TP2 : Courbes de Bézier - Raccord $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$

L'objectif de ce TP est d'interpoler une séquence de points par un raccordement de courbes de Béziers. Dans un premier temps on utilisera un raccord $\mathcal{C}^1$ puis un raccord $\mathcal{C}^2$. Les algorithmes seront implémentés dans le language de votre choix. Le TP est à faire en binôme. Le code et le rapport contenant les images et réponses aux questions sera rendu sous forme d'archive *nom1_nom2.zip*, à envoyer à `ulysse.vimont@inria.fr`.

Introduction

Une séquence de points est une ensemble de points donné dans un ordre particulier.

En reliant les points successifs deux à deux par des segments, on crée un raccordement. Ce raccordement est dit $\mathcal{C}^0$, car la courbe qu'il constitue est continu. En revanche, il n'est pas $\mathcal{C}^1$, car sa dérivée est discontinue.

On peut considérer un segment comme une courbe de Bézier de degré 1. En utilisant des courbes de degré plus élevé, on peut créer des raccords $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$, voire plus. Afin de définir ces courbes de Bésier, il faut rajouter des points entre ceux de la séquence initiale. Pour assurer ces propriétés, il faut que ces nouveaux points entretiennent certains rapports, que ce TP propose d'investiguer.

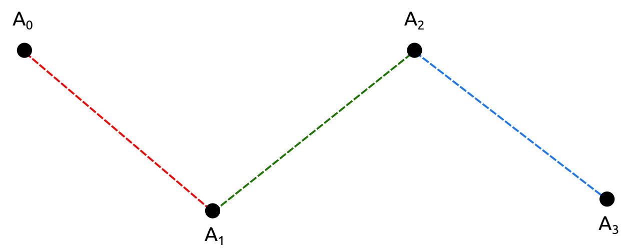

Figure 1: Raccord $\mathcal{C}^0$.

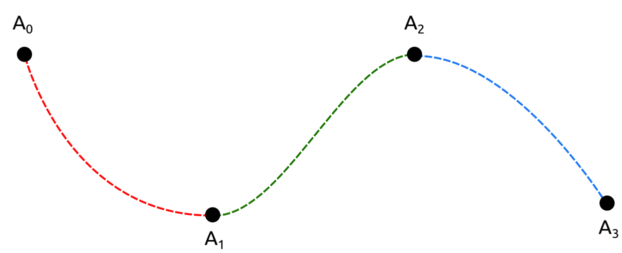

Figure 2: Raccord $\mathcal{C}^1$.

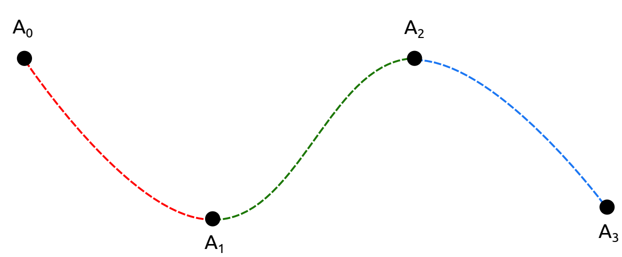

Figure 3: Raccord $\mathcal{C}^2$.

Exercice 1 : Raccord $\mathcal{C}^1$

Soient $N+1$ points notés $A_0, \ldots, A_N$.
On cherche N courbes de Béziers $C^1, \ldots, C^N$ de degré 2 paramétrées pour $t \in [0,1]$ telles que le raccord entre les dérivées premières soit continu i.e $\mathcal{C}^1$:

$$\begin{cases} C^i(0) = A_{i-1} \text{ et } C^i(1) = A_i \ \forall i = 1, \ldots, N \\ \dfrac{dC^i}{dt}(1) = \dfrac{dC^{i+1}}{dt}(0) \ \forall i = 1, \ldots, N-1 \end{cases} \tag{1}$$

On note P_0^i, P_1^i, P_2^i les trois points de contrôle de la courbe C^i. On déduit des équations (1) la position des points de contrôles :

$$\begin{cases} P_0^i = A_{i-1} \text{ et } P_2^i = A_i \ \forall i = 1, \ldots, N \\ 2(P_2^i - P_1^i) = 2(P_1^{i+1} - P_0^{i+1}) \ \forall i = 1, \ldots, N-1 \\ \Leftrightarrow P_1^{i+1} - P_0^{i+1} = P_2^i - P_1^i \end{cases} \tag{2}$$

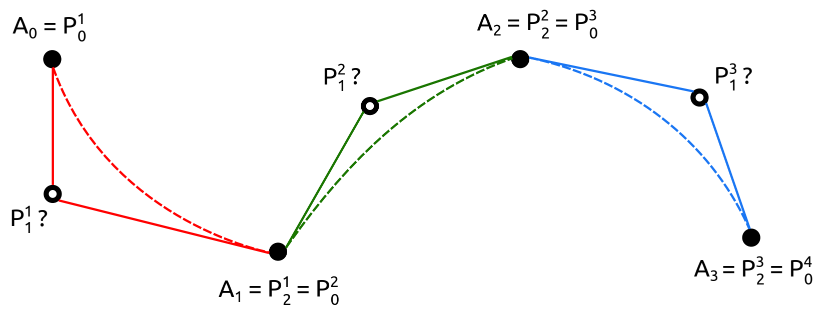

Figure 4: Avoir un raccord $\mathcal{C}^1$ revient à savoir placer les P_1^i correctement.

Travail demandé :

1. A partir d'une liste de $N+1$ points A_i, générer N courbes de Bézier avec un raccord C^1.
2. Visualiser l'ensemble des points de contrôles.
3. Visualiser la courbe complète ainsi que les polygones de contrôle de chacune des courbes (d'une couleur différente si possible).
4. Proposer deux solutions pour améliorer le résultat. (Inspirer vous des logiciels d'édition vectoriel e.g *Inkscape*).

Note : Il vous faudra imposer P_1^1. Y a t-il un choix judicieux ? Pourquoi ?

Exercice 2 : Raccord $\mathcal{C}^2$

Cette fois ci on cherche N courbes de Béziers $C^1, \ldots, C^N$ de degré 3 paramétrés pour $t \in [0,1]$ telles que le raccord entre les dérivées secondes soit continu i.e $\mathcal{C}^2$.

$$\begin{cases} C^i(0) = A_{i-1} \text{ et } C^i(1) = A_i \ \forall i = 1, \ldots, N \\ \dfrac{dC^i}{dt}(1) = \dfrac{dC^{i+1}}{dt}(0) \ \forall i = 1, \ldots, N-1 \\ \dfrac{d^2C^i}{dt^2}(1) = \dfrac{d^2C^{i+1}}{dt^2}(0) \ \forall i = 1, \ldots, N-1 \end{cases} \tag{3}$$

On note $P_0^i, P_1^i, P_2^i, P_3^i$ les quatre points de contrôle de la courbe C^i. On déduit des équations (3) la position des points de contrôles :

$$\begin{cases} P_0^i = A_{i-1} \text{ et } P_3^i = A_i \ \forall i = 1, \ldots, N \\ 3(P_3^i - P_2^i) = 3(P_1^{i+1} - P_0^{i+1}) \ \forall i = 1, \ldots, N-1 \\ 6(P_3^i - 2P_2^i + P_1^i) = 6(P_2^{i+1} - 2P_1^{i+1} + P_0^{i+1}) \ \forall i = 1, \ldots, N-1 \end{cases} \tag{4}$$

Après résolution on obtient :

$$\begin{cases} P_0^i = A_{i-1} \text{ et } P_3^i = A_i \ \forall i = 1, \ldots, N \\ P_1^{i+1} - P_0^{i+1} = P_3^i - P_2^i \ \forall i = 1, \ldots, N-1 \\ P_1^i - P_2^{i+1} = 2(P_2^i - P_1^{i+1}) \ \forall i = 1, \ldots, N-1 \end{cases} \tag{5}$$

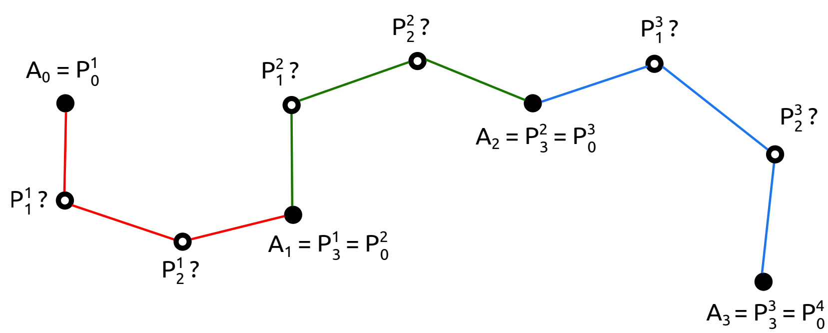

Figure 5: Avoir un raccord $\mathcal{C}^2$ revient à savoir placer les P_1^i, P_2^i correctement.

Travail demandé :

1. A partir d'une liste de $N+1$ points A_i, générer N courbes de Bézier avec un raccord C^2.
2. Visualiser l'ensemble des points de contrôles.
3. Visualiser la courbe complète ainsi que les polygones de contrôle de chacune des courbes (d'une couleur différente si possible).

Note : De nouveau, il vous faudra imposer P_1^1, P_2^1. Y a t-il un choix judicieux ? Pourquoi ?