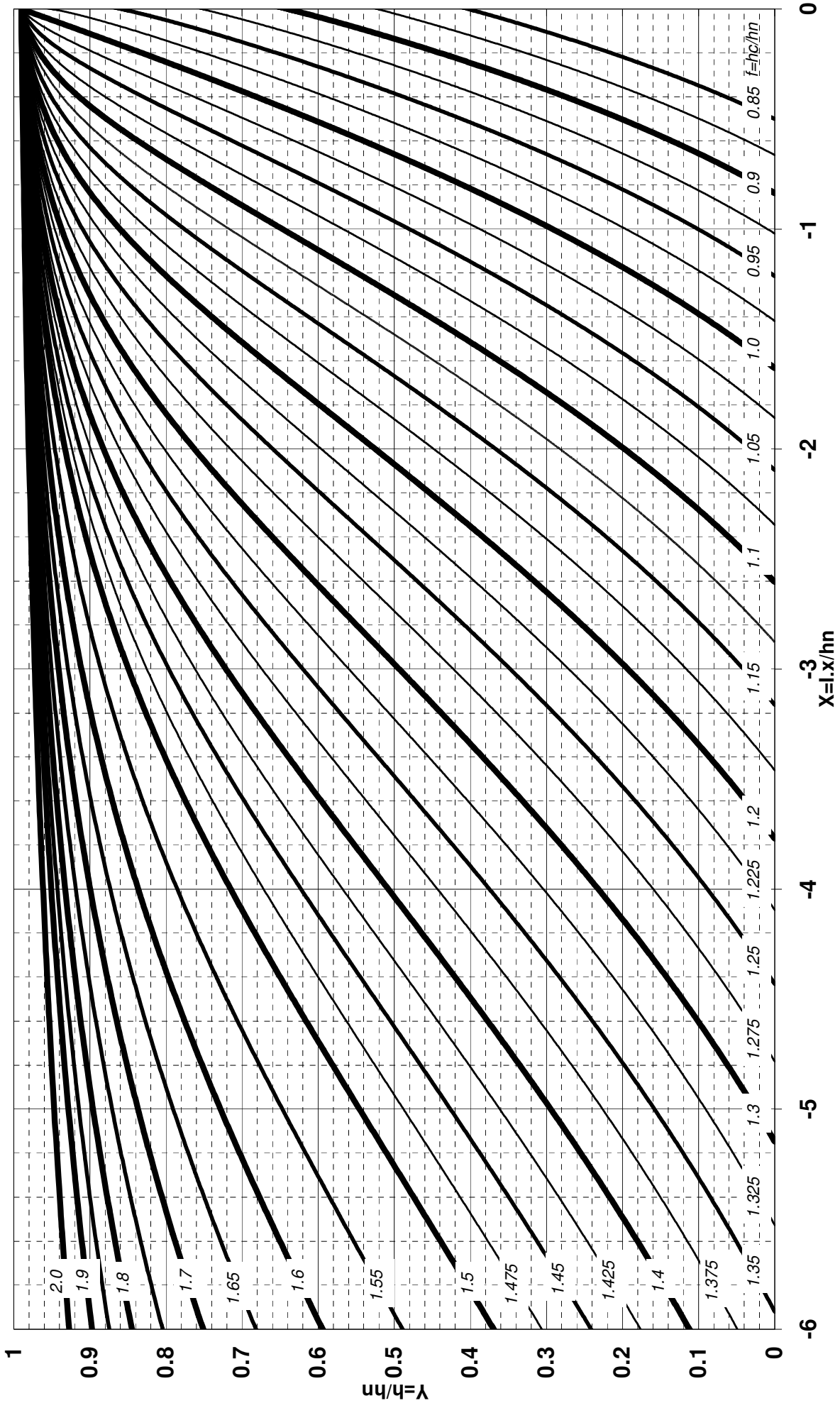




### Résolution C : Courbes M2, M3



### Résolution D : Courbes S3, C3





# Appendix I

## Abaques de calcul des déversoirs latéraux en canal rectangulaire

Cette abaque est issu de [16].

### I.1 Choix de l'abaque

Ces abaques utilisent les équations générales (III.18.11) et (III.18.12) et ajoutent:

- les spécificités des canaux rectangulaires ( $S = Bh$ ,  $\chi = B + 2h$ , ...),
- l'hypothèse d'une pente du fond et de la ligne des frottements faibles ( $S_0 = S_f \simeq 0$ )
- l'hypothèse que la projection de la vitesse déversante dans l'axe du canal ( $u \cos \alpha$ ) est sensiblement égale à la vitesse de l'écoulement  $v$ .

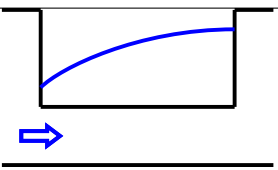
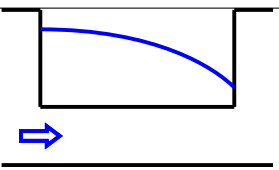
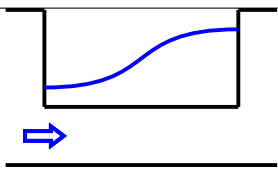
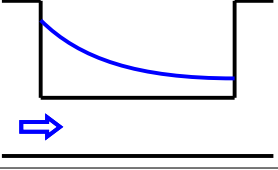
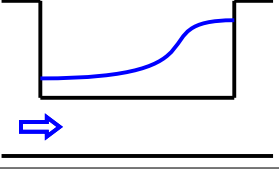
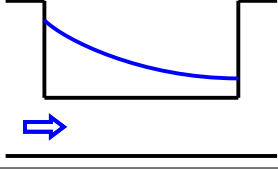
On introduit les notations  $k = n^*c$ ,  $S = Bh$ ,  $X = kx/B$ ,  $y = h/H_s$ ,  $\Theta = \theta/k$ ,  $W = p/H_s$  et  $B = b(1 + \Theta X)$  avec  $B(X = 0) = b$ . On notera que  $y = 2/3$  correspond à un nombre de Froude égal à 1 :  $y > 2/3$  est un écoulement fluvial,  $y < 2/3$  est un écoulement torrentiel. L'équation (III.18.11) devient:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{2\Theta y(1-y) - \frac{\bar{Q}'}{k} \sqrt{2(1-y)}}{(3y-2)(1+\Theta X)} \quad (\text{I.1})$$

avec

$$\frac{\bar{Q}'}{k} = -\frac{3}{5}(y-W)^{3/2} \left( \frac{1-W}{3-2y-W} \right)^{1/2} \left( 1 - \theta \left( \frac{3(1-y)}{y-W} \right)^{1/2} \right) \quad (\text{I.2})$$

Ce nouveau jeu d'équation fait apparaitre que la ligne d'eau dans un déversoir latéral en canal rectangulaire ne dépend que de  $W$  et  $\Theta$ . On distingue plusieurs cas dépendant de l'entonnement, du régime d'écoulement et de  $\sigma$  le numérateur de l'équation (I.1).

	$\Theta = 0$	$\Theta < 0$	
$Fr < 1$	Cas 1 	Cas 2 	Cas 3 
$Fr > 1$	Cas 4 	Cas 5 	Cas 6 
	$\sigma > 0$	$\sigma < 0$	$\sigma > 0$
Les abaques ne sont valables que dans le cas où il n'y a pas de ressaut hydraulique.			

## I.2 Utilisation de l'abaque

L'utilisation de l'abaque nécessite de suivre quelques étapes:

1. Vérification du régime d'écoulement: on doit s'assurer que l'écoulement est torrentiel (ou fluvial) à l'amont et à l'aval du déversoir latéral et donc qu'il n'y a pas de changement de régime sur le déversoir. Pour cela, on peut:
  - prendre en compte les spécificités de l'écoulement calculées par ailleurs (par exemple: présence d'une chute à l'aval, d'une vanne à l'amont, ...)
  - en l'absence d'organe autre que le déversoir latéral, vérifier le type de pente du canal (pente faible / forte)
2. Calculer l'entonnement  $\Theta$  du déversoir latéral.

Ces deux informations permettent d'identifier l'abaque à utiliser. L'utilisation dépendra alors de l'objectif du problème : calculer le débit déversé connaissant la géométrie de l'ouvrage et la nature de l'écoulement (hauteur et débit) à l'amont en régime torrentiel, à l'aval en régime fluvial ou calcul de la longueur de l'ouvrage connaissant le débit déversé et les autres paramètres (entonnement, ...)

### I.2.1 Calcul du débit déversé

On suppose que le déversoir latéral est seul sur un canal (les conditions amont et aval ne sont déterminées que par la pente du canal). Les données du problème sont:

$Q_{av}$	Le débit à l'aval du déversoir latéral
$K$	Le coefficient de rugosité du canal
$S_0$	La pente du fond du canal
$L$	La longueur du déversoir latéral
$p$	La hauteur de pelle du déversoir latéral
$\theta$	L'angle d'entonnement
$B_{av}$	La largeur du canal aval

On suppose dans la suite que le canal est en pente faible à l'aval du déversoir latéral et donc en régime fluvial.

1. On en déduit que la hauteur d'eau à l'aval du déversoir est nécessairement la hauteur normale:  $h_{av} = h_N$ . On calcule la charge spécifique à l'aval de l'écoulement:  $H_{s,av}$  puis  $Y_{av} = h_{av}/H_{s,av}$ .



2. On calcule :  $\Theta = \theta/k$ ,  $W = p/H_s$  afin d'identifier l'abaque. Connaissant la courbe et  $Y_{av}$ , on lit  $X_{av}$ .
3.  $X_{av}$  permet de recalculer l'abscisse  $x_{av}$  réel, d'y retrancher la longueur du déversoir  $L$  pour retrouver  $x_{am} = x_{av} - L$ . On en déduit  $X_{am}$ .
4. Par lecture à partir de la courbe et de  $X_{am}$ , on détermine  $Y_{am}$ .
5. Sachant que  $H_{s,am} = H_{s,av}$ , on peut calculer  $h_{am}$  et donc en déduire  $Q_{am}$ .

Si le canal avait été en pente forte, il aurait fallu connaître l'information  $Q_{am}$  au lieu de  $Q_{av}$  et faire le même calcul en partant de l'amont.

### I.2.2 Calcul de la longueur

On suppose que le déversoir latéral est seul sur un canal (les conditions amont et aval ne sont déterminées que par la pente du canal). Les données du problème sont:

$Q_{am}$	Le débit à l'amont du déversoir latéral
$Q_{av,obj}$	Le débit à l'aval du déversoir latéral
$K$	Le coefficient de rugosité du canal
$S_0$	La pente du fond du canal
$p$	La hauteur de pelle du déversoir latéral
$B_{am}$	La largeur du canal amont

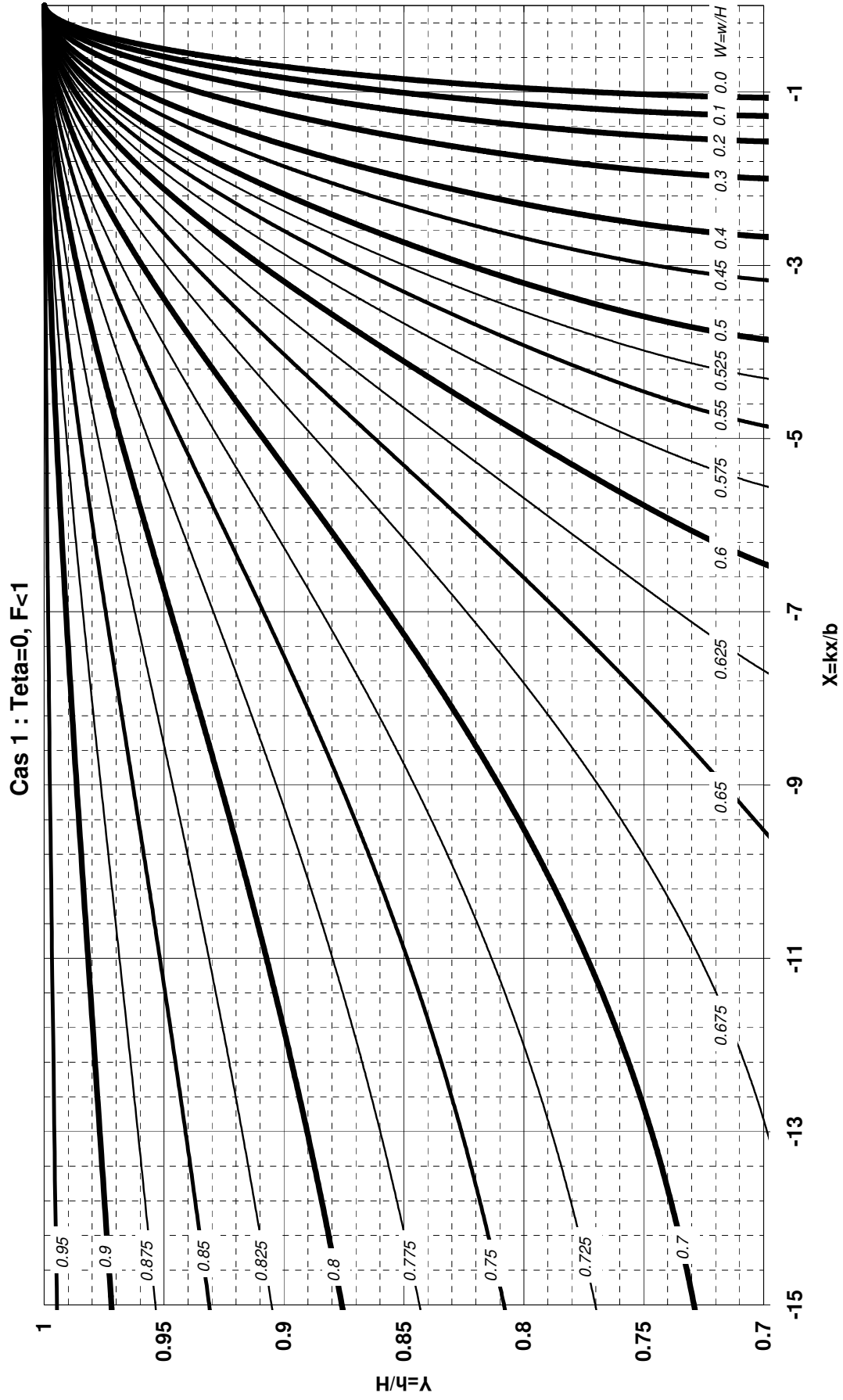
On suppose dans la suite que le canal est en pente forte à l'amont du déversoir latéral et donc en régime torrentiel.

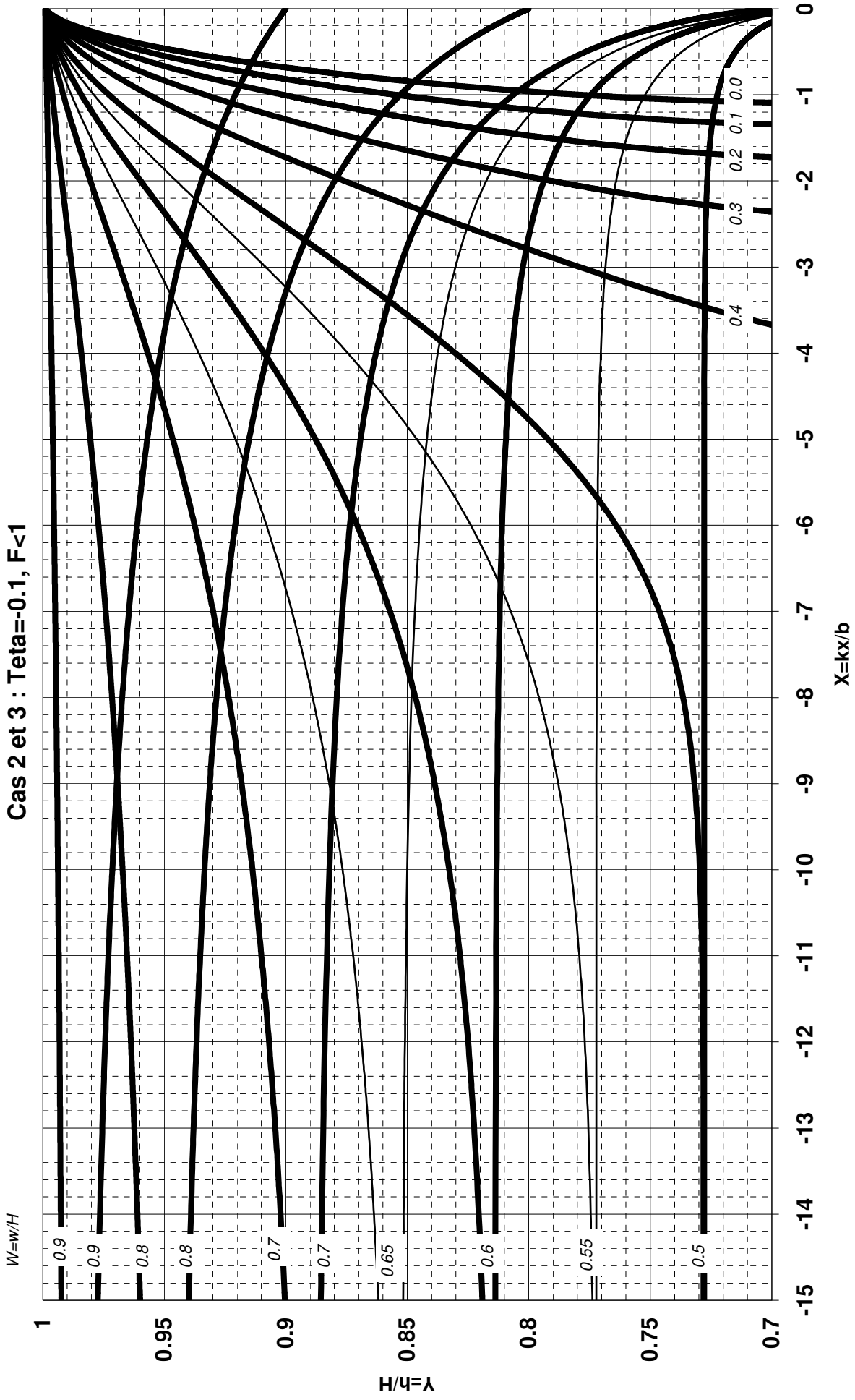
1. On en déduit que la hauteur d'eau à l'amont du déversoir est nécessairement la hauteur normale:  $h_{am} = h_N$ . On calcule la charge spécifique à l'amont de l'écoulement:  $H_{s,am}$  puis  $Y_{am} = h_{am}/H_{s,am}$ .
2. On calcule :  $\Theta = \theta/k$ ,  $W = p/H_s$  afin d'identifier l'abaque. Connaissant la courbe et  $Y_{am}$ , on lit  $X_{am}$ .
3.  $X_{am}$  permet de recalculer l'abscisse  $x_{am}$  réel. On fait une hypothèse sur la longueur du canal  $L$  et on en déduit la largeur du canal à l'aval  $B_{av}$  et  $x_{av} = x_{am} + L$ . On en déduit  $X_{av}$ .
4. Par lecture à partir de la courbe et de  $X_{av}$ , on détermine  $Y_{av}$ .
5. Sachant que  $H_{s,am} = H_{s,av}$ , on peut calculer  $h_{av}$  et donc en déduire  $Q_{av}$  connaissant  $B_{av}$ . On compare  $Q_{av}$  et  $Q_{av,obj}$ . Si  $Q_{am} > Q_{av,obj}$  alors  $L$  est surestimée, dans le cas contraire,  $L$  est sous-estimée. On adapte donc la valeur de  $L$  en conséquence et on reprend à l'étape 3.

Si le canal avait été en pente faible, il aurait fallu connaître l'information  $B_{av}$  au lieu de  $B_{am}$  et faire le même calcul en partant de l'aval.

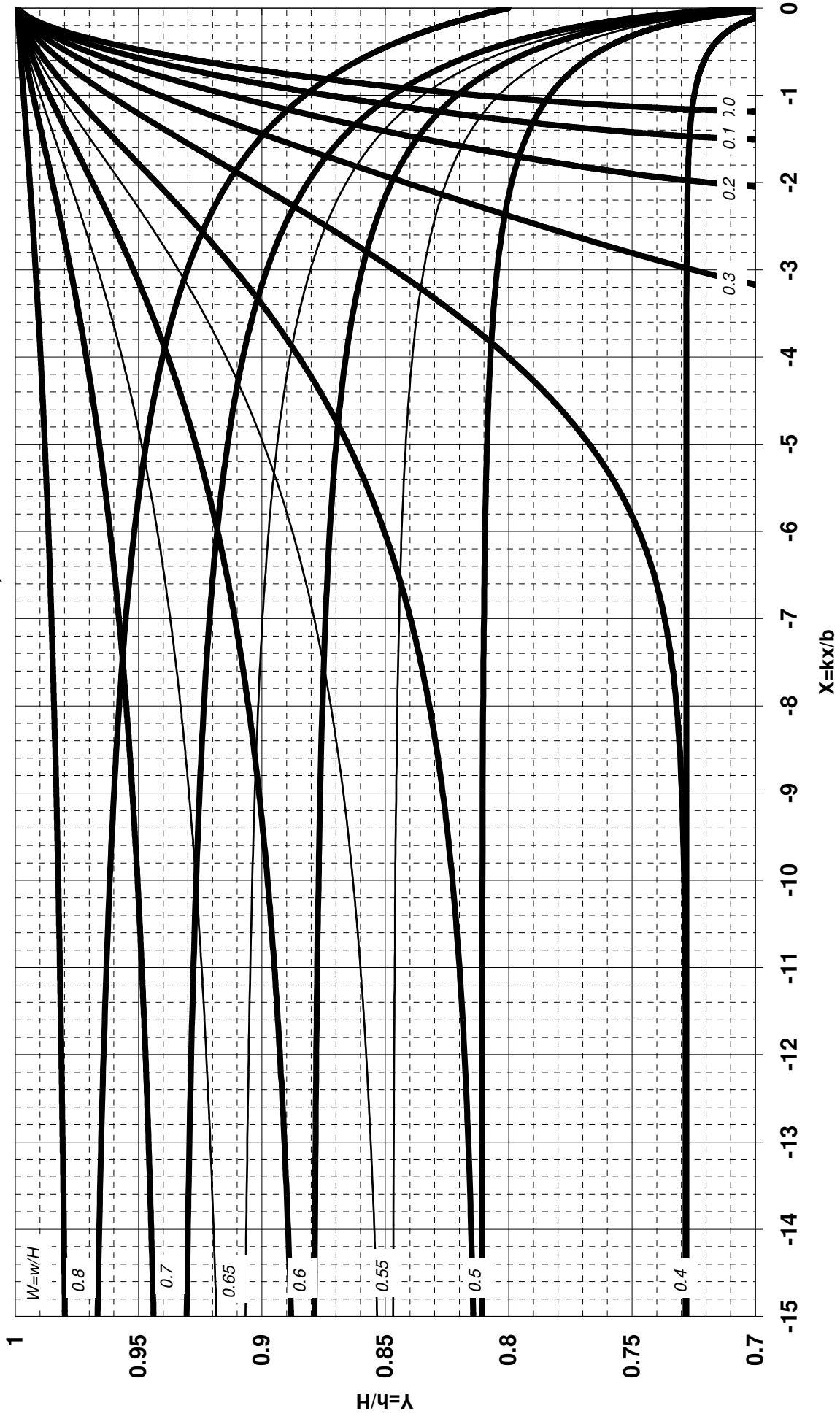


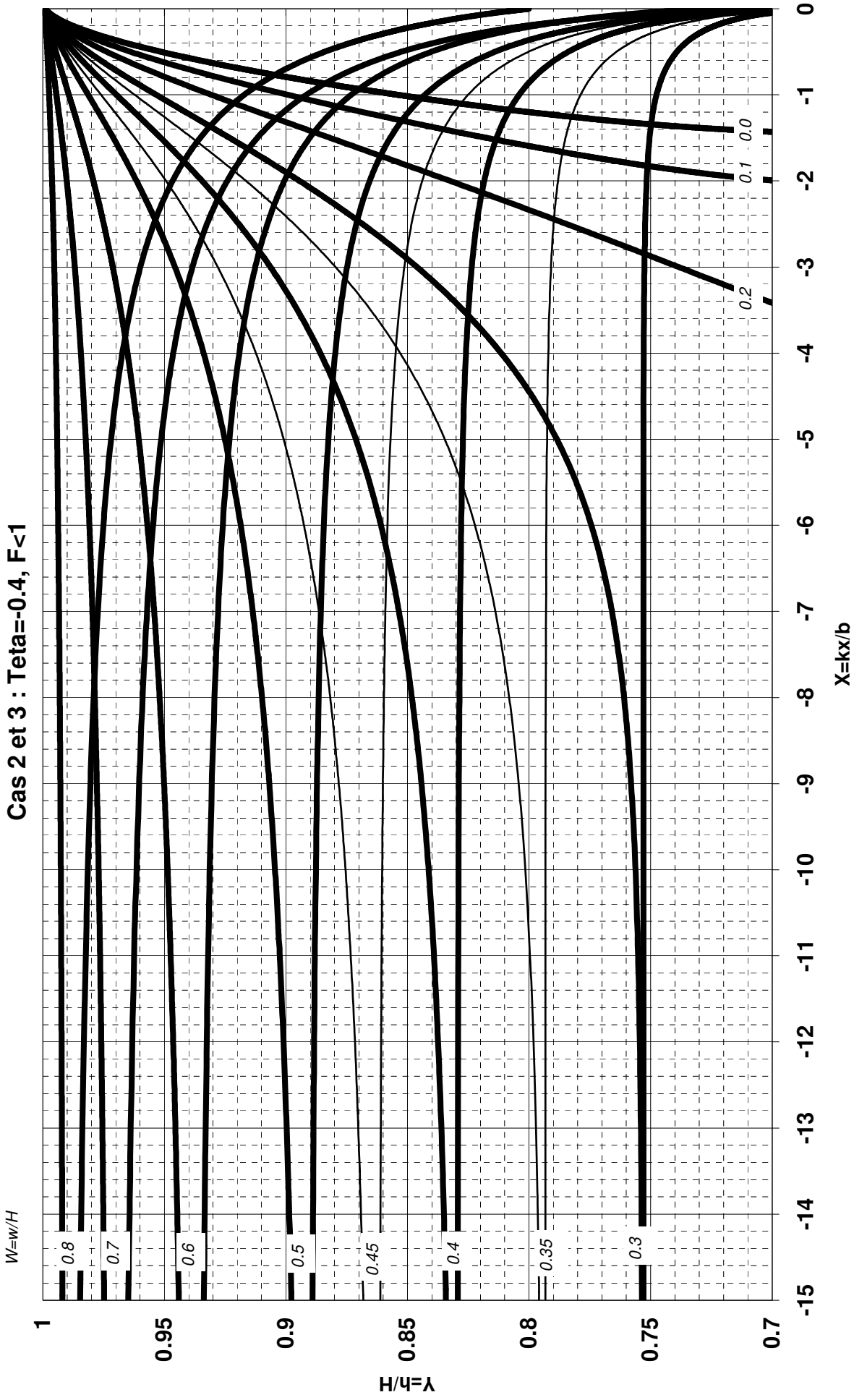
## 14. - ABAQUES POUR LE CALCUL DES DEVERSOIRS LATERAUX



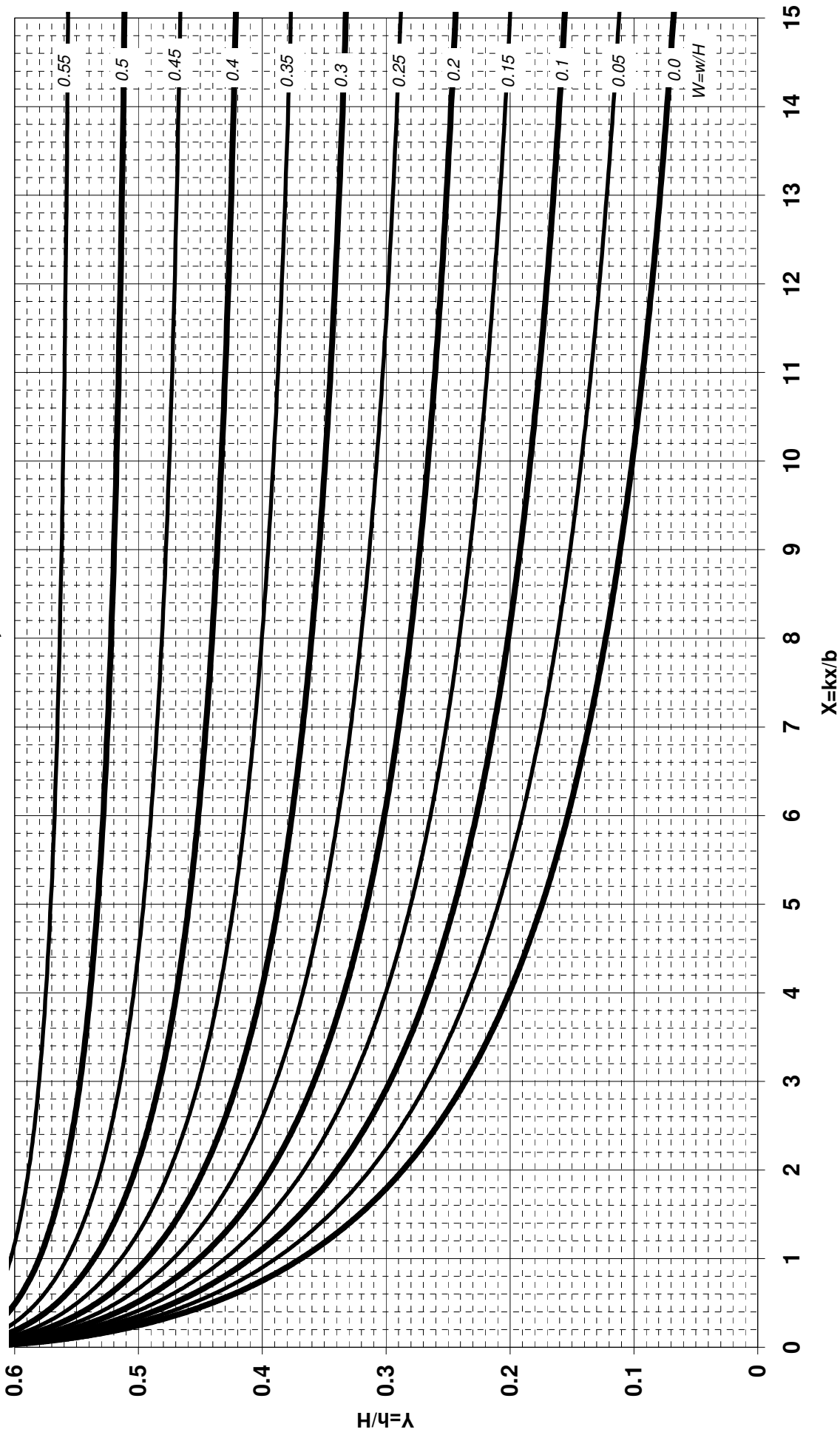


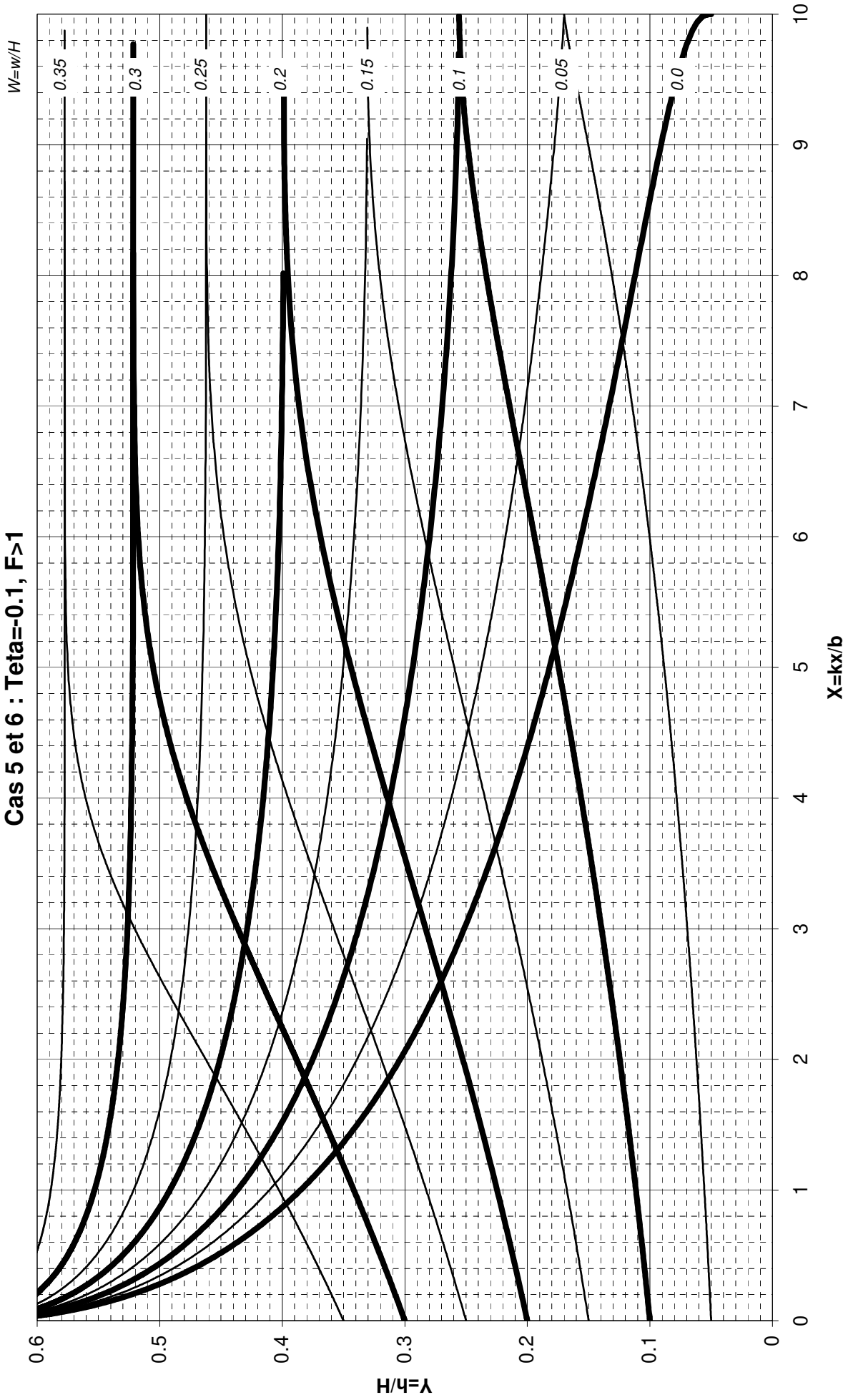
Cas 2 et 3 :  $Teta=0.2$ ,  $F < 1$





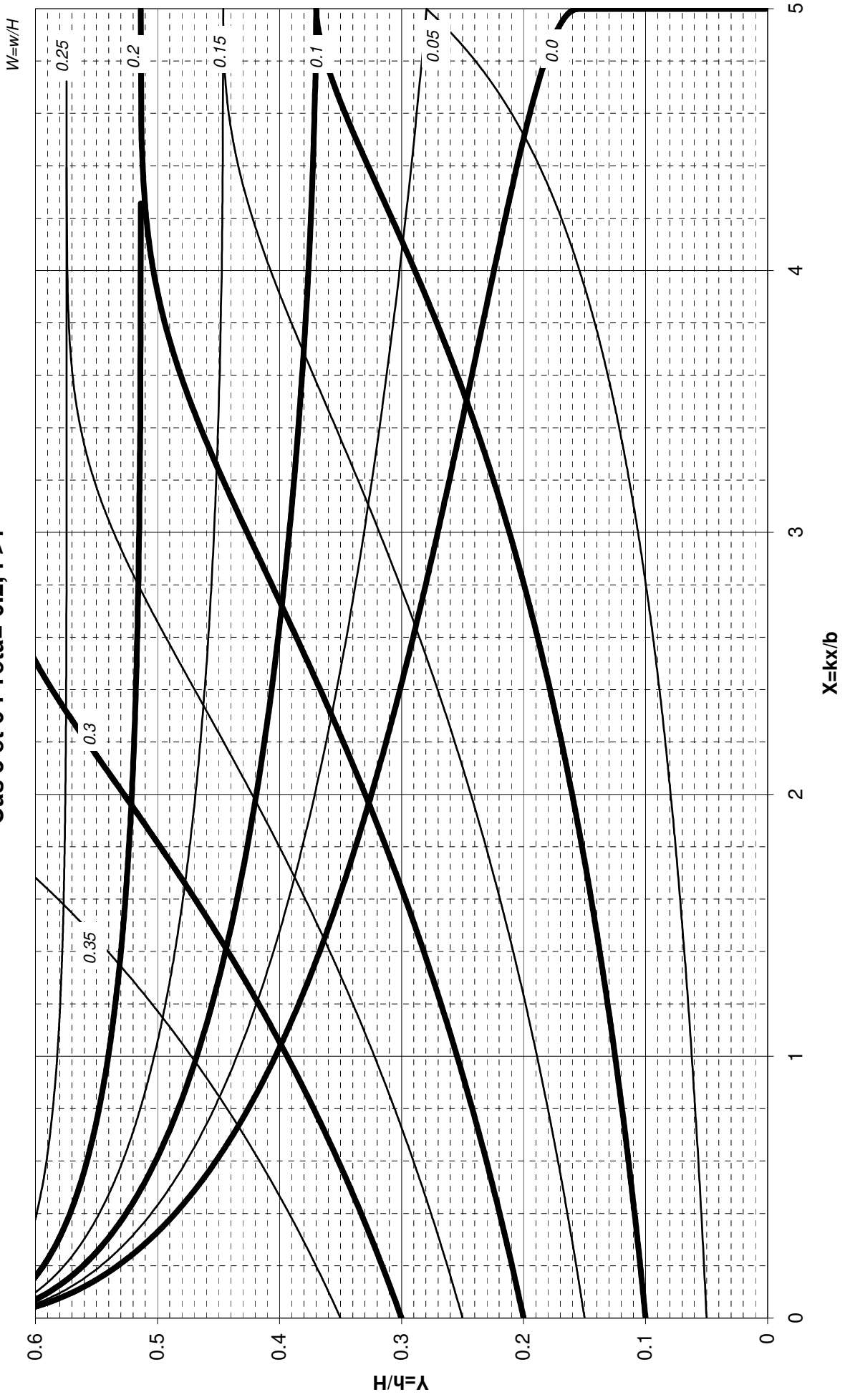
Cas 4 :  $Teta=0, F>1$



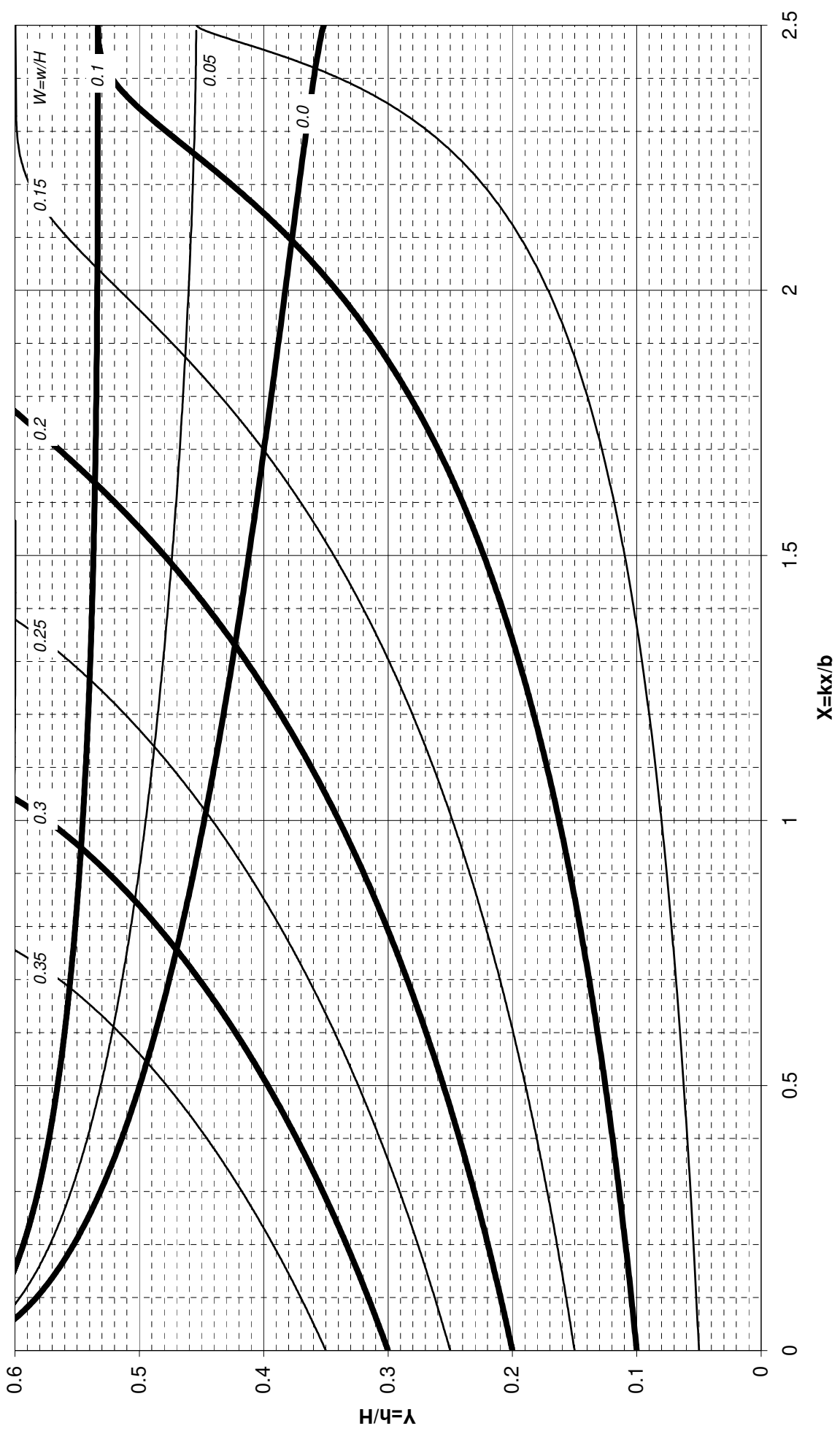
Cas 5 et 6 :  $Teta=0.1, F>1$ 



Cas 5 et 6 :  $Teta = -0.2$ ,  $F > 1$



Cas 5 et 6 :  $Teta = -0.4$ ,  $F > 1$



# List of Figures

I.1.1 Organigramme des différentes sciences découlant de la mécanique . . . . .	10
I.1.2 Illustration de la force de viscosité . . . . .	12
I.1.3 Exemple de rhéogramme . . . . .	13
I.1.4 Effet de la cavitation sur différentes installations . . . . .	14
I.1.5 Illustration de la tension superficielle. D'après [17] . . . . .	15
I.1.6 Origine moléculaire de la pression . . . . .	16
I.2.1 Schéma expérimental . . . . .	18
I.2.2 Comparaison entre écoulement en charge et écoulement à surface libre . . . . .	18
I.2.3 Schéma expérimental . . . . .	19
I.2.4 Écoulement laminaire . . . . .	19
I.2.5 Écoulement turbulent . . . . .	19
I.2.6 Comparaison des profils de vitesse en régime laminaire et turbulent . . . . .	20
I.2.7 Profil de vitesse et répartition des zones de turbulence dans une conduite circulaire en régime turbulent . . . . .	21
I.3.1 Définition du volume de contrôle pour la relation fondamentale de l'hydrostatique	26
I.3.2 Illustrations de pressions relative et absolue . . . . .	28
I.4.1 Illustration de l'action de la pression sur un objet . . . . .	30
I.4.2 Schéma de détermination des efforts sur une paroi plane. Illustration d'après [5] .	30
I.4.3 Représentation des composantes de la force de poussée sur une paroi gauche. Illustration d'après [5] . . . . .	32
I.4.4 Décomposition de la surface gauche pour le calcul de la résultante par le bilan des forces à l'équilibre. Illustration d'après [5] . . . . .	33
I.4.5 Illustrations de l'équilibre des corps partiellement immergés. Illustration de [5].	35
I.5.1 Illustration de la définition du débit . . . . .	38
I.6.1 Schéma du volume de contrôle pour l'établissement de l'équation de continuité .	42
I.6.2 Conservation du débit en conduite . . . . .	43
I.7.1 Schéma du système d'axe associé à une trajectoire. On notera que $\vec{b}$ est le vecteur perpendiculaire à la feuille orienté vers le lecteur. . . . .	46
I.9.1 Exemple de profils de charge . . . . .	53
II.10. Comparaison des profils de charge pour des fluides parfait et réel . . . . .	59
II.10. Illustration énergétique de la perte de charge . . . . .	59
II.11. Rugosité dans une conduite . . . . .	63
II.11. Diagramme de Moody . . . . .	65
II.11. Profil de charge typique pour un rétrécissement localisé . . . . .	68

II.11.	Profil de charge typique pour un élargissement brusque . . . . .	68
II.11.	Profil de charge typique pour un rétrécissement brusque . . . . .	69
II.12.1	. . . . .	72
II.12.2	. . . . .	73
II.12.3	. . . . .	73
II.12.4	. . . . .	74
II.12.5	. . . . .	74
II.13.	Schéma énergétique d'une pompe. Illustration d'après [8] . . . . .	75
II.13.	Domaines d'application des pompes volumétriques et hydrodynamiques. Illustration de [8], p221. . . . .	76
II.13.	Schéma de l'installation de pompage. Illustration d'après [8]. . . . .	78
II.13.	Courbes caractéristiques d'une pompe . . . . .	81
II.13.	Caractéristique de l'installation. Illustration d'après [8]. . . . .	81
II.13.	Caractéristique de l'installation. Illustration d'après [8]. . . . .	82
II.13.7	. . . . .	82
II.13.	Exemple de courbe de fonctionnement . . . . .	83
II.13.	Pompes centrifuges à l'aspiration . . . . .	84
II.13.	Calcul des caractéristiques similaires . . . . .	85
II.13.	Assemblage de pompes en parallèle. A gauche : Montage réel. A droite : Montage équivalent virtuel . . . . .	86
II.13.	Calcul de la courbe caractéristique de la pompe équivalente à un montage parallèle. On notera que dans cet exemple la charge fournie à débit nul par les deux pompes réelles est la même. Il est évidemment possible d'assembler deux pompes pour lesquelles cela ne serait pas le cas. Toutefois, il faut alors prendre des précautions techniques. . . . .	87
II.13.	Calcul du point de fonctionnement d'une installation en parallèle . . . . .	87
II.13.	Assemblage de pompes en série. A gauche : Montage réel. A droite : Montage équivalent virtuel . . . . .	87
II.13.	Calcul de la courbe caractéristique de la pompe équivalente à un montage série. On notera que le débit maximal fournit pour chaque pompe réelle à charge nulle est le même. Il est évidemment possible d'assembler deux pompes pour lesquelles cela ne serait pas le cas. Toutefois, il faut alors prendre des précautions techniques. . . . .	88
II.13.	Calcul du point de fonctionnement d'une installation en série . . . . .	89
II.14.	Illustration du phénomène de propagation d'onde . . . . .	92
II.14.	$T^* = 0$ : Fermeture instantanée de la vanne . . . . .	97
II.14.	$0 < T^* < 1$ : Remontée de l'onde de surpression dans la conduite . . . . .	97
II.14.	$T^* = 1$ : Arrivée au réservoir . . . . .	98
II.14.	$1 < T^* < 2$ : Descente de l'onde de dépression dans la conduite . . . . .	98
II.14.	$T^* = 2$ : Arrivée à la vanne . . . . .	99
II.14.	$2 < T^* < 3$ : Remontée de l'onde de dépression dans la conduite . . . . .	99
II.14.	$T^* = 3$ : Arrivée au réservoir . . . . .	99
II.14.	$3 < T^* < 4$ : Descente de l'onde de surpression dans la conduite . . . . .	100
III.15.	Description longitudinale de la géométrie . . . . .	106
III.15.	Description transversale de la géométrie. (a) Section naturelle, (b) Section artificielle . . . . .	107
III.15.	Géométries couramment rencontrées dans un réseau d'assainissement. Illustration d'après [16], p76. . . . .	109
III.15.	Approximation pour le calcul des paramètres géométriques en réseau d'assainissement. Illustration de [16], p76. . . . .	110

III.15	Profil en long caractéristique. Illustration d'après [16], p7. . . . .	112
III.15	Les différents régimes d'écoulement . . . . .	112
III.15	Profils normalisés de vitesse dans différentes sections (Illustration de [2]). . . . .	112
III.15	Schéma du volume fluide considéré pour déterminer la pression sur le fond . . . . .	114
III.15	Profil de pression pour un canal non-rectiligne. . . . .	114
III.15	Illustration du phénomène de sous pression sur un déversoir - J. Vazquez© . . . . .	115
III.16	Illustration du régime permanent uniforme . . . . .	118
III.16	Valeur du coefficient de Bazin. Reproduction de [10] . . . . .	120
III.16	Valeur du coefficient de Kutter. Reproduction de [10] . . . . .	121
III.16	Relation hauteur normale $h_N$ - débit pour une section évasée : la largeur de la section augmente avec la hauteur . . . . .	122
III.16	Illustration du calcul du coefficient de rugosité sur une section à géométrie complexe	123
III.17	Relation $H_s(h)$ à débit $Q$ imposé . . . . .	126
III.17	Relation $h(Q)$ à charge spécifique $H_s$ imposée . . . . .	127
III.17	Courbes de remous possibles en pente faible . . . . .	131
III.17	Courbes de remous possibles en pente critique . . . . .	132
III.17	Courbes de remous possibles en pente forte . . . . .	132
III.17	Courbes de remous possibles en pente nulle . . . . .	133
III.17	Courbes de remous possibles en contre pente . . . . .	134
III.17	Exemple de courbe de remous pour un canal en pente faible . . . . .	135
III.17	Exemple de courbe de remous pour un canal en pente forte . . . . .	136
III.17	Illustration d'un ressaut hydraulique. Crédit photo : J. Vazquez© . . . . .	138
III.17	Schéma descriptif d'un ressaut . . . . .	139
III.17	Illustration de la méthode de l'impulsion. Les courbes H2 et H3 correspondent aux courbes de remous calculées à partir de l'équation de la ligne d'eau. . . . .	140
III.17	Illustration de la méthode de la courbe conjuguée. Les courbes H2 et H3 correspondent aux courbes de remous calculées à partir de l'équation de la ligne d'eau. Les courbes H2c et H3c sont leurs courbes conjuguées respectives. . . . .	141
III.17	Illustration du calcul de la perte de charge dans un ressaut . . . . .	142
III.18	Photos de deux seuils (a) frontal, (b) latéral. Pascal Finaud-Guyot© . . . . .	146
III.18	Photos du seuil de Trets sur l'Arc (13). G. Degoutte © . . . . .	146
III.18	Profil longitudinal schématisé d'un seuil . . . . .	146
III.18	Représentation schématisée d'un seuil en paroi mince . . . . .	147
III.18	Différents types de seuils. Illustrations de . . . . .	150
III.18	Schéma d'un déversoir latéral . . . . .	150
III.18	Schéma d'un déversoir latéral . . . . .	151
III.18	Les chutes. (a) régime fluvial, (b) régime torrentiel. . . . .	152
III.18	Schéma d'une vanne . . . . .	153
C.1	Table de rugosité pour différents matériaux . . . . .	168
C.2	Table de rugosité pour différents matériaux . . . . .	169

# List of Tables

I.1.1	Valeurs de la masse volumique et de la densité pour des fluides fréquemment rencontrés en hydraulique . . . . .	10
I.1.2	Influence de la température sur les caractéristiques de l'eau pour une pression de 1atm. Reproduit d'après [6] . . . . .	11
I.1.3	Valeurs des coefficients de compressibilité isotherme . . . . .	11
I.1.4	Coefficient de viscosité dynamique et cinématique . . . . .	13
II.11.	Paramètre de la formule de Hazen-Williams (les grandeurs sont en unité <i>SI</i> ). . .	66
II.11.	Paramètres de la formule de Lechapt et Calmon $J = LQ^M D^{-N}$ avec $J$ en $mm/m$ , $Q$ en $m^3.s^{-1}$ et $D$ en $m$ . . . . .	67
III.15	Formulaire de calcul des variables hydrauliques. On notera que l'on peut utiliser les formulations pour les canaux trapézoïdaux pour un canal rectangulaire (en prenant $m = 0$ ) ou pour un canal triangulaire (en prenant $B = 0$ ). Tableau de [16], p75. . . . .	108
III.15A	Approximation sur le calcul de la pression en fonction de la pente . . . . .	113
III.17A	Approximation du nombre de Froude pour des géométries courantes. Tableau de [16], p80. . . . .	128
III.17C	Clé de choix pour l'abaque de résolution de la courbe de remous. D'après [16] . .	138
III.17B	Relations simplifiées pour le calcul des hauteurs conjuguées. D'après [16, 12] . . .	140
A.1	Formules de calcul des grandeurs nécessaires à la détermination d'une poussée sur une surface pour des formes géométriques simples . . . . .	158
B.1	Coefficient de perte de charge pour les cônes . . . . .	160
B.2	Coefficient de perte de charge pour un changement brusque de diamètre . . . . .	161
B.3	Coefficient de perte de charge pour des coudes . . . . .	162
B.4	Coefficient de perte de charge pour les tés . . . . .	163
B.5	Coefficient de perte de charge pour des appareils de robinetterie . . . . .	164
B.6	Coefficient de perte de charge pour le raccordement d'une conduite avec un grand réservoir . . . . .	165

# Index

masse volumique, 10





## Appendix J

# Description des variables

Symbole	Description	Unité
$B$	Largeur au miroir de l'écoulement	m
$C$	coefficient de Chezy	$\text{m}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$
$Ca$	Nombre de Cauchy	$\emptyset$
$C_c$	Coefficient d'intégration	
$C_d$	Coefficient de débit	
$d$	Densité	$\emptyset$
$D_h$	Diamètre hydraulique	m
$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$	Vecteurs unitaires définissant le référentiel d'étude	$\emptyset$
Eu	Nombre d'Euler	$\emptyset$
$\vec{F}$	vecteur Force. $F = \ \vec{F}\ $	$\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Fr	Nombre de Froude	$\emptyset$
$\vec{g}$	Vecteur accélération de la pesanteur. $g = \ \vec{g}\  = 9,81 \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
$h$	hauteur d'eau mesurée au dessus du point considéré	m
$H$	charge de l'écoulement	m
$H_s$	charge spécifique de l'écoulement	m
$j$	Perte de charge linéaire totale (aussi noté $\Delta H$ )	m
$K_B$	Coefficient de Bazin	
$K_K$	Coefficient de Kutter	
$K$	Coefficient de Strickler	
$M$	Masse	kg
$n$	Coefficient de Manning	
$\vec{n}$	Vecteur unitaire normal à la surface	$\emptyset$
$\vec{P}_o$	vecteur poids. $P_o = \ \vec{P}_o\ $	N
$P$	Pression $P_{abs}$ : Pression absolue $P_{atm}$ : Pression atmosphérique $P_{rel}$ : Pression relative	Pa
$p^*/\rho g$	Hauteur piézométrique (parfois notée $y$ )	m
$q$	Débit unitaire d'apport	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$Q$	Débit de fluide $Q$ ou $Q_v$ : débit volumique $Q_m$ : débit massique	$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$

<b>Symbole</b>	<b>Description</b>	<b>Unité</b>
$R$	Rayon de courbure	m
$Re$	Nombre de Reynolds	$\emptyset$
$R_h$	Rayon hydraulique	m
$S$	Surface	$m^2$
$S_0$	Pente du fond (parfois notée $i$ )	$\emptyset$
$S_f$	Pente de la ligne des frottements (équivalente à $j$ )	$\emptyset$
$t$	temps	s
$V$	Volume	$m^3$
$\vec{v}$	Vitesse de l'écoulement. $v = \ \vec{v}\ $ $v_x, v_y, v_z$ : Composantes du vecteur vitesse	$m.s^{-1}$
$We$	Nombre de Weber	$\emptyset$
$x, z$	Coordonnée d'espace	m
$y$	tirant d'eau	m
$\epsilon$	Rapport d'aspect	$\emptyset$
$\gamma$	Poids volumique	$N.m^{-3}$
$\alpha$	Coefficient de perte de charge (aussi noté $k, \lambda$ et $f$ )	$\emptyset$
$\rho$	Masse volumique	$kg.m^{-3}$
$\mu$	Coefficient de viscosité dynamique ou absolue	Pa.s
$\nu$	Coefficient de viscosité cinématique	$m^2.s^{-1}$
$\chi$	Périmètre mouillée	m

# Appendix K

## Liste des vidéos de cours

### K.1 Mécanique des fluides

- La pression
- Statique des fluides
- Démonstration de l'équation de la statique des fluides
- Calcul de la poussée sur une plaque
- Equation de Bernoulli appliquée à un venturi

### K.2 Hydraulique en charge

- Equation de Bernoulli généralisée
- Analyse du profil de charge
- Les pertes de charge
- Utilisation du diagramme de Moody
- Dimensionnement d'une conduite
- Coup de bélier: fermeture de vanne rapide
- Coup de bélier: fermeture de vanne lente

### K.3 Hydraulique à surface libre

- Les différents types d'écoulement
- Régime permanent uniforme
- Régime permanent non uniforme
- L'équation de la ligne d'eau
- Tracé de courbes de remous
- Calcul de ligne d'eau fluviale
- Calcul de ligne d'eau torrentielle
- Calcul de ligne d'eau avec changement de régime sans ressaut
- Calcul de ligne d'eau avec ressaut
- Le ressaut hydraulique



# Bibliography

- [1] T. Cairney. *Hydraulics for Civil Engineering Technicians*. Prentice Hall Press, London, February 1984.
- [2] V. T. Chow. *Open-Channel Hydraulics*. McGraw- Hill Book Co., New York, 1959. III.15.7, I.2.2
- [3] F. J. Dominguez. *Hidráulica*. Editorial universitaria edition, 1945. III.18.1.5
- [4] Jack-B. Evett, Ranald-V. Giles, and Cheng Liu. *MECANIQUE DES FLUIDES ET HYDRAULIQUE. Cours et problèmes, 2ème édition*. France Mac Graw Hill, Paris, 2e édition edition, 2000.
- [5] W. H. Graf and M. S. Altinakar. *Hydrodynamique*. Eyrolles, 1991. I.4.2, I.4.3, I.4.4, I.4.5, I.2.2
- [6] William M. Haynes. *CRC Handbook of Chemistry and Physics, 95th Edition*. CRC Press, June 2014. I.1.2, I.2.4, I.2.2
- [7] Idel’Cik. *Mémento des pertes de charges*. Eyrolles, Paris, November 1986. II.11.3
- [8] Régis Joulié. *Mécanique des fluides appliquée*. Ellipses, 1998. I.1.2.4.2, I.1.3.2, I.1.4, I.1.5, I.1.6.2, I.2.2.3, I.2.3.2, I.3.3, II.11.2.3, II.11.3, II.13.1, II.13.2, II.13.3, II.13.5, II.13.6, II.13.5.3, I.2.2
- [9] S. Ladreyt and V. Laborie. Notice sur les déversoirs - synthèse des lois d’écoulements au droit des seuils et des déversoirs. Technical Report ISBN 2-11-096462-5, CETMEF, 2005. III.18.1.2
- [10] A. Lencastre. *Hydraulique générale*. Safege, 1999. I.2.4a, I.2.5a, I.2.4, II.11.3, III.16.2, III.16.3, III.18.1.5, III.18.1.5, I.2.2
- [11] P. Pernès. *Hydraulique unidimensionnelle. : 2, Coups de bélier et phénomène d’oscillation*. Cemagref, Antony (Hauts-de-Seine); Strasbourg, April 2004. II.13.2.2, II.13.4, II.14.3
- [12] P. Pernès. *Hydraulique unidimensionnelle : Partie 1, Analyse dimensionnelle et similitude Généralités sur les écoulements unidimensionnels Ecoulements en charge Ecoulements à surface libre*. Cemagref, Antony (Hauts-de-Seine); Strasbourg, April 2004. III.17.3, I.2.2
- [13] Christian Roux. *Hydraulique pratique*. Pyc Livres, Paris, January 1989.
- [14] B. Saad. *Hydraulique et hydrologie, 3e édition*. École de technologie supérieure. Presses de l’université du Québec, 2014. I.5.5
- [15] R. O. Sinniger and W. H. Hager. *Constructions hydrauliques - Ecoulements stationnaires*. Traité de Génie Civil de l’Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR), Lausanne, April 1989. III.17.4.4
- [16] J. Vazquez and M. Dufresne. *Hydraulique à surface libre*. Formation d’ingénieur. Engées edition, 2012. III.15.1, III.15.3, III.15.4, III.15.5, III.17.1, III.17.2, III.17.3, III.17.4.4, H, I, I.2.2
- [17] J. Vazquez and M. Dufresne. *Hydrostatique et hydraulique en charge*. Formation Mastère Eau Potable et Assainissement. Engées edition, 2012. I.1.5, I.2.2