Session de problèmes des 17èmes JCALM

4-5 mai 2017

Ascending Subgraph Decomposition Conjecture

Communiqué par Bruce Reed.

Conjecture 1 (Alavi, Boals, Chartrand, Erdős, Oellerman [1], 1987)**.**
Si $|E(G)| = \binom{p}{2}$, alors on peut trouver $H_1 \subseteq H_2 \subseteq, \ldots, \subseteq H_p$ t. q. $|E(H_i)| = i$ et $\bigcup_{i=1}^{p} H_i = G$.

Prix : 5 dollars par P. Erdős.

Cette conjecture est trivialement vraie pour les les graphes complets, car on peut décomposer en étoiles. On peut également décomposer un complet avec des chemins. La conjecture a été montré pour certains cas particuliers comme les forêts [2], les graphes réguliers [3], les graphes complets multipartis [4] ou les les graphes de degré maximum inférieur à $n/2$ [5].

Tous les arbres sont premiers

Communiqué par Stéphane Bessy.

Un graphe G d'ordre n est *premier* s'il existe $\sigma : V(G) \mapsto \{1, \ldots, n\}$ tel que $\sigma(x)$ et $\sigma(y)$ sont premiers entre eux pour toute arête $xy \in E(G)$.

Conjecture 2 (Entringer, 1980 (Voir [6])**.** Tous les arbres sont premiers.

C'est trivial pour les étoiles, car 1 est premier avec tout le onde et on peut le mettre au centre. Pour les chemins aussi. Elle a été prouvée pour tout un tas d'arbres (des oliviers aux bananiers, en passant par les chenilles). Voir la Partie 7.2 de [6]. La conjecture a été prouvée pour les arbres de taille suffisamment grande par Haxell et al. [7]. Elle a également été vérifi´ee jusqu' à $n = 50$.

Nombre dichromatique des bidules

Communiqué par Pierre Aboulker.

Un *bidule* est un graphe orienté D tel que, pour tout sommet x, $D\langle N^+(x)\rangle$ est un tournoi transitif.

Conjecture 3 (Aboulker, Charbit, Naserasr, 2017)**.** Il existe une constante C telle que tout bidule D est de nombre dichromatique au plus C.

Prix : 1 bière belge par P. Aboulker.

Décomposition des complets en copies d'un arbre

Communiqué par Daniel Goncalves.

Un arbre T est *gracieux* s'il existe $f : V(T) \to \{0, \dots, n-1\}$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, il existe une arête uv de T telle que $|f(u) - f(v)| = i$.
Kotzig, Ringel and Rosa ont conjecturé que tous les arbres sont gracieux :

Conjecture 4 (Graceful Tree Conjecture)**.** Tous les arbres sont gracieux.

Cette conjecture impliquerait le résultat suivant. (Il suffit de faire tourner le motif donner par l'étiquetage gracieux).

Conjecture 5. Si T est un arbre T à m arêtes, alors K_{2m+1} se décompose en $2m+1$ copies de T.

Une idée pour attaquer cette dernière conjecture dans le cas où $m \equiv 1 \mod 3$ serait d'essayer de trouver un motif avec 3 copies disjointes de T et de les faire tourner.

Les moulins français sont gracieux

Communiqué par Jean-Claude Bermond

Un *moulin français d'ordre* p, noté FW_p, est un graphe obtenu à partir de p copies de K_4, le graphe complet à 4 éléments, en prenant un sommet dans chaque copie et en les identifiant. Autrement dit, c'est le joint de K_1 avec l'union disjointe de p K_3.
FW_2 et FW_3 ne sont pas gracieux (voir définition Section précédente.). Mais Bermond a conjecturé que tous les autres l'étaient.

Conjecture 6 (Bermond [8])**.** Tous les moulins français d'ordre au moins 4 sont gracieux.

Huang et Skiena [9] ont momntré que cette conjecture est vraie pour $p \leq 22$. N. Cohen l'a vérifiée par ordinateur pour des valeurs de p un peu plus grandes.

Sous-graphes isométriques de l'hypercube

Communiqué par Kolja Knauer

On note Q_n l'hypercube de dimension n.
Un sous-graphe H de Q_n est *isométrique* pour toute paire de sommets la distance dans H est égale à la distance dans Q_n.

Problème 7 (Knauer, Nisse)**.** Pour $V' \subseteq Q_n$, existe-t-il un sous-graphe isométrique de taille $poly(V', n)$ qui contienne V' ?

Pour $n = 2^k$, est-ce vrai pour l'ensemble V' est l'ensemble des k sommets définis par x_i, $1 \leq i \leq k$ tels que x_i est l'alternance de blocs de 0 puis 1 de taille 2^{i-1}.

Décomposition en cycles hamiltoniens

Communiqué par Jean-Claude Bermond

Conjecture 8 (Kotzig-Bermond, [10], 1978)**.** Si G et H sont décomposables en cycles hamiltoniens, alors $G \Box H$ est décomposable en cycles hamiltoniens.

Prix: 1 tonneau de bière (100 litres) par J.-C. Bermond.

Plusieurs cas particuliers sont fait. En particulier, l'hypercube est décomposable en cycles hamiltoniens.

Voir la page `http://www.math.illinois.edu/ dwest/openp/prodham.html`.

Conjecture 9 (Bermond [11], 1988)**.** Si G est décomposable en cycles hamiltoniens, alors son line-graphe $L(G)$ est décomposable en cycles hamiltoniens.

Les meilleurs résultats obtenus sur cette conjecture l'ont été par Muthusamy et Paulraja [12]. Voir aussi [13]. De nombreux résultats sur les décompositions en cycles hamiltoniens des graphes et hypergraphes se trouve dans la synthèse de Kühn et Osthus [14].

On peut se poser des questions analogues pour les graphes dirigés, notamment les graphes dirigés symétriques.

References

[1] Y. Alavi, A. J. Boals, G. Chartrand, P. Erdős and O. Oellerman. The ascending subgraph decomposition problem. *Congr. Numer.*, 58: 7–14, 1987.

[2] R. J. Faudree, A. Gyárfás, R. H. Schelp. Graphs which have an ascending subgraph decomposition. *Congr. Numer.*, 59, 49–54, 1987.

[3] H. L. Fu, W. H. Hu. Ascending subgraph decomposition of regular graphs. *Discrete Math.*, 253: 11–18, 2002.

[4] H. L. Fu, W. H. Hu. A note on ascending subgraph decompositions of complete multipartite graphs. *Discrete Math.*, 226: 397–402, 2001.

[5] H. L. Fu. A note on the ascending subgraph decomposition problem. *Discrete Math.*, 84: 315–318, 1990.

[6] J. A. Gallian. A dynamic survey of graph labeling. *Electronic J. Combin.* DS6, 256pp, 2011.

[7] P. Haxell, O. Pikhurko, and A. Taraz. Primality of trees. *J. Combinatorics*, 2:481–500, 2011.

[8] J.-C. Bermond. Graceful graphs, radio antennae and French windmills. *Graph Theory and Combinatorics*, Pitman, London, 18–37, 1979.

[9] J. Huang, S. Skiena. Gracefully labeling prisms. *Ars Combin.* 38:225 – 242, 1994.

[10] J.-C. Bermond. Hamiltonian decompositions of graphs, directed graphs and hypergraphs. Ann. Discrete Math., 3:21–28, 1978.

[11] J.-C. Bermond. Problem 97. *Discrete Math.* 71: 275, 1988.

[12] A. Muthusamy, P. Paulraja. Hamilton cycle decompositions of line graphs and a conjecture of Bermond. *J. Comb. Theory B* 64:1–16, 1995.

[13] D. Pike. Hamilton decompositions of line graphs of perfectly 1-factorizable graphs of even degree. *Australas. J. Combin.* 12:291– 294, 1995.

[14] D. Kühn et D Osthus. Hamilton cycles in graphs and hypergraphs: an extremal perspective. arXiv 1402.4268v3, 2014.