TP3 : Courbes B-splines - Algorithme de DeBoor-Cox

L'objectif de ce TP est d'implémenter l'algorithme de DeBoor-Cox permettant d'évaluer géométriquement une fonction B-Spline.

Le TP est à faire en binôme. Le rendu se fait sous la forme d'un mini rapport à envoyer par mail à `ulysse.vimont@inria.fr`.

B-splines

Tout comme les B-splines sont des courbes permettant d'interpoler des points de manière lisse, comme les coubes de Bézier. Leur avantage sur ces dernières est qu'elles permettent de décoreller le degré de la courbe du nombre de points de contrôle celle-ci.

L'algorithme de De Boor-Cox permet d'évaluer une B-spline récursivement de manière analogue à l'algorithme de De Casteljaud pour les courbes de Bézier.

Soient $n+1$ **points de contrôle** $\mathbf{d_0}, \dots, \mathbf{d_n}$, k le **degré** de la B-spline et une suite croissante de $m = n+k+1$ scalaires $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m$ appelés **noeuds**, la courbe B-spline $S(t)$ est définie par :

$$S(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{d_i} N_i^k(t) \text{ avec } t \in [t_k, t_{n+1}] \tag{1}$$

Les fonction $N_i^k(t)$ sont les fonctions B-splines définies par :

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [t_i, t_{i+1}] \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{2}$$

$$N_i^k(t) = w_{i,k}(t) N_i^{k-1}(t) + \left[1 - w_{i+1,k}(t)\right] N_{i+1}^{k-1}$$

avec

$$w_{i,k}(t) = \begin{cases} \dfrac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} \text{ si } t_i < t_{i+k} \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{3}$$

Algorithme de DeBoor-Cox (1972)

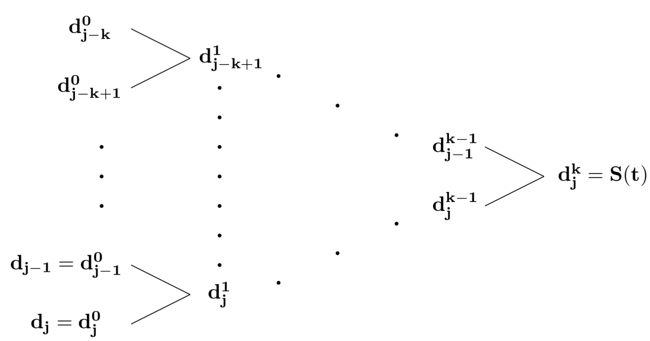


Figure 1: Illustration de l'algorithme de DeBoor-Cox

Etant donnés :

- Le degré k
- Les points de contrôle $\mathbf{d_0}, \dots, \mathbf{d_n}$
- Les noeuds $t_0, \dots, t_m$ avec $m = n+k+1$ et $t_i < t_j \ \forall \ i < j$

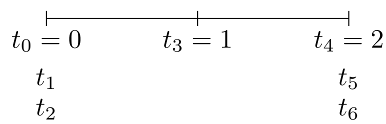
On a $\mathbf{S(t)} = \mathbf{d_j^k}$ pour $t \in [t_j, t_{j+1}[$ pour $k \leq j \leq n$ avec la relation suivante :

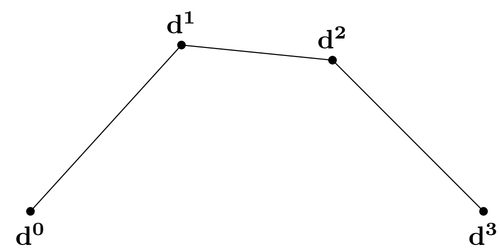
$$\mathbf{d_i^{r+1}} = \underbrace{\left(\frac{t - t_i}{t_{i+k-r} - t_i}\right)}_{w_{i,k-r}(t)} \mathbf{d_i^r} + \underbrace{\left(\frac{t_{i+k-r} - t}{t_{i+k-r} - t_i}\right)}_{1 - w_{i,k-r}(t)} \mathbf{d_{i-1}^r} \tag{4}$$

Une illustration du principe d'évaluation par récurrence est donné en figure 1.

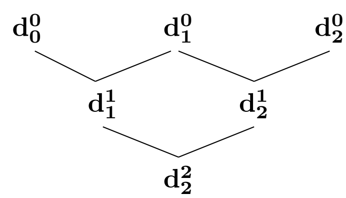
Exemple

- Degré 2
- Points de contrôle : $\mathbf{d_0}, \mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}, \mathbf{d_3}$
- Noeuds : $t_0, \ldots, t_6$





Evaluation en $t = 0.5$



$$\mathbf{d_1^1} = \left(\frac{t - t_1}{t_3 - t_1}\right)\mathbf{d_1^0} + \left(\frac{t_3 - t}{t_3 - t_1}\right)\mathbf{d_0^0} = 0.5\mathbf{d_0} + 0.5\mathbf{d_1}$$

$$\mathbf{d_2^1} = \left(\frac{t - t_2}{t_4 - t_2}\right)\mathbf{d_2^0} + \left(\frac{t_4 - t}{t_4 - t_2}\right)\mathbf{d_1^0} = 0.25\mathbf{d_2} + 0.75\mathbf{d_1}$$

$$\mathbf{d_2^2} = \left(\frac{t - t_2}{t_3 - t_2}\right)\mathbf{d_2^1} + \left(\frac{t_3 - t}{t_3 - t_2}\right)\mathbf{d_1^1} = 0.5\mathbf{d_2^1} + 0.5\mathbf{d_1^1}$$

Travail demandé

1. A partir d'une liste de $n+1$ points de contrôle, d'un degré k et d'une liste de $m+1$ noeuds, générer une courbe B-spline à l'aide de l'algorithme de DeBoor-Cox.
2. Visualiser la courbe, si possible en utilisant une couleur différente pour chacun des segments de courbe.
3. Faites varier les valeurs des noeuds. Qu'observez vous ?
4. Dupliquez un point de contrôle. Qu'observez vous ?
5. Faites varier un point de contrôle. Quelle est la portion de la courbe qui est affectée ?
6. Quel est l'avantage d'une courbe B-spline sur une courbe de Bézier ?

Reference

- www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES/spline/de-Boor.html
- en.wikipedia.org/wiki/De_Boor%27s_algorithm
- cse.taylor.edu/~btoll/s99/424/res/ucdavis/CAGDNotes