

# Modélisation surfacique

## Partie II : Maillages

Ulysse Vimont

Inria, Équipe Imagine

2014-2015

- 1 Introduction
- 2 Notions de topologie discrète
- 3 Justification d'utilisation
- 4 Opérations sur les maillages
- 5 Structures de données
- 6 Formats de stockages
- 7 Bilan

## 1 Introduction

- Définition : Maillage
- Caractéristiques des faces
- Faces n-algulaires
- Ratios des nombres de primitives
- Tetrahèdres et polyhèdres
- Interpolation de caractéristiques
- Orientation

## 2 Notions de topologie discrète

## 3 Justification d'utilisation

## 4 Opérations sur les maillages

## 5 Structures de données

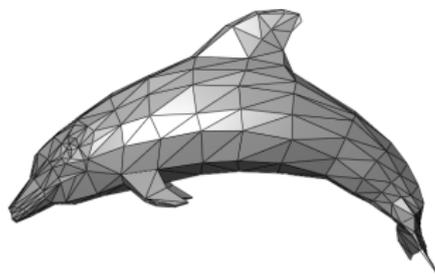
# Définition

## Maillage polygonal :

Collection de sommets, d'arêtes, et de faces définissant la forme d'un objet polyédral.

(Wikipedia)

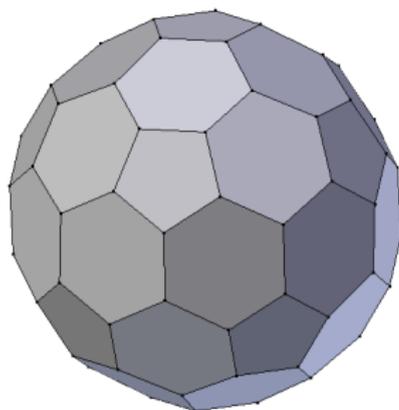
- structure surfacique discrète
- géométrie discrète
- graphe, hypergraphe



# Triangles, quadrangles, et polygones

Dans le cas général, le maillage est formé de n-gones.

- problème : coplanarité
- triangulation



# Ratios des nombres de primitives

En général, on utilise des maillages triangulaire ou quadrangulaires.

- triangle : pas de problème de triangulation
- quad : choix arbitraire de la diagonale



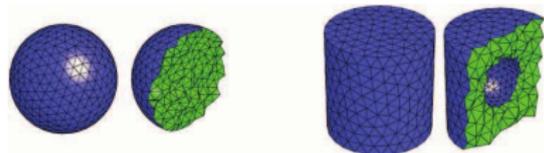
## Exercice

Trouver les proportions optimales de sommets/arêtes/faces dans une tessellation triangulaire.

# Tetraèdres et polyhèdres

On peut imaginer des maillages contenant des polyhèdres (hyperfaces).

- utile pour le calcul des structures
- extension naturelle en dimensions

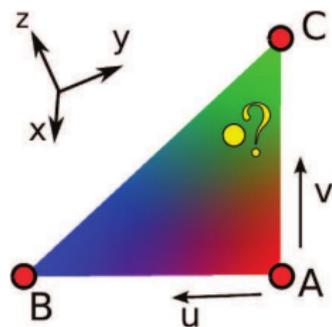


# Interpolation de caractéristiques

Retour aux faces polygonales (triangle et quad).

Une face possède diverse caractéristiques :

- une couleur
- une normale
- une coordonnée de texture
- éventuellement un paramètre scalaire (température, ...)



# Interpolation de caractéristiques

Pour définir chacun de ces paramètres en chaque point du triangle :

- interpolation bilinéaire

$$\vec{AP} = u\vec{AB} + v\vec{AC}, (u, v \in [0, 1])$$

- coordonnées barycentriques

$$P = wA + uB + vC, (u, v, w \in [0, 1])$$

Remarques :

- équivalence des approches (normalization)
- identification des poids barycentriques avec les portions d'aires
- extension à l'extrapolation
- ray-tracing et coordonnées

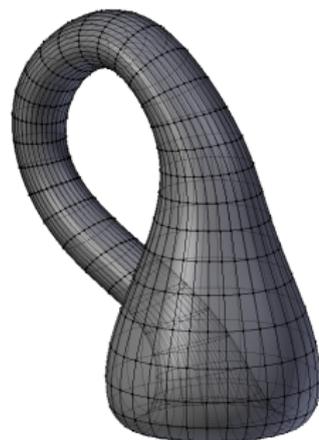
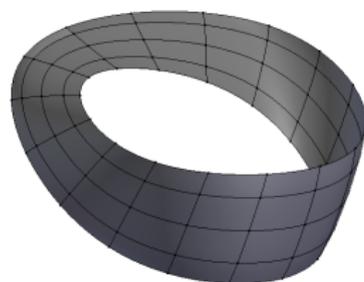
# Orientation

Les faces possèdent une caractéristique particulière : *l'orientation*.

- équivalent au sens de la normale
- utilisé pour le rendu (culling)
- utilisé pour définir l'intérieur et l'extérieur de l'objet

On peut souvent définir une même orientation pour tout le maillage, *mais pas toujours!*

Voir ci-contre.



## 1 Introduction

## 2 Notions de topologie discrète

- Adjacence et incidence
- Distance
- Voisinage
- Valence
- Qualité d'un maillage
- Variété

## 3 Justification d'utilisation

## 4 Opérations sur les maillages

## 5 Structures de données

## 6 Formats de stockages

## Définition

Deux éléments de même dimension  $N$  d'un maillages sont adjacents si ils partagent un élément de dimension  $N - 1$  ou  $N + 1$ .

Peuvent être adjacents :

- deux sommets
- deux arêtes
- deux faces
- ...

# Incidence

## Définition

Deux éléments d'un maillages sont incidents si il existe un point de l'espace appartenant aux deux.

Peuvent être incidents :

- deux triangles
- un triangle et une arête
- deux sommets

Notion ensembliste :

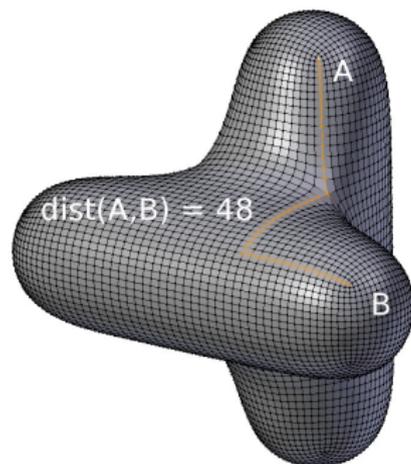
$$\exists p \in \mathbb{R}^3 \mid p \in F_1, p \in F_2$$

# Distance

## Définition

Nombre d'arêtes composant le plus court chemin entre deux sommets de la surface.

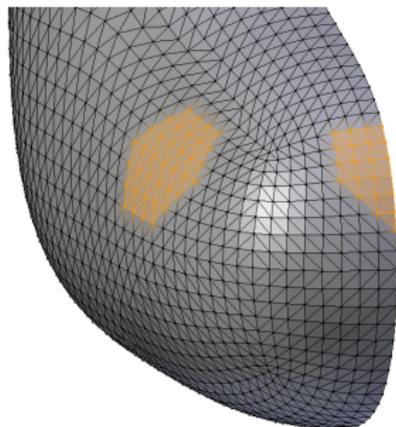
- non unicité du chemin
- indépendant de l'échelle
- attribut topologique
- entier



## Définition

Pour un sommet  $A$ , ensemble des sommets étant à une distance inférieure à un  $N$  donné.

- notion de ring
- utilisation pour le calcul du plan tangent
- définition de la normale



# Valence

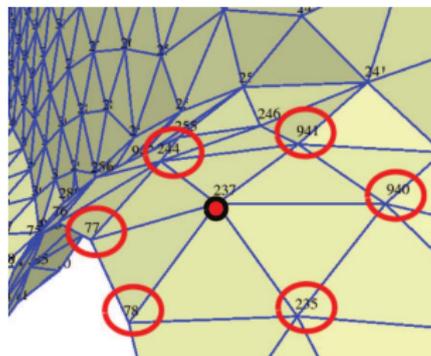
## Définition

Pour un point donné, nombre d'arêtes incidentes à ce point.

## Définition équivalente

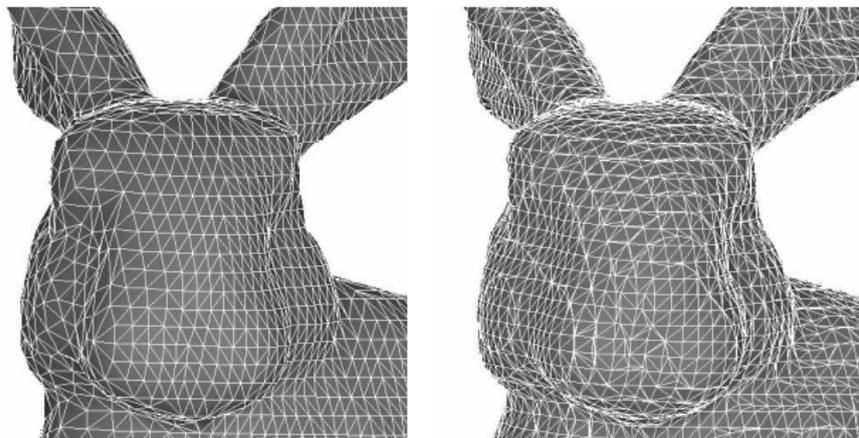
Pour un point donné, nombre de 1-voisins de ce point.

- on parle également de degré



# Qualité

- notion qualitative
- associé à la régularité des faces (forme, connectivité)
- associé à l'uniformité de la distribution des valences
- utile pour le calcul des structures
- utile pour la paramétrisation



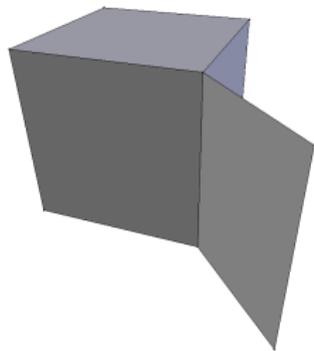
Marching triangle, Hilton et al.

# Variété

## Définition

Un maillage est une variété si le 1-voisinage de chaque sommet forme une unique chaîne, fermée ou non.

- critère de régularité topologique (et non géométrique)
- lien avec la notion continue de variété différentielle
- séparation locale intérieur/extérieur
- variété simpliciale
- extension : complexe simplicial



Ceci n'est pas une variété.

- 1 Introduction
- 2 Notions de topologie discrète
- 3 Justification d'utilisation**
  - Rendu
  - Approximation linéaire
- 4 Opérations sur les maillages
- 5 Structures de données
- 6 Formats de stockages
- 7 Bilan

# Rasterisation

## Définition

Conversion de données vectorielles (vector image) vers un bitmap (raster image).

- utilise la géométrie projective
- utilise le tracé de ligne de Bresenham
- exécutable en chaîne sur une carte graphique
- extrêmement rapide
- utilisation pour la visualisation en temps réel



# Syntaxe OpenGL : mode immédiat

```
glBegin(GL_TRIANGLES);  
  
for(k_tri=0;k_tri<N_tri;k_tri++)  
  for(k_vertex=0;k_vertex<3;k_vertex++)  
    for(k_dim=0;k_dim<3;k_dim++)  
      {  
        x[k_dim] = vertex[3*connectivity[3*k_tri+k_vertex]+k_dim];  
        n[k_dim] = normal[3*connectivity[3*k_tri+k_vertex]+k_dim];  
        glNormal3d(n[0],n[1],n[2]);  
        glVertex3d(x[0],x[1],x[2]);  
      }  
  
glEnd();
```

## Syntaxe OpenGL : vertex array

```
glEnableClientState(GL_VERTEX_ARRAY);  
glVertexPointer(3, GL_DOUBLE, 0, &vertex[0]);
```

```
glEnableClientState(GL_NORMAL_ARRAY);  
glNormalPointer(GL_DOUBLE, 0, &normal[0]);
```

```
glDrawElements(GL_TRIANGLES,  
              3*N_tri,  
              GL_UNSIGNED_INT,  
              &connectivity[0]);
```

```
glDisableClientState(GL_VERTEX_ARRAY);  
glDisableClientState(GL_NORMAL_ARRAY);
```

## Approximation linéaire

Approximation linéaire = interpolation linéaire de valeur (ie. de position)  
Soit une forme 1D  $F$  définie par la fonction :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$$

On considère sa décomposition polynomiale :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2} + \dots$$

On échantillonne linéairement  $f$  par  $g$  avec un pas  $H$  :

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \|x - x_0\| < H$$

$$\|f(x) - g(x)\| < K \cdot \frac{f''(x_0)}{2} \cdot H^2$$

- $f''(x_0)$  est assimilable à la courbure de  $F$
- lorsqu'on divise le pas par deux, on diminue par quatre l'erreur d'approximation

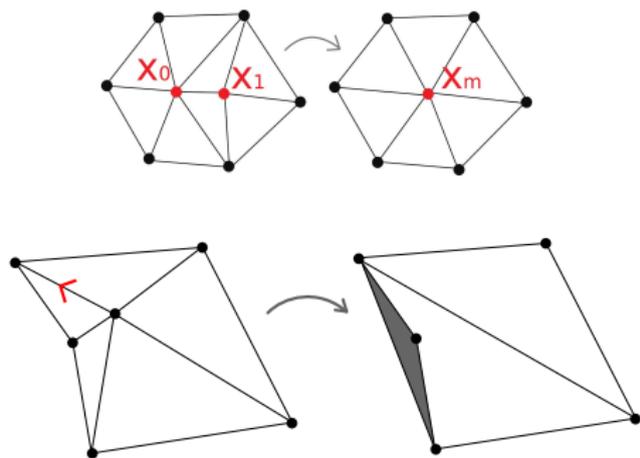
- 1 Introduction
- 2 Notions de topologie discrète
- 3 Justification d'utilisation
- 4 Opérations sur les maillages**
  - Opérations locales
  - Opérations globales
- 5 Structures de données
- 6 Formats de stockages
- 7 Bilan

# Effondrement d'arête

## Définition

Opération consistant à fusionner deux sommets adjacents.

- valable pour un maillage triangulaire
- autrement appelé "edge collapse"
- bilan :  $t-2$ ,  $e-3$ ,  $s-1$
- perte d'information

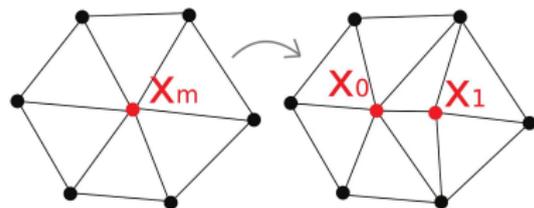


# Division de sommet

## Définition

Opération inverse de l'effondrement.

- autrement appelé "vertex split"
- bilan :  $t+2$ ,  $e+3$ ,  $s+1$
- création d'information ?

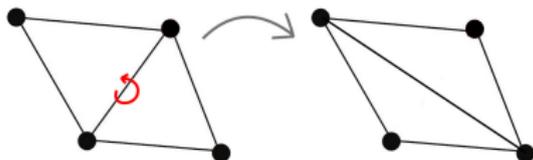


# Basculement d'arête

## Définition

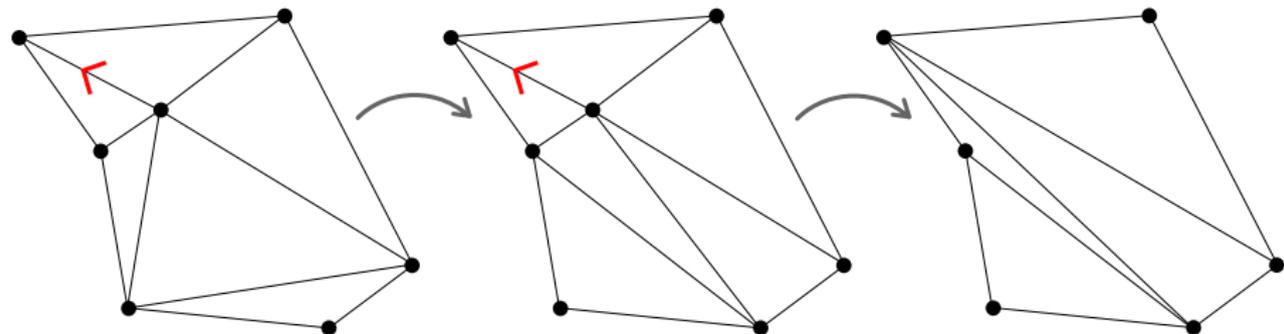
Étant donné deux triangles adjacents, formant un quadrilatère *convexe*.  
Opération consistant à inverser la diagonale de celui-ci.

- autrement appelé "edge flip"
- bilan : topologie inchangée



# Basculement pré-effondrement

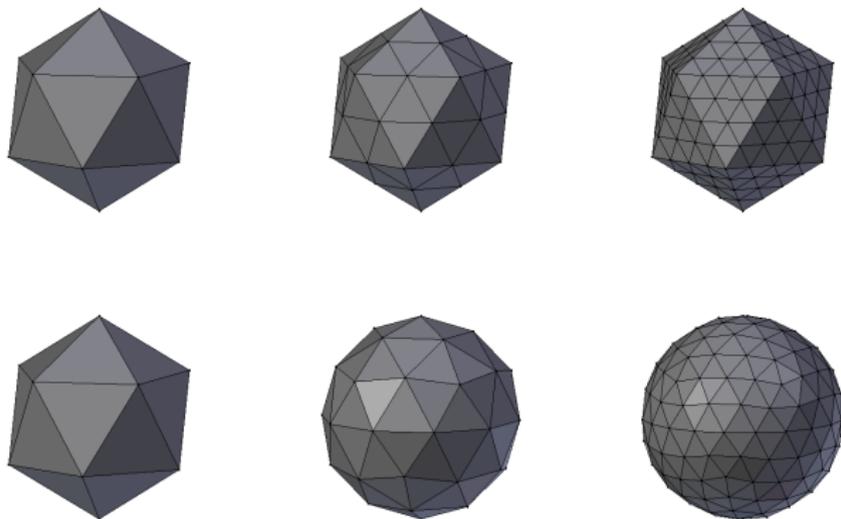
Lorsqu'une arête n'est pas contractable, on peut procéder à des basculements locaux pour changer la situation.



# Subdivision

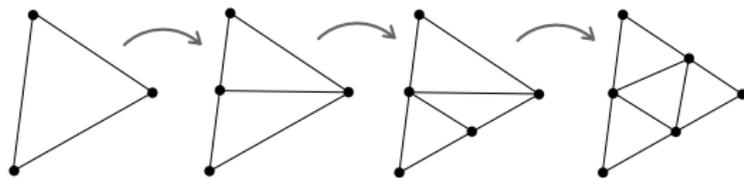
## Définition

Opération consistant à augmenter la résolution d'un maillage.



# Subdivision

- On peut décomposer la subdivision en opérations élémentaires :



- bilan:

- ▶ avant :  $t = 1$ ,  $e = 3/2$ ,  $v = 1/2$
- ▶ après :  $t = 4$ ,  $e = 6$ ,  $v = 1$
- ▶ soit :  $t^* = 4$ ,  $e^* = 4$ ,  $v^* = 2$

- Différent des surfaces de subdivision : on ne cherche pas à augmenter la contrôlabilité d'un important volume de données.
- Sur-échantillonnage de la surface représentée.
- Subdivision locale.

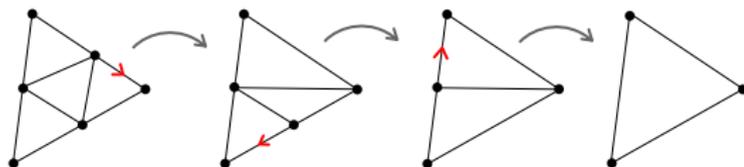
*Démo Blender*

# Simplification

## Définition

Opération consistant à réduire la résolution d'un maillage.

- Opération inverse de la subdivision
- On peut décomposer la simplification en opérations élémentaires :

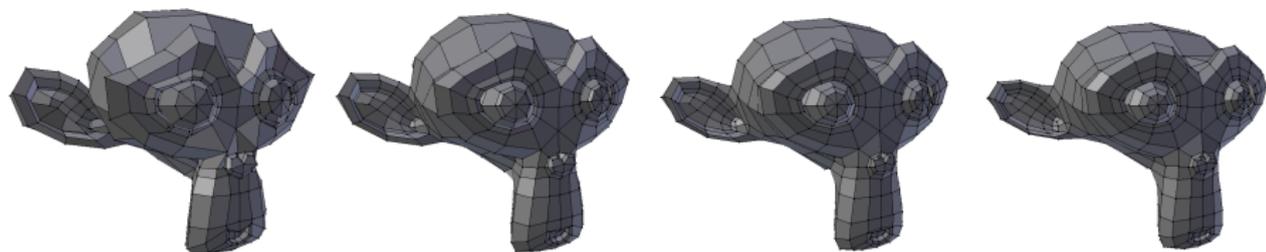


- Critère d'arrêt ? effondrement jusqu'à réduction de moitié du nombre de vertex.
- Critère de sélection de l'arête à effondrer ?
- subdivision + simplification = identité ?

# Lissage

## Définitions

Opération consistant en l'homogénéisation des différents attributs locaux d'un maillage (longueurs des arêtes, aires des triangles).



- Adaptabilité des méthodes de signal ?
- Analogie : lissage d'un nuage de points du plan.
- Différents types de lissages :
  - ▶ laplacien
  - ▶ taubin
  - ▶ SVD
  - ▶ optimisation d'une fonction d'irrégularité

# Remaillage

## Définitions

Opération consistant à recréer un maillage représentant le même objet.

**Objectifs** : Augmenter la qualité du maillage sans (trop) modifier le contenu, modifier le pas d'échantillonnage.

Exemple :

- 1 on dispose d'un maillage
- 2 on le transforme en nuage de points (destruction de la connectivité)
- 3 puis en fonction implicite (reconstruction, RBF par ex.)
- 4 et à nouveau en maillage en maillage (marching cube par ex.)

Non conservation de la topologie.

*démo Blender*

- 1 Introduction
- 2 Notions de topologie discrète
- 3 Justification d'utilisation
- 4 Opérations sur les maillages
- 5 Structures de données**
  - Soupe de triangles
  - Pourquoi plusieurs structures ?
  - Winged-edge
  - Half-edge
  - Carte combinatoire
  - Spécifique
- 6 Formats de stockages

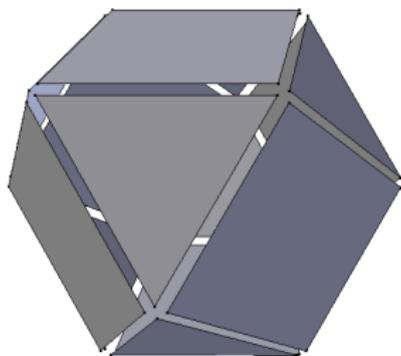
# Soupe de triangles

## Principe

Le maillage est décrit par deux listes :

- une liste de points précisant la position des sommets
- une liste de n-uplets d'indices de sommets représentant des n-gones

- La première liste est dite "géométrie", la seconde "connectivité".
- Équivalence point et sommet
- pas d'information sur les arêtes
- pas d'information sur les voisins des sommets et des faces
- pas de contrainte sur le type de faces ou de surfaces
- pas de lien depuis les sommets vers les faces



# Intuition

Obtenir la liste des voisins d'un sommet peut coûter cher.

On peut faciliter l'accès aux données de voisinage en créant par exemple :

- une liste sommet  $\rightarrow$  sommet
- une liste sommet  $\rightarrow$  triangles
- une liste sommet  $\rightarrow$  arêtes
- une liste arête  $\rightarrow$  sommets
- une liste arête  $\rightarrow$  faces
- une liste face  $\rightarrow$  arête

## Pourquoi plusieurs structures ?

- les différentes manipulations que nous avons vu nécessitent un accès rapide à diverses informations de voisinage
- on ne peut encoder tout les voisins de tout les éléments
- il peut être lourd de maintenir un structure avec beaucoup de redondance

On fait donc un compromis entre :

- le temps d'accès à l'information
- le volume de données à stocker
- la tractabilité du système

Il faut aussi prendre en compte le fait que certaines structures imposent des limitations sur ce qu'elles représentent (variété, orientabilité).

*Résultat* : on se retrouve souvent avec des soupes de triangles... mais pas toujours ! Par exemple :

- moka (carte combinatoire)
- CGAL, OpenMesh (half-edge)

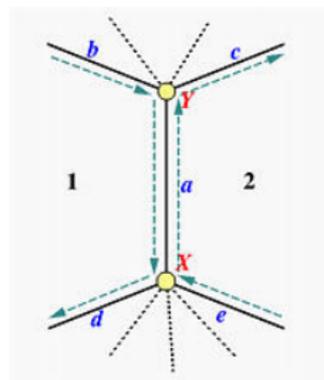
# Winged-edge

## Principe

Chaque arête contient la référence de :

- deux sommets (début et fin)
- deux faces (droites et gauche)
- quatre arêtes (parcours normal et inverse, prédécesseur et successeur)

- pas d'information sur les faces
- décrit une variété (une arête est toujours partagée par deux faces)
- on peut se passer des références vers les faces (détection de cycles)



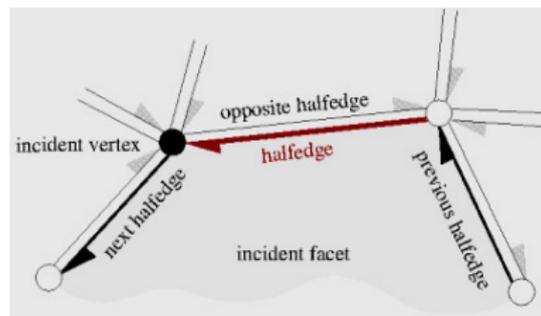
[www.cs.mtu.edu](http://www.cs.mtu.edu)

# Half-edge

## Principe

Chaque demi-arête stocke une référence vers :

- un sommet
  - une face
  - trois autres demi-arêtes :
    - ▶ précédent (dans la face)
    - ▶ suivant (dans la face)
    - ▶ opposée (sur l'arête)
- 
- plus compacte que le winged-edge
  - contient les mêmes informations (qu'on retrouve grâce à la demi-arête opposée)



www.cgal.org

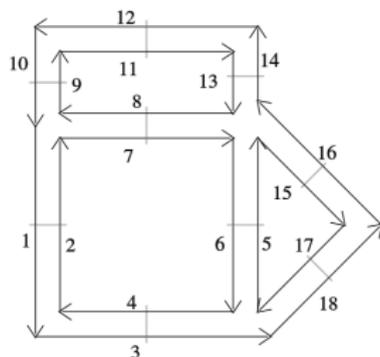
# Carte combinatoire

## Principe

Une carte combinatoire ND est définie par le N-uplet  $M = (D, \{\beta_i\}_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket})$  où :

- $D$  est un ensemble de brins (contenant un point)
- $\beta_1$  est une permutation sur  $D$
- $\forall i > 1, \beta_i$  est une involution sur  $D$
- $\forall i, j, 1 \leq i < i + 2 \leq j < n, \beta_i \circ \beta_j$  est une involution sur  $D$

- extension des half-edge en dimension finie quelconque
- représente un espace ND fermé
- limité aux surfaces orientable
- extension aux surfaces non orientables : cartes généralisées



# Spécifique

Il existe d'autres structures de représentation :

- quad edge
- liste de face doublement chaînée
- liste d'arête doublement chaînée

Toutes ces structures visent à rendre accessible l'information dont on a besoin en général (voisinage).

Il est tout à fait possible de créer sa propre structure facilitant l'accès à des informations spécifiques.

- 1 Introduction
- 2 Notions de topologie discrète
- 3 Justification d'utilisation
- 4 Opérations sur les maillages
- 5 Structures de données
- 6 Formats de stockages**
  - XML
  - OFF
  - OBJ (Wavefront)
  - Autres
- 7 Bilan

- Tout est représentable en XML (car c'est un format extensible).
- Cependant ce n'est pas très économique en place.
- Du coup personne ne l'utilise.

# OFF

## Spécification :

- entête : *OFF*
  - [*nombre de sommets*] [*nombre de faces*] [*nombre d'arêtes*]
  - liste de points [*x y z*]
  - liste de faces [*nombre de sommets*] [*n<sub>0</sub> n<sub>1</sub> ... n<sub>i</sub>*]
- 
- seconde ligne : spéciale allocation dynamique
  - basique : pas de normales, pas de coordonnées de texture

# OBJ

## Spécification (partielle) :

- liste de points [**v** x y z] (v pour vertex)
  - liste de coordonnées de texture [**vt** u v] (*facultatif*)
  - liste de normales [**vn** x y z] (*facultatif*)
  - liste de points [**f** v<sub>0</sub>/vt<sub>0</sub>/vn<sub>0</sub> v<sub>1</sub>/vt<sub>1</sub>/vn<sub>1</sub> ... v<sub>i</sub>/vt<sub>i</sub>/vn<sub>i</sub>] (ou simplement [**f** v<sub>0</sub> v<sub>1</sub> ... v<sub>i</sub>])
- 
- commentaires [**#** *commentaire*]
  - nom d'objet [**o** *nom de l'objet*]
  - groupe d'objets [**g** *nom du groupe*]
  - ombrage doux [**s** *on ou off*]
  - lien avec un fichier de matériau [**mtllib** *nom du fichier*], puis [**usemtl** *nom du matériau*] avant la déclaration des faces

Il existe de nombreux autres formats, par exemple :

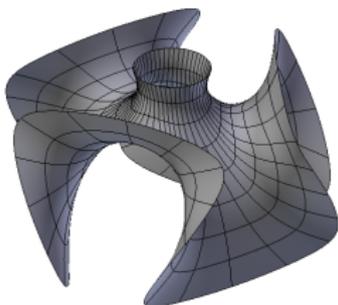
- PLY (Stanford) : extension de OBJ
- STL (stereolithographie) : similaire à OBJ

Tous implémentent une soupe de triangle, avec diverses variations ou options. Certains offrent un mode binaire plus compact.

- Pour des raisons de compacité.
- Pré-conversion vers une autre structure si besoin

## Bilan :

- Les maillages servent à représenter les surfaces affines par morceau
- Ils servent souvent d'approximation pour des surfaces quelconques
- Ils sont représentables par différentes structures et différents formats de fichiers
- À tester dans vos projets !



Fin !