TP7 : Surface produit tensoriel - Surface B-splines

L'objectif de ce TP est d'implémenter une méthode permettant la construction de surfaces de B-splines.

Le TP est à faire en binôme. Le rendu se fait sous la forme d'un mini rapport à envoyer par mail à `ulysse.vimont@inria.fr`.

Surface produit tensoriel de B-splines

Formulation

De même que pour les surfaces de Bézier, on réutilise maximum ce qui est connu pour les courbes B-Splines.

Courbes :

- polygone de controle : d_i, $i \in \{0, ..., m\}$
- degré : k
- vecteur de noeuds : $t_0, \dots, t_{m+k+1}$

Surfaces :

- polyhèdre de controle : $d_{i,j}$, $i \in \{0, ..., m\}$, $j \in \{0, ..., n\}$
- degré : $k \times l$
- vecteurs de noeuds : $u_0, \dots, u_{m+k+1}$ et $v_0, \dots, v_{m+l+1}$
- polygone de controle : d_i, $i \in 0, ..., m$, degré et $t_0, \dots, t_{m+k+1}$.
- degré : k
- vecteur de noeuds : $t_0, \dots, t_{m+k+1}$.

Les surfaces B-splines sont évaluées en $(u, v) \in [u_{i_0}, u_{i_0+1}] \times [v_{j_0}, v_{j_0+1}]$ par le produit tensoriel ci-dessous.

$$S(u, v) = \sum_{i=i_0-k}^{i_0} \sum_{j=j_0-l}^{j_0} d_{ij} N_i^k(u) N_j^l(v) \tag{1}$$

Evaluation de surface de B-splines

Tout comme pour les surfaces de Bézier, on peut évaluer les surfaces de B-Splines en fixant

$$S(u, v) = \sum_{j=j_0-l}^{j_0} N_j^l(v) \underbrace{\left[\sum_{i=i_0-k}^{i_0} d_{ij} N_i^k(u) \right]}_{=d_j(u)} \tag{2}$$

$d_j(u)$ défini une courbe B-spline en u que l'on peut évaluer par DeBoor-Cox.

$$S(u, v) = \sum_{j=j_0-k}^{j_0} d_j(u) N_j^l(v) \tag{3}$$

L'équation (3) définit une courbe B-spline en v dont les points de contrôle $d_j(u)$ dépendent de u. Au final il y aura :

$$\begin{cases} l+1 \text{ évaluation de DeBoor-Cox de degré } k \\ \\ 1 \text{ évaluation de DeBoor-Cox de degré } l \end{cases}$$

Travail demandé

1. Reprenez votre travail sur les courbes B-Splines pour l'adapter aux surfaces.
2. Implémentez une fonction calculant une surface B-Splines de degré $k \times k$ pour un polygone de contrôle $b_{i,j}$ que vous fixerez.
3. Visualiser la surface à l'aide de gnuplot.
4. Tout comme nous avions fait des courbes fermées avec des B-Splines, on peut faire des surfaces fermées avec un modulo sur les indices. Fabriquez des surfaces B-Splines fermées.
5. De même, testez la duplication de noeuds.

Données

Vous pouvez tester votre algorithme sur les données que vous souhaitez. Cependant, veuillez également testez votre algorithme sur les données suivantes (afin d'uniformiser vos résultats pour la correction) :

Polygone de contrôle :

0, 0, 0	2, 0, 0	5, 0, 0	7, 0, 0	10, 0, 0	12, 0, 0
0, 2, 0	2, 2, 1	5, 2, 2	7, 2, 3	10, 2, 1	12, 2, 0
0, 5, 0	2, 5, 1	5, 5, 2	7, 5, 3	10, 5, 1	12, 5, 0
0, 7, 0	2, 7, -1	5, 7, -2	7, 7, -3	10, 7, -1	12, 7, 0
0, 10, 0	2, 10, -1	5, 10, -2	7, 10, -3	10, 10, -1	12, 10, 0
0, 12, 0	2, 12, 0	5, 12, 0	7, 12, 0	10, 12, 0	12, 12, 0

Ordre (en u et en v) : 3

Vecteur de noeuds (en u et v) : `0 0 0 1 2 3 4 4 4`

Résultat

Vous devriez obtenir la surface suivante :