

Modélisation surfacique

Partie II : Maillages

Ulysse Vimont

Inria, Équipe Imagine

2013-2014

- 1 Introduction
- 2 Notions de topologie discrète
- 3 Justification d'utilisation
- 4 Opérations sur les maillages
- 5 Structures de données
- 6 Formats de stockages

1 Introduction

- Définition : Maillage
- Caractéristiques des faces
- Faces n-algulaires
- Ratios des nombres de primitives
- Tetrahèdres et polyhèdres
- Interpolation de caractéristiques
- Orientation

2 Notions de topologie discrète

3 Justification d'utilisation

4 Opérations sur les maillages

5 Structures de données

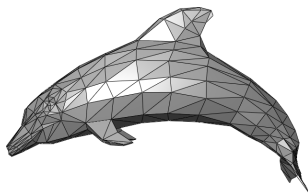
Définition

Maillage polygonal :

Collection de sommets, d'arêtes, et de faces définissant la forme d'un objet polyédral.

(Wikipedia)

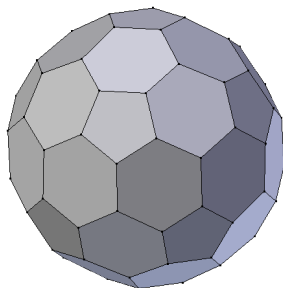
- structure surfacique discrète
- géométrie discrète
- graphe, hypergraphe



Triangles, quadrangles, et polygones

Dans le cas général, le maillage est formé de n-gones.

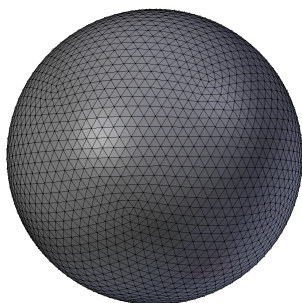
- problème : coplanarité
- triangulation



Ratios des nombres de primitives

En général, on utilise des maillages triangulaire ou quadrangulaires.

- triangle : pas de problème de triangulation
- quad : choix arbitraire de la diagonale



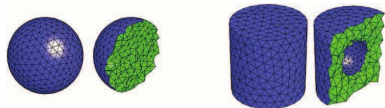
Exercice

Trouver les proportions optimales de sommets/arêtes/faces dans une tessellation triangulaire.

Tetraèdres et polyhèdres

On peut imaginer des maillages contenant des polyhèdres (hyperfaces).

- utile pour le calcul des structures
- extension naturelle en dimensions

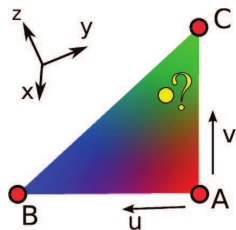


Interpolation de caractéristiques

Retour aux faces polygonales (triangle et quad).

Une face possède diverse caractéristiques :

- une couleur
- une normale
- une coordonnée de texture
- éventuellement un paramètre scalaire (température, ...)



Interpolation de caractéristiques

Pour définir chacun de ces paramètres en chaque point du triangle :

- interpolation bilinéaire

$$\vec{AP} = u\vec{AB} + v\vec{AC}, (u, v \in [0, 1])$$

- coordonnées barycentriques

$$P = wA + uB + vC, (u, v, w \in [0, 1])$$

Remarques :

- équivalence des approches (normalization)
- identification des poids barycentriques avec les portions d'aires
- extension à l'extrapolation
- ray-tracing et coordonnées

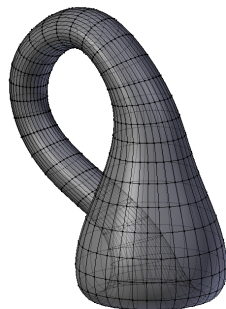
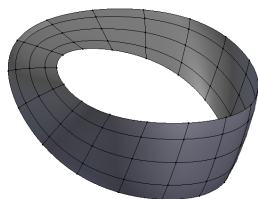
Orientation

Les faces possèdent une caractéristique particulière : *l'orientation*.

- équivalent au sens de la normale
- utilisé pour le rendu (culling)
- utilisé pour définir l'intérieur et l'extérieur de l'objet

On peut souvent définir une même orientation pour tout le maillage, *mais pas toujours!*

Voir ci-contre.



- 1 Introduction
- 2 **Notions de topologie discrète**
 - Adjacence et incidence
 - Distance
 - Voisinage
 - Valence
 - Qualité d'un maillage
 - Variété
- 3 Justification d'utilisation
- 4 Opérations sur les maillages
- 5 Structures de données
- 6 Formats de stockages

Définition

Deux éléments de même dimension N d'un maillages sont adjacents si ils partagent un élément de dimension $N - 1$ ou $N + 1$.

Peuvent être adjacents :

- deux sommets
- deux arêtes
- deux faces
- ...

Incidence

Définition

Deux éléments d'un maillages sont incidents si il existe un point de l'espace appartenant aux deux.

Peuvent être incidents :

- deux triangles
- un triangle et une arête
- deux sommets

Notion ensembliste :

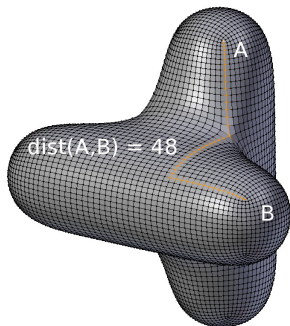
$$\exists p \in \mathbb{R}^3 \mid p \in F_1, p \in F_2$$

Distance

Définition

Nombre d'arêtes composant le plus court chemin entre deux sommets de la surface.

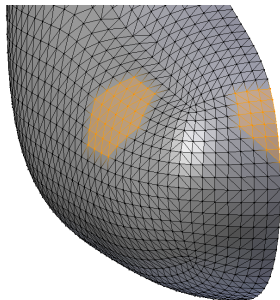
- non unicité du chemin
- indépendant de l'échelle
- attribut topologique
- entier



Définition

Pour un sommet A , ensemble des sommets étant à une distance inférieure à un N donné.

- notion de ring
- utilisation pour le calcul du plan tangent
- définition de la normale



Valence

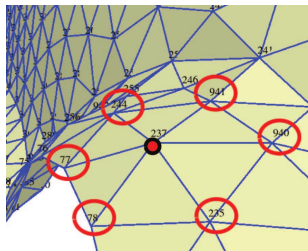
Définition

Pour un point donné, nombre d'arêtes incidentes à ce point.

Définition équivalente

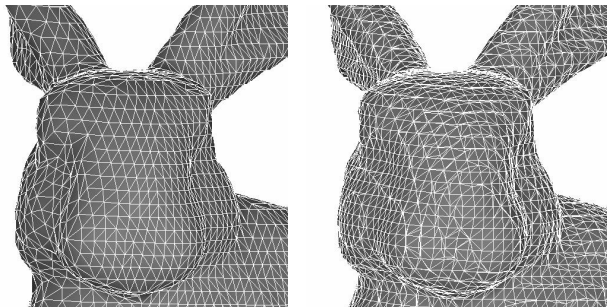
Pour un point donné, nombre de 1-voisins de ce point.

- on parle également de degré



Qualité

- notion qualitative
- associé à la régularité des faces (forme, connectivité)
- associé à l'uniformité de la distribution des valences
- utile pour le calcul des structures
- utile pour la paramétrisation



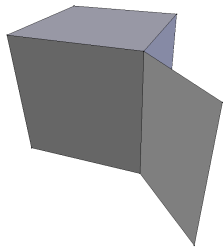
Marching triangle, Hilton et al.

Variété

Définition

Un maillage est une variété si le 1-voisinage de chaque sommet forme une unique chaîne, fermée ou non.

- critère de régularité topologique (et non géométrique)
- lien avec la notion continue de variété différentielle
- séparation locale intérieur/extérieur
- variété simpliciale
- extension : complexe simplicial



Ceci n'est pas une variété.

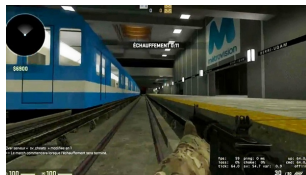
- 1 Introduction
- 2 Notions de topologie discrète
- 3 Justification d'utilisation**
 - Rendu
 - Approximation linéaire
- 4 Opérations sur les maillages
- 5 Structures de données
- 6 Formats de stockages

Rasterisation

Définition

Conversion de données vectorielles (vector image) vers un bitmap (raster image).

- utilise la géométrie projective
- utilise le tracé de ligne de Bresenham
- exécutable en chaîne sur une carte graphique
- extrêmement rapide
- utilisation pour la visualisation en temps réel



Syntaxe OpenGL : mode immédiat

```
glBegin(GL_TRIANGLES);  
  
for(k_tri=0;k_tri<N_tri;k_tri++)  
  for(k_vertex=0;k_vertex<3;k_vertex++)  
    for(k_dim=0;k_dim<3;k_dim++)  
      {  
        x[k_dim] = vertex[3*connectivity[3*k_tri+k_vertex]+k_dim];  
        n[k_dim] = normal[3*connectivity[3*k_tri+k_vertex]+k_dim];  
        glNormal3d(n[0],n[1],n[2]);  
        glVertex3d(x[0],x[1],x[2]);  
      }  
  
glEnd();
```

Syntaxe OpenGL : vertex array

```
glEnableClientState(GL_VERTEX_ARRAY);  
glVertexPointer(3, GL_DOUBLE, 0, &vertex[0]);
```

```
glEnableClientState(GL_NORMAL_ARRAY);  
glNormalPointer(GL_DOUBLE, 0, &normal[0]);
```

```
glDrawElements(GL_TRIANGLES,  
              3*N_tri,  
              GL_UNSIGNED_INT,  
              &connectivity[0]);
```

```
glDisableClientState(GL_VERTEX_ARRAY);  
glDisableClientState(GL_NORMAL_ARRAY);
```

Approximation linéaire

Approximation linéaire = interpolation linéaire de valeur (ie. de position)
Soit une forme 1D F définie par la fonction :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$$

On considère sa décomposition polynomiale :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2} + \dots$$

On échantillonne linéairement f par g avec un pas H :

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \|x - x_0\| < H$$

$$\|f(x) - g(x)\| < K \cdot \frac{f''(x_0)}{2} \cdot H^2$$

- $f''(x_0)$ est assimilable à la courbure de F
- lorsqu'on divise le pas par deux, on diminue par quatre l'erreur d'approximation

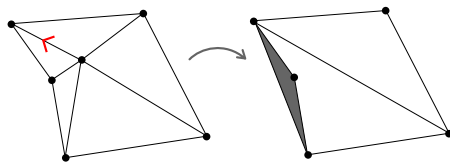
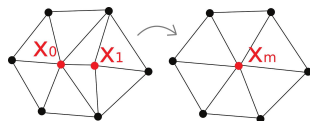
- 1 Introduction
- 2 Notions de topologie discrète
- 3 Justification d'utilisation
- 4 Opérations sur les maillages**
 - Opérations locales
 - Opérations globales
- 5 Structures de données
- 6 Formats de stockages

Effondrement d'arête

Définition

Opération consistant à fusionner deux sommets adjacents.

- valable pour un maillage triangulaire
- autrement appelé "edge collapse"
- bilan : $t-2$, $e-3$, $s-1$
- perte d'information

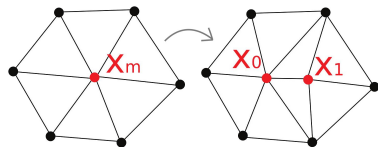


Division de sommet

Définition

Opération inverse de l'effondrement.

- autrement appelé "vertex split"
- bilan : $t+2$, $e+3$, $s+1$
- création d'information ?

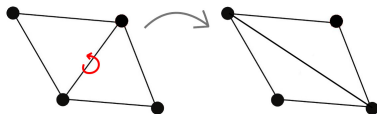


Basculement d'arête

Définition

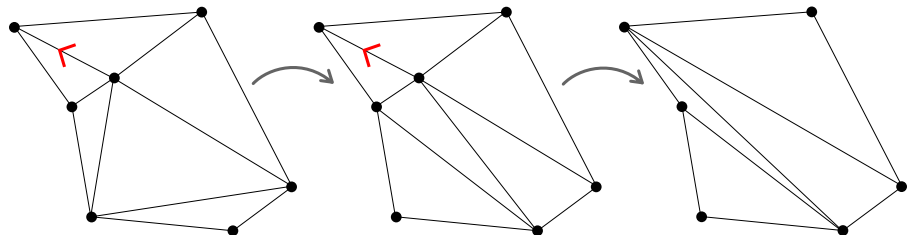
Étant donné deux triangles adjacents, formant un quadrilatère *convexe*.
Opération consistant à inverser la diagonale de celui-ci.

- autrement appelé "edge flip"
- bilan : topologie inchangée



Basculement pré-effondrement

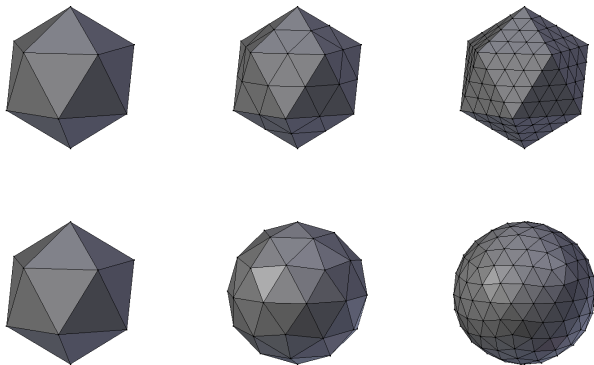
Lorsqu'une arête n'est pas contractable, on peut procéder à des basculements locaux pour changer la situation.



Subdivision

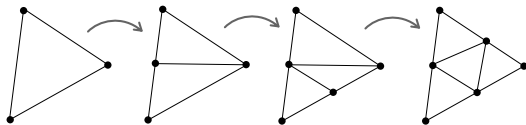
Définition

Opération consistant à augmenter la résolution d'un maillage.



Subdivision

- On peut décomposer la subdivision en opérations élémentaires :



- bilan :

- ▶ avant : $t = 1$, $e = 3/2$, $v = 1/2$
- ▶ après : $t = 4$, $e = 6$, $v = 1$
- ▶ soit : $t^* = 4$, $e^* = 4$, $v^* = 2$

- Différent des surfaces de subdivision : on ne cherche pas à augmenter la contrôlabilité d'un important volume de données.
- Sur-échantillonnage de la surface représentée.
- Subdivision locale.

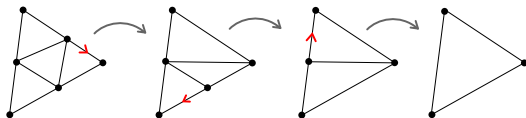
Démo Blender

Simplification

Définition

Opération consistant à réduire la résolution d'un maillage.

- Opération inverse de la subdivision
- On peut décomposer la simplification en opérations élémentaires :

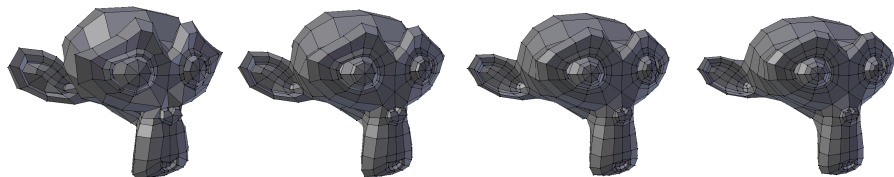


- Critère d'arrêt ? effondrement jusqu'à réduction de moitié du nombre de vertex.
- Critère de sélection de l'arête à effondrer ?
- subdivision + simplification = identité ?

Lissage

Définitions

Opération consistant en l'homogénéisation des différents attributs locaux d'un maillage (longueurs des arêtes, aires des triangles).



- Adaptabilité des méthodes de signal ?
- Analogie : lissage d'un nuage de points du plan.
- Différents types de lissages :
 - ▶ laplacien
 - ▶ taubin
 - ▶ SVD
 - ▶ optimisation d'une fonction d'irrégularité

Remaillage

Définitions

Opération consistant à recréer un maillage représentant le même objet.

Objectifs : Augmenter la qualité du maillage sans (trop) modifier le contenu, modifier le pas d'échantillonnage.

Exemple :

- 1 on dispose d'un maillage
- 2 on le transforme en nuage de points (destruction de la connectivité)
- 3 puis en fonction implicite (reconstruction, RBF par ex.)
- 4 et à nouveau en maillage en maillage (marching cube par ex.)

Non conservation de la topologie.

démo Blender

- 1 Introduction
- 2 Notions de topologie discrète
- 3 Justification d'utilisation
- 4 Opérations sur les maillages
- 5 Structures de données**
 - Soupe de triangles
 - Pourquoi plusieurs structures ?
 - Winged-edge
 - Half-edge
 - Carte combinatoire
 - Spécifique
- 6 Formats de stockages

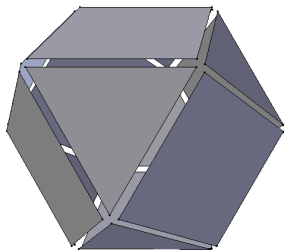
Soupe de triangles

Principe

Le maillage est décrit par deux listes :

- une liste de points précisant la position des sommets
- une liste de n-uplets d'indices de sommets représentant des n-gones

- La première liste est dite "géométrie", la seconde "connectivité".
- Équivalence point et sommet
- pas d'information sur les arêtes
- pas d'information sur les voisins des sommets et des faces
- pas de contrainte sur le type de faces ou de surfaces
- pas de lien depuis les sommets vers les faces



Pourquoi plusieurs structures ?

- les différentes manipulations que nous avons vu nécessitent un accès rapide à diverses informations de voisinage
- on ne peut encoder tout les voisins de tout les éléments
- il peut être lourd de maintenir un structure avec beaucoup de redondance

On fait donc un compromis entre :

- le temps d'accès à l'information
- le volume de données à stocker
- la tractabilité du système

Il faut aussi prendre en compte le fait que certaines structures imposent des limitations sur ce qu'elles représentent (variété, orientabilité).

Résultat : on se retrouve souvent avec des soupes de triangles... mais pas toujours ! Par exemple :

- moka (carte combinatoire)
- CGAL, OpenMesh (half-edge)

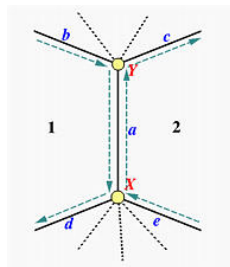
Winged-edge

Principe

Chaque arête contient la référence de :

- deux sommets (début et fin)
- deux faces (droites et gauche)
- quatre arêtes (parcours normal et inverse, prédécesseur et successeur)

- pas d'information sur les faces
- décrit une variété (une arête est toujours partagée par deux faces)
- on peut se passer des références vers les faces (détection de cycles)



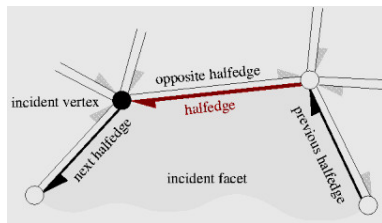
www.cs.mtu.edu

Half-edge

Principe

Chaque demi-arête stocke une référence vers :

- un sommet
 - une face
 - trois autres demi-arêtes :
 - ▶ précédent (dans la face)
 - ▶ suivant (dans la face)
 - ▶ opposée (sur l'arête)
-
- plus compacte que le winged-edge
 - contient les mêmes informations (qu'on retrouve grâce à la demi-arête opposée)



www.cgal.org

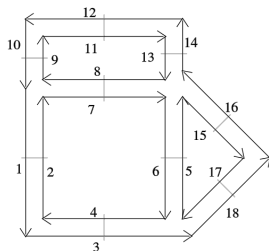
Carte combinatoire

Principe

Une carte combinatoire ND est définie par le N-uplet $M = (D, \{\beta_i\}_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket})$ où :

- D est un ensemble de brins (contenant un point)
- β_1 est une permutation sur D
- $\forall i > 1, \beta_i$ est une involution sur D
- $\forall i, j, 1 \leq i < i + 2 \leq j < n, \beta_i \circ \beta_j$ est une involution sur D

- extension des half-edge en dimension finie quelconque
- représente un espace ND fermé
- limité aux surfaces orientable
- extension aux surfaces non orientables : cartes généralisées



Spécifique

Il existe d'autres structures de représentation :

- quad edge
- liste de face doublement chaînée
- liste d'arête doublement chaînée

Toutes ces structures visent à rendre accessible l'information dont on a besoin en général (voisinage).

Il est tout à fait possible de créer sa propre structure facilitant l'accès à des informations spécifiques.

- 1 Introduction
- 2 Notions de topologie discrète
- 3 Justification d'utilisation
- 4 Opérations sur les maillages
- 5 Structures de données
- 6 Formats de stockages**
 - XML
 - OFF
 - OBJ (Wavefront)
 - Autres

```
<?xml version="1.0"?>
<mesh>
  <geometry>
    <vertex>
      <x> 1.0 </x>
      <y> 2.0 </y>
      <z> 3.0 </z>
    </vertex>
    <vertex>
      <x> 4.0 </x>
      <y> 5.0 </y>
      <z> 6.0 </z>
    </vertex>
    <vertex>
      <x> 7.0 </x>
      <y> 8.0 </y>
      <z> 9.0 </z>
    </vertex>
  </geometry>
  <connectivity>
    <face N = "3">
      <v0> 1 </v0>
      <v1> 2 </v1>
      <v2> 3 </v2>
    </face>
  </connectivity>
</mesh>
```

- Tout est représentable en XML (car c'est un format extensible).
- Cependant ce n'est pas très économique en place.
- Du coup personne ne l'utilise.

OFF

Spécification :

- entête : *OFF*
 - [*nombre de sommets*] [*nombre de faces*] [*nombre d'arêtes*]
 - liste de points [*x y z*]
 - liste de faces [*nombre de sommets*] [*n₀ n₁ ... n_i*]
-
- seconde ligne : spéciale allocation dynamique
 - basique : pas de normales, pas de coordonnées de texture

OBJ

Spécification (partielle) :

- liste de points [**v** x y z] (v pour vertex)
 - liste de coordonnées de texture [**vt** u v] (*facultatif*)
 - liste de normales [**vn** x y z] (*facultatif*)
 - liste de points [**f** v₀/vt₀/vn₀ v₁/vt₁/vn₁ ... v_i/vt_i/vn_i] (ou simplement [**f** v₀ v₁ ... v_i])
-
- commentaires [**#** *commentaire*]
 - nom d'objet [**o** *nom de l'objet*]
 - groupe d'objets [**g** *nom du groupe*]
 - ombrage doux [**s** *on ou off*]
 - lien avec un fichier de matériau [**mtllib** *nom du fichier*], puis [**usemtl** *nom du matériau*] avant la déclaration des faces

Autres

Il existe de nombreux autres formats, par exemple :

- PLY (Stanford)
- STL (stereolithographie)

Tous implémentent une soupe de triangle, avec diverses variations ou options.

- Pour des raisons de compacité.
- Pré-conversion vers une autre structure si besoin
-

Fin !