# Modélisation Géométrique

## Notions de Géométrie Affine

Stefanie Hahmann

Ensimag - Laboratoire LJK - Inria/Imagine

*— version 2016 —*

# 1. POINTS ET VECTEURS

### points

position

$\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{a}, \ldots \in \mathbb{E}^n$

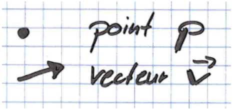
$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{bmatrix}$$

### vecteurs

direction

$\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}, \ldots \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

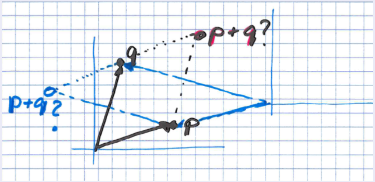



On pourrait représenter les points comme les vecteurs $\vec{0\mathbf{p}}$, où $0$ est l'origine du système de coordonnées.
Mais attention, il n'est pas correct d'écrire $\mathbf{p} = \vec{0\mathbf{p}}$

De facon générale, les opérations algébriques (addition, soustraction, multiplication,...) ne sont définies que pour des vecteurs.

Par contre dans des programmes graphiques ou géométriques des expressions comme $\mathbf{p}+\mathbf{q}$, $\mathbf{p}\cdot\vec{\mathbf{v}}$, $\mathbf{p}\times\mathbf{q}$,... apparaissent sans distinguer entre points et vecteurs.

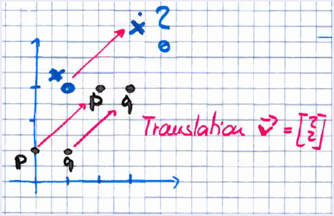
## Exemple 1 - addition




Où se trouve le point $\mathbf{p}+\mathbf{q}$?
Est-ce le point $0\mathbf{p}+0\mathbf{q}$,
ou est-ce le point $0'\mathbf{p}+0'\mathbf{q}$?

## Exemple 2 - translation

- soit données $\mathbf{p},\mathbf{q}$
- calculer $\mathbf{x}=2\mathbf{p}+\mathbf{q}$
- translater $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ par le vecteur $\vec{\mathbf{v}}$ pour obtenir $\dot{\mathbf{p}}$ et $\dot{\mathbf{q}}$
- Calculer à nouveau $\dot{\mathbf{x}}=2\dot{\mathbf{p}}+\dot{\mathbf{q}}$



## Important

Les méthodes développées en Modélisation Géométrique doivent être indépendantes des coordonnées.

Le choix du système de coordonnées ne doit pas affecter les propriétés de l'objet géométrique.

Il ne suffit pas de dire que les vecteurs $\vec{0\mathbf{p}} + \vec{0\mathbf{q}}$ représentent $\mathbf{p} + \mathbf{q}$, car cette définition de l'addition de deux points n'est pas **intrinsèque**.
Elle dépend du choix de l'origine du système de coordonnées.

# 2. ESPACE AFFINE

## Définition

Etant donné un espace vectoriel $V$ sur un corps $K$, un **espace affine** de direction $V$ est un ensemble non vide $E$ muni d'une application qui à chaque couple de points $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ de $E$ associe un élément de $V$, noté $\vec{\mathbf{ab}}$ vérifiant les deux propriétés suivantes:

- $\forall(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in E^3, \quad \vec{\mathbf{ab}} + \vec{\mathbf{bc}} = \vec{\mathbf{ac}}$ (relation transitive)
- $\forall \mathbf{a} \in E, \forall \vec{\mathbf{v}} \in V, \exists! \mathbf{b} \in E, \quad \vec{\mathbf{ab}} = \vec{\mathbf{v}}$ (existence et unicité d'un translaté).

$V$ est appelé direction de $E$. dim $E :=$ dim $V$.

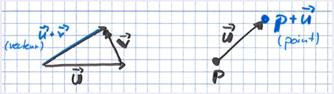
Soient $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_d$ $d+1$ points de $\mathbb{E}^n$, $d \leq n$.

$\mathbf{v}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0$, $i = 1, \ldots, d$ (s'ils sont) **linéairement indépendants** engendrent un espace vectoriel $V^d$.

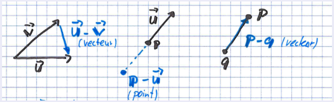
Les points $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_d$ sont appelés **affinement indépendants**. Ils engendrent un espace affine $\mathbb{E}^d$ de dimension $d$.

# Opérations algébriques

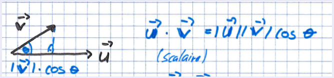
## addition



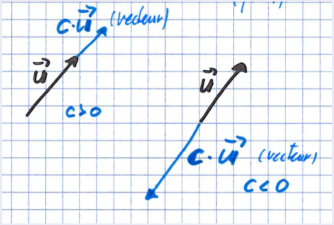

## soustraction



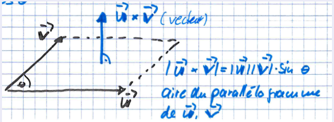

## produit scalaire




## multiplication scalaire




## produit vectoriel



## Opérations algébriques

Points: $P, Q$. Vecteurs: $u, v$

| Operation | Legal | Undefined |
|---|---|---|
| Addition | $u + v$ (vector), $P + u$ (point) | $P + Q$ |
| Subtraction | $u - v$ (vector), $P - u$ (point)<br>$P - Q$ (vector) | $u - P$ |
| Scalar Multiplication | $c \cdot v$ (vector) | $c \cdot P$ |
| Dot Product | $u \cdot v$ (scalar) | $P \cdot u$, $P \cdot Q$ |
| Cross Product | $u \times v$ (vector) | $P \times u$, $P \times Q$ |

Nous ne savons toujours pas comment additionner des points.

**Remarque:**
$\mathbf{p} + \mathbf{q}$ n'est pas défini. Par contre, $(\mathbf{p} + \mathbf{q})/2$ représente le point au milieu du segments de droite entre **p** et **q** indépendamment du choix du sytème de coordonnées.

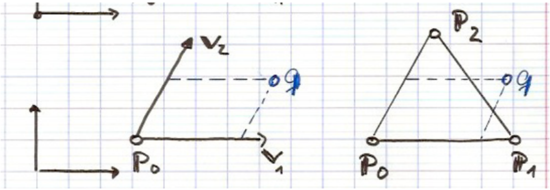
# 3. SYSTEME AFFINE

## Définition

Un point $\mathbf{p}_o$ et $n$ vecteurs lin. indép. $\mathbf{v}_i$ définissent un **système affine** $[\mathbf{p}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ de $\mathbb{E}^n$. Dans ce système tout point $\mathbf{q} \in \mathbb{E}^n$ a donc une unique représentation

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_0 + x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n,$$

où $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ sont appelés les **coordonnées affines** de $\mathbf{q}$ par rapport à $[\mathbf{p}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$. $\mathbf{p}_0$ est appelé origine du système affine. La colonne de coordonnées de $\mathbf{p}_0$ est $\mathbf{x} = [0, \ldots, 0]^T = \mathbf{0}^T$.



## Dans ce cours

$V = \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$, $K = \mathbb{R}$. On note $\mathbb{E}^n$ l'espace affine de direction $\mathbb{R}^n$.
Autrement dit, points et vecteurs sont représentés par des éléments de $\mathbb{R}^n$.

Tout élément de $\mathbb{R}^n$ est noté comme $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \ldots$.
Le contexte déterminera s'il s'agit d'un point ou d'un vecteur.

## **coordonnés homogènes** ou étendues

Pour distinguer entre points et vecteurs on peut rajouter une coordonné supplémentaire $e$, où $X = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ e \end{bmatrix}$ représente un $\begin{cases} \text{point si} & e = 1 \\ \text{vecteur si} & e = 0 \end{cases}$.

Cette représentation permet souvent la simplification de l'écriture, voir les applications affines en Section 6.

# 4. COORDONNEES BARYCENTRIQUES

Soient $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$ $n+1$ points de $\mathbb{E}^n$ affinement indép. Tout point $\mathbf{q} \in \mathbb{E}^n$ peut être représenté de façon unique par:

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_0 + x_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) + \cdots + x_n(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0).$$

*(pt = pt + vect + ... + vect)*.
Il est facile de vérifier qu'il est équivalent d'écrire:

$$\mathbf{q} = x_0\mathbf{p}_0 + \cdots + x_n\mathbf{p}_n \qquad \text{avec} \qquad x_0 = 1 - (x_1 + \cdots + x_n).$$

**L'opération fondamentale pour les points:**

## Combinaison barycentrique

La relation

$$\mathbf{q} = x_0\mathbf{p}_0 + \cdots + x_n\mathbf{p}_n \qquad \text{avec} \qquad x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 1. \tag{1}$$

est apprlée une **combinaison barycentrique**.
Les coefficients $x_i$ sont appelées **coordonnées barycentriques** de $\mathbf{q}$ par rapport au frame $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$.

Si tous les $x_i \geq 0$, on appelle $(1)$ une **combinaison convexe**.

# 5. SOUS-ESPACE AFFINES

Soient $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_d$ $d+1$ points de $\mathbb{E}^n$. Le point

$$\mathbf{p} = x_0\mathbf{p}_0 + \cdots + x_d\mathbf{p}_d \qquad \text{avec} \qquad x_0 + \cdots + x_d = 1 \tag{2}$$

est appelé une **combinaison affine** des points $\mathbf{p}_i$.

Soit $d \leq n$ et $\mathbf{p}_i$ affinement indépendents, alors ils engendrent un **sous-espace affine** $\subset \mathbb{E}^n$ de dimension d. Ce sous-espace s'appelle droite affine, plan affine ou hyperplan affine si $d = 1, 2,$ ou $n - 1$ respectivement.

# 6. APPLICATIONS AFFINES

Une application $\Phi : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ est appelé une **application affine** (ou carte affine) ssi elle peut être écrite par une $(m \times n)$-matrice $A$ et un point $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^m$ telle que

$$\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{a}, \tag{3}$$

où $\mathbf{a}$ représente l'image de l'origine de $\mathbb{E}^n$.

En coordonnées homogènes (3) s'écrit aussi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{a} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

## Propriété

Une application affine laisse les combinaisons barycentriques invariantes:

$$\Phi(\sum x_i \mathbf{p}_i) = \sum x_i \Phi(\mathbf{p}_i).$$

## Propriété

Les applications affines peuvent être composées. Et une carte compliquée peut être décomposée en une séquence de cartes plus simples. Il peut être montré que chaque carte affine peut être composée de translations, de rotations, de cisaillements et d'homothéties.

## Propriété

Une application affine est uniquement déterminée par "un frame" de (dim $\mathbb{E}^n$+1) points indépedants $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$ et son image $\mathbf{q}_0, \ldots, \mathbf{q}_n$

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{a} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 & \ldots & \mathbf{q}_n \\ 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 & \ldots & \mathbf{p}_n \\ 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

# 7. INTERPOLATION AFFINE (LINEAIRE)

Soient $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ deux points distincts dans $\mathbb{E}^3$.

## Interpolation affine (linéaire)

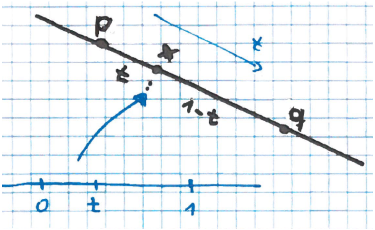
L'ensemble de tous les points $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3$ t.q.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{5}$$

forme une droite passant par $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$.

3 points (ou plus) sur une droite sont dits alignés.

Pour $t = 0$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{p}$
Pour $t = 1$, $\mathbf{x}(1) = \mathbf{q}$
Pour $0 \leq t \leq 1$, le point $\mathbf{x}$ se trouve sur le segment entre $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, tandis que pour toutes les autres valeurs de $t$, $\mathbf{x}$ se trouve en-dehors.



# Interpolation affine (suite)

Equation (5) représente **x** comme une combinaison barycentrique de **p**, **q** dans $\mathbb{E}^3$. La même combinaison barycentrique convient pour les trois points $0, t, 1$ dans $\mathbb{E}^1$

$$t = (1 - t) \cdot 0 + t \cdot 1$$

Le paramètre $t$ est donc lié à 0 et 1 par la même combinaison barycentrique qui lie **x** à **p** et **q**.

**L'interpolation affine (linéaire)** est alors une application affine de la droite rélle vers une droite dans $\mathbb{E}^3$.

## L'interpolation affine (linéaire) est affinement invariant

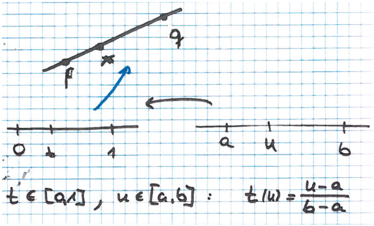
$$\Phi(\mathbf{x}) = (1 - t)\Phi(\mathbf{p}) + t\Phi(\mathbf{q}).$$

# Transformation de domaine affine

Par définition le segment de droite $[\mathbf{p}, \mathbf{q}]$ est l'image affine de l'intervalle unité $[0, 1]$, mais il est également l'image affine de tout intervalle $[a, b]$.

L'intervalle $[a, b]$ peut lui-même être obtenu par une carte affine depuis l'intervalle $[0, 1]$, ou vice versa.

Soit $t \in [0, 1]$ et $u \in [a, b]$. La carte donnée par $t = \frac{(u-a)}{(b-a)}$ est une application affine de la droite réelle sur elle-même, appelée **transformation de domaine affine**. Le paramètre $t$ est parfois appelé un **paramètre local** de l'intervalle $[a, b]$.




Le même point sur la droite est maitenant donnée par

$$\mathbf{x}(t) = (1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}$$

et

$$\mathbf{x}(u) = \frac{b-u}{b-a}\mathbf{p} + \frac{u-a}{b-a}\mathbf{q}. \qquad (6)$$

**Théorème**

L'interpolation affine (linéaire) est invariante par transformations de domaines affines.