TP6 : Surface produit tensoriel - Surface de Bézier

L'objectif de ce TP est d'implémenter une méthode permettant la construction de surfaces de Bézier.

Le TP est à faire en binôme. Le rendu se fait sous la forme d'un mini rapport à envoyer par mail à `ulysse.vimont@inria.fr`.

Surface produit tensoriel de Bézier

On peut définir une surface à partir de deux courbes, comme par exemple un tore à partir d'un cercle et d'une droite. On parle alors de surface fibrée, ou surface produit tensoriel. Cela revient à décoréller l'influence de chaque paramètre de la surface.

On peut également utiliser deux familles de courbes, c'est ce qu'on fait avec les surfaces de Bézier.

Formulation

L'idée est de réutiliser au maximum les courbes de Bézier. Plutôt que de considérer un polygone de contrôle (b_i), on considère un polyèdres de contrôle (b_{ij}) composé de $m \times n$ points de contrôle agencés dans une grille.

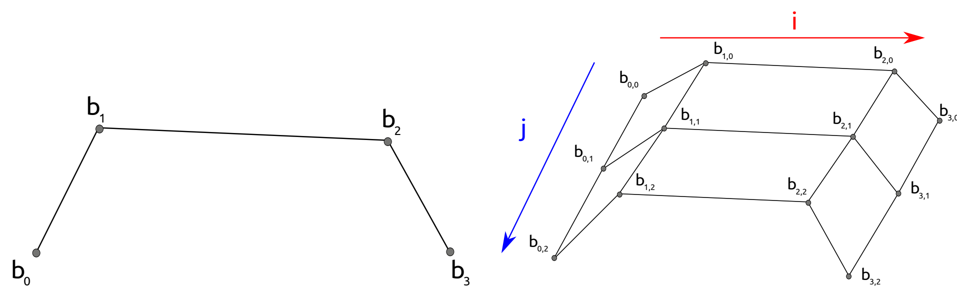

Figure 1: A gauche un polygone de contrôle et à droite un polyèdre de contrôle.

Les surfaces de Bézier sont décrites par le produit tensoriel ci-dessous.

$$B(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} b_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v) \tag{1}$$

où m est le degré en u et n est le degré en v et B_l^k les polynômes de Bernstein, et $(u,v) \in [0,1]^2$.

Utilisation

Généralement les surfaces de Bézier sont utilisées sous la forme de réseaux de **patch** bi-cubique (i.e $m = n = 3$) ou bi-quadratiques (i.e $m = n = 2$).

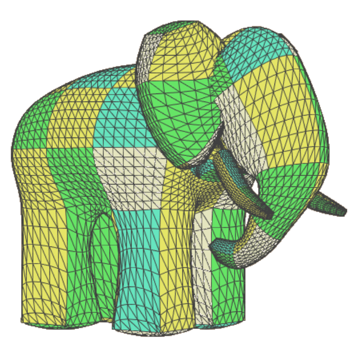

Figure 2: "Gumbo" modèle formé de patch bi-cubiques et créé par Edwin Catmull.

Évaluation de surface de Bézier

On a deux algorithmes géométrique pour évaluer cette surface de Bézier.

Évaluation 1

On fixe d'abord j et on fait varier i.

$$B(u,v) = \sum_{j=0}^{n} B_j^n(v) \underbrace{\left[\sum_{i=0}^{m} b_{ij} B_i^m(u)\right]}_{=b_j(u)} \tag{2}$$

$b_j(u)$ défini une courbe de Bézier en u que l'on peut évaluer par De Casteljau.

$$B(u,v) = \sum_{j=0}^{n} b_j(u) B_j^n(v) \tag{3}$$

L'équation (3) définit une courbe de Bézier en v dont les points de contrôle $b_j(u)$ dépendent de u. Au final il y aura :

$$\begin{cases} n+1 \text{ évaluation de De Casteljau pour le degré } m \\ 1 \text{ évaluation de De Casteljau pour le degré } n \end{cases}$$

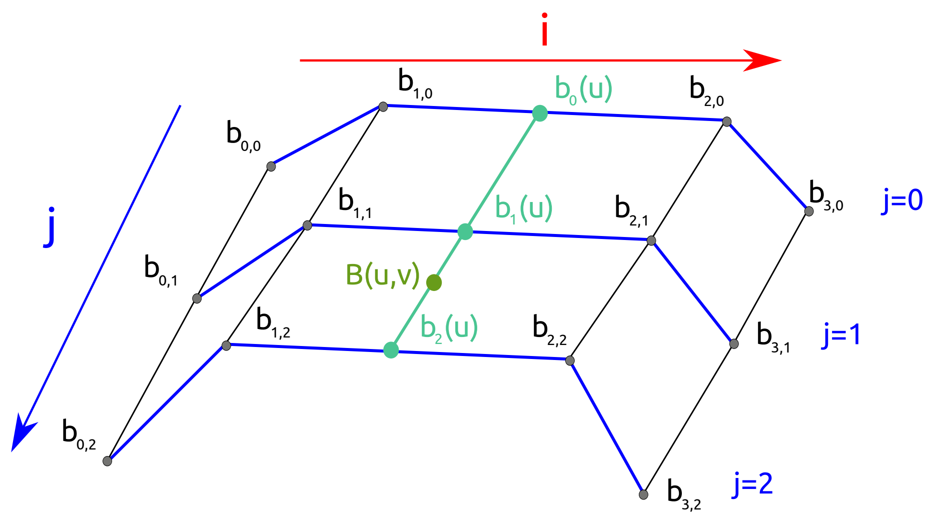

Figure 3: Illustration de l'algorithme pour évaluer $B(u,v)$

Évaluation 2

Le second algorithme consiste tout simplement à d'abord fixer i et faire varier j.

Travail demandé

1. Reprennez votre travail sur les courbes de Bézier pour l'adapter à des courbes de vecteurs 3D.
2. Implémentez une fonction calculant une surface de Bézier de degré $m \times n$ pour un polygone de contrôle $b_{i,j}$ que vous fixerez.
3. Visualiser la surface à l'aide de gnuplot.
4. Comparez les deux méthodes d'évaluation.

Visualisation de surface avec gnuplot

Pour visualiser une surface avec gnuplot, il faut la décrire dans un fichier sous la forme d'un ensemble de points, comme ceci :

x_{00} y_{00} z_{00}
x_{01} y_{01} z_{02}
x_{02} y_{01} z_{02}

x_{10} y_{10} z_{10}
x_{11} y_{11} z_{12}
x_{12} y_{11} z_{12}

x_{20} y_{20} z_{20}
x_{21} y_{21} z_{22}
x_{22} y_{21} z_{22}

Ensuite, dans gnuplot, appelez la commande suivante :

```
splot 'surface.txt' using 1:2:3 with pm3
```

où `surface.txt` est le nom du fichier dans lequel votre surface est décrit.

Pour exporter directement l'image, vous pouvez exécuter le script suivant :

```
#!/bin/sh
gnuplot << EOF
set terminal postscript eps size 3.5,2.62 enhanced color font 'Helvetica,20' linewidth 2
set output 'render.eps'
splot 'surface.txt' using 1:2:3 with pm3d
EOF
```