

UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS – UFR Sciences

École Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'UNIVERSITÉ de Nice-Sophia Antipolis

Spécialité MATHÉMATIQUES

présentée et soutenue par

Audrey BONNEMENT

Modélisation numérique par approximation fluide du plasma de bord des tokamaks (projet ITER)

Thèse dirigée par **Hervé GUILLARD** et **Richard PASQUETTI**

soutenue le 3 juillet 2012

Membres du jury :

M. Philippe	GHENDRIH	Examineur
M. Hervé	GUILLARD	Directeur de thèse
M. Philippe	HELLUY	Rapporteur
M. Boniface	NKONGA	Examineur
M. Richard	PASQUETTI	Directeur de thèse
M. Eric	SERRE	Rapporteur
M. Yann	STEPHAN	Examineur

INRIA Sophia-Antipolis, 2004 Route des Lucioles, 06560 Sophia Antipolis
Laboratoire JA Dieudonné, Université de Nice, Parc Valrose, 06108 NICE

Remerciements

J'ai été accueillie pendant cette thèse par l'INRIA Sophia-Antipolis et le laboratoire Dieudonné avec une bourse BDO INRIA-Région PACA. Je souhaite en remercier les responsables et les équipes administratives respectives mais aussi toutes les personnes que j'ai pu rencontrées. Je m'excuse par avance pour toutes celles que je vais oublier ici.

Je souhaite remercier chaleureusement mes directeurs de thèse, Hervé Guillard et Richard Pasquetti pour m'avoir accueillie pendant cette thèse mais aussi pour tout le temps et toute l'aide qu'ils m'ont apportés pour faire avancer ce travail. Merci aussi à Boniface Nkonga pour son co-encadrement et ses précieux conseils.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du jury pour avoir accepté de participer à mon jury de soutenance : Philippe Helluy et Eric Serre en tant que rapporteurs ainsi que Philippe Ghendrih et Yann Stephan, en tant qu'examinateurs.

Je souhaite aussi remercier Afeintou pour son aide précieuse notamment pour tous nos dessins en 3D plus ou moins bien réussis. Un grand merci à Laure pour ses conseils et pour toutes les fois où notre conversation a permis un petit déclic pour faire avancer cette thèse. Je remercie aussi Jean-Marc pour toutes les fois où je lui ai dit « ça marche pas » et où il a trouvé une solution.

Merci à Marco et Cédric pour nos différentes discussions : solveur de Riemann, maillage raffiné et tout le reste, plus ou moins sérieux et aussi à Marie notamment pour les derniers mois que je lui ai fait endurer dans le bureau !

J'ai aussi une pensée pour tous les autres doctorants que j'ai rencontrés tout au long de cette thèse (dans le désordre) : Anca, Laura, Nahla, Julianna, Benedikt, Ahed, Brahim, Luca, Salima, Paul-Eric, Amine etc... Merci à tous pour leur bonne humeur.

Finalement, j'envoie mille mercis à ma famille et surtout à mes parents, ma soeur et Nico pour leur soutien et leurs encouragements tout au long de cette thèse mais aussi à l'ensemble de mes proches qui m'ont soutenue de plus ou moins loin : Chloé et toute notre joyeuse bande ; Vincent ; Léa, Pauline et Lauriane ; Virginie ; les mmk... mais aussi ma grand-mère, Nicole, Lucette et Edmond ainsi que Mireille et Roger évidemment et encore beaucoup d'autres qui j'espère me pardonneront de les avoir oubliés ici. Certains ont découvert que le mot tokamak existait, même si je concède qu'il est difficilement réutilisable dans une conversation (par contre, jackpot au scrabble)... J'ai aussi une pensée pour Mr Noailles qui fut « le » point de départ de ma formation en mathématiques. Enfin, un énorme merci à mon compagnon, Julien qui m'a supportée (dans tous les sens du terme) pendant ces années.

Table des matières

Introduction	9
1 Modèle fluide	19
1.1 Approches de modélisation du plasma	19
1.1.1 Description particulière	19
1.1.2 Description statistique	20
1.1.3 Description fluide	21
1.2 Du cinétique à la description fluide	23
1.2.1 Equation de Boltzmann	23
1.2.2 Description Fluide	25
1.2.3 Les équations d'évolution	28
1.3 Fermetures de Braginskii	30
1.3.1 Diffusion	30
1.3.2 Viscosité	34
1.3.3 Anisotropie	36
1.4 Adimensionnement	38
1.4.1 Adimensionnement des équations	39
1.4.2 Adimensionnement du terme de viscosité	40
1.4.3 Adimensionnement du terme de diffusion	41
1.4.4 Quelques évaluations pour notre système.	42
2 Diff. anisotrope avec rayonnement	45
2.1 Modélisation	45
2.1.1 Schéma spatial	46
2.1.2 Schéma en temps	48
2.1.3 Conditions aux limites	50
2.2 Tests numériques	52
2.2.1 Diffusion anisotrope sans rayonnement	52
2.2.2 Tests avec rayonnement	59
3 Le modèle numérique	69
3.1 Modélisation du terme équilibre	70
3.1.1 Champ magnétique et champ de force associé	70

3.1.2	Modélisation sous la forme d'un terme force	73
3.1.3	Modélisation dans le solveur de Riemann	74
3.1.4	Modélisation par compensation numérique	80
3.2	Conditions aux limites	81
3.2.1	Paroi glissante	82
3.2.2	Conditions aux limites de Bohm	83
3.3	Conditions initiales de vitesse	85
4	FVM dans une géométrie cylindrique	89
4.1	Discrétisation sous forme de terme source	91
4.2	Discrétisation sous forme conservative	92
4.2.1	Terme en temps	93
4.2.2	Calcul des flux azimutaux	95
4.2.3	Calcul des flux radiaux	97
4.2.4	Equation de bilan des flux	99
4.3	Cas Test de Gresho	100
4.4	Diffusion et viscosité en axisymétrie	102
4.4.1	Diffusion	103
4.4.2	Viscosité	104
5	Simulations numériques	109
5.1	Systèmes d'Euler et Navier-Stokes	109
5.1.1	Système Euler	110
5.1.2	Systèmes Navier-Stokes et Braginskii	111
5.2	Terme équilibre	114
5.2.1	Approximation en terme force	114
5.2.2	Nouveau solveur de Riemann	121
5.3	Perturbations de l'équilibre	129
5.3.1	Perturbation homogène de la densité	130
5.3.2	Perturbation localisée de densité	131
5.4	Injection de pellets	136
5.4.1	Vitesse analytique linéaire	137
5.4.2	Vitesse à l'équilibre	140
	Conclusion	153
A	Formulaire	157
A.1	Quelques formules de coefficients	157
A.2	Quelques identités vectorielles utiles	160
B	Equations conservatives de la MHD	161
B.1	Equation de continuité	161
B.2	Equation du mouvement	161
B.3	Equation de l'énergie	163

C FVM in Curvilinear Coordinates	167
C.1 Introduction	167
C.2 Geometrical tools	168
C.3 FV schemes in curvilinear coordinates	170
C.3.1 Scalar equation	170
C.3.2 Vectorial equation	171
C.4 Application to 2D polar coordinates	172
C.4.1 2D polar coordinates and finite volume method	172
C.4.2 Tools for practical implementation	176
C.4.3 Advection equation test	178
C.4.4 Isothermal Euler system	179
C.5 Conclusion	183
D Construction de B	185
E Solveur de Riemann : Calculs annexes.	187
E.1 Classement des ondes et positivité des densités intermédiaires	187
E.2 Positivité des ε^* et ε^{**}	188

Introduction

La Fusion par Confinement Magnétique (FCM) s'appuie sur le principe de production d'énergie des étoiles, lors de la fusion de deux éléments (par exemple, deuterium et tritium). Pour cela, ces deux éléments doivent être à des températures élevées, de l'ordre de 10^8 K, soit 10 keV, afin de favoriser la fusion. A cette température, un nouvel état de la matière apparaît : le plasma, dans lequel les atomes sont ionisés. La fusion par confinement magnétique consiste à utiliser le champ magnétique afin de confiner le plasma dans des chambres appelées tokamaks. Des phénomènes physiques complexes se déroulent dans le plasma, pouvant jouer un rôle décisif sur les performances des tokamaks. Ces différentes notions vont être abordées dans cette introduction (c.f. [55, 1]). Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse plus particulièrement aux phénomènes qui ont lieu dans le plasma de bord, comme par exemple en [60].

Cadre général

Le plasma

L'ensemble de notre environnement proche se présente sous la forme de trois états de la matière : solide, liquide ou gazeux. Cependant, au-delà de ces trois états, il existe un quatrième état, les "gaz ionisés" ou "plasmas". En effet, à des températures importantes, la dissociation puis l'ionisation conduisent à la création de charges libres, des ions ou des électrons. Le plasma étant donc un ensemble de particules chargées en interaction, de nombreux phénomènes physiques complexes peuvent s'y dérouler.

Afin de décrire au mieux les ordres de grandeurs rencontrés en physique des plasmas, le système CGS (Centimètre, Gramme, Seconde) est usuellement préféré au système international. De même, l'unité d'énergie n'est pas le joule mais l'électron-volt, qui représente l'énergie cinétique d'un électron accéléré depuis le repos par une différence de potentiel de 1 volt :

$$1eV = 1,6 \cdot 10^{-19} J.$$

D'ailleurs, en physique des plasmas, les températures sont aussi données sous la forme d'énergie, en électron-volt :

$$1eV \text{ équivaut à } 11\,604K.$$

Le système en question est notamment décrit dans le formulaire NRL [40]. Les grandeurs suivantes seront données en unités cgs.

Certaines grandeurs permettent de caractériser le plasma. Tout d'abord, la fréquence plasma ou fréquence de Langmuir est la fréquence caractéristique des ondes du plasma. En effet, si le plasma subit une perturbation, les électrons vont se mettre à osciller collectivement et spontanément, les ions restant immobiles du fait de leur masse plus importante. Cette pulsation plasma est donnée par :

$$\omega_{p,e} = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}} \text{ rad/sec}, \quad (1)$$

avec n_e et m_e , respectivement la densité et la masse électroniques et e , la charge élémentaire, l'ensemble étant en unités cgs (c.f. annexe A).

Une seconde grandeur caractéristique du plasma est la longueur de Debye. Dans un plasma, un ion va attirer autour de lui les électrons de signe opposé. La sphère d'électrons qui se forme autour de celui-ci est appelée la sphère de Debye et son rayon, la longueur de Debye. Elle est donnée par :

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{kT_e}{4\pi n_e e^2}} \text{ cm}, \quad (2)$$

avec T_e et n_e , respectivement la température et la densité électronique ; k , la constante de Boltzmann et e , la charge élémentaire. Ces grandeurs sont ici en unités cgs, à l'exception de la température en eV et de la constante de Boltzmann en erg/eV, c.f. annexe A. Pour des longueurs supérieures à λ_D , l'hypothèse de quasi-neutralité $n_e = Zn_i$ peut être supposée, avec n_e et n_i , respectivement les densités électronique et ionique et Z , le numéro atomique de l'ion considéré.

Le plasma est extrêmement répandu dans l'Univers puisqu'il représente 99% de la matière. On peut distinguer les plasmas naturels : les étoiles, les éclairs, etc... des plasmas industriels présents, par exemple, dans la propulsion par plasma ou dans les phénomènes de fusion thermonucléaire. C'est ce dernier contexte qui nous intéresse ici.

La fusion

Au vu de l'importance de la consommation annuelle mondiale d'énergie, la fusion de noyaux légers de deutérium et de tritium au sein des réacteurs à fusion thermonucléaire contrôlée est l'une des solutions envisagées comme nouvelle production d'énergie. En effet, un noyau de deutérium fusionnant avec un noyau de tritium, donne une particule α , qui est un noyau d'hélium et un neutron suivant la réaction décrite par la figure 1, elle permet de produire une énergie de 17,6 MeV.

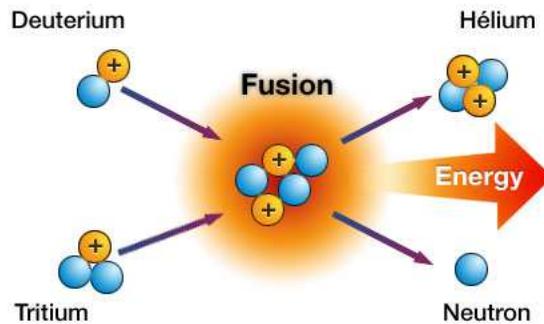


FIGURE 1 – Réaction Deutérium-Tritium [2].

Le critère de Lawson [46] donne les trois paramètres fondamentaux qui permettent de favoriser cette réaction :

$$f(Q) = nT_i\tau_E,$$

où Q est le rapport de la puissance produite par la fusion et de la puissance injectée au sein du plasma pour permettre celle-ci et T_i , la température ionique. En pratique, pour obtenir un réacteur en fusion rentable énergétiquement, on estime qu'il faut $Q \gtrsim 40$. Sachant que les réactions D-T nécessitent une température de l'ordre de $T = 30\text{keV}$, on voit que l'on peut jouer sur deux autres facteurs pour tenter de maximiser les phénomènes de fusion : n , la densité, et τ_E , le temps de confinement, autrement dit le temps caractéristique pour que les réactifs refroidissent après l'arrêt du chauffage.

Les deux grands types de procédés de fusion se différencient par le choix de la maximisation de l'un ou l'autre de ces deux derniers facteurs. Ainsi, dans le cas de la fusion par confinement inertiel par laser, on se place dans une configuration où le temps de confinement est très court ($\tau_E = 10^{-11}\text{s}$) pour des plasmas extrêmement denses ($n = 10^{31}\text{m}^{-3}$). Au contraire, pour la fusion par confinement magnétique qui nous intéresse plus particulièrement ici, le temps de confinement ($\tau_E = 1\text{s}$) est privilégié par rapport à la densité du plasma ($n = 10^{20}\text{m}^{-3}$). L'une des solutions envisagées afin de favoriser le confinement du plasma est la configuration tokamak.

Les tokamaks

Le terme « tokamak » est un acronyme de la traduction russe de « chambre toroïdale avec bobines magnétiques ». Les tokamaks ont été inventés dans les années 1950 par les physiciens russes Igor Tamm et Andrei Sakharov. Depuis, ce concept a été développé sur le plan international avec notamment la construction de JET (Royaume-Uni), Tore-Supra (France) ou DIIIID (Etats-Unis), permettant l'obtention d'un facteur $Q = 1$. La prochaine étape est le projet international ITER qui permettra d'améliorer les performances déjà obtenues.

Champ magnétique

Les tokamaks sont des configurations magnétiques toroïdales utilisées pour confiner et chauffer des plasmas.

En présence d'un champ magnétique, une particule chargée effectue un mouvement de rotation autour des lignes de champ et de translation le long de celles-ci. Ce mouvement est qualifié de mouvement cyclotronique et le centre de cette rotation est appelé centre guide. Ce mouvement peut être décrit par deux paramètres, usuels en physique des plasmas : la fréquence cyclotronique et le rayon de Larmor.

La fréquence cyclotronique donne le nombre de rotations par seconde d'une particule s (électron, e ou ion, i) autour d'une ligne de champ. La pulsation correspondante est :

$$\omega_{c,s} = \frac{Bq_s}{m_s c} \text{ rad/sec,} \quad (3)$$

avec B , le champ magnétique ; c , la vitesse de la lumière ; m_s et q_s , la masse et la charge de la particule respectivement ($q_e = e$ et $q_i = Ze$ avec Z le numéro atomique de l'ion et e la charge élémentaire). Les grandeurs sont prises ici en unités cgs, c.f. annexe A.

Le rayon de Larmor donne l'amplitude du mouvement de la particule considérée dans le plan transverse aux lignes de champ magnétique :

$$\rho_{L,s} = \frac{c\sqrt{m_s k T_s}}{q_s B} \text{ cm.} \quad (4)$$

Les grandeurs utilisées ici sont en unités CGS [40], sauf T_s , la température en eV et k , la constante de Boltzmann en erg/eV.

Dans un tokamak, le champ magnétique a deux composantes : une toroïdale et une poloïdale. La fig. 2 représente ce champ magnétique. Il est généré par un système de bobines mis en place dans le tokamak. L'intensité du champ magnétique toroïdal B_T est environ 10 fois plus importante que celle du champ magnétique poloïdal B_p : $B_T/B_p = 10$. Le champ magnétique est essentiellement proportionnel à $1/R$, R étant la distance par rapport à l'axe du tokamak.

Toutefois, le tokamak n'assure pas un confinement parfait car le plasma génère lui-même des champs électrique et magnétique. Ainsi, certaines particules peuvent être transportées du coeur au bord du plasma. On considère que le coeur du plasma est délimité par la Dernière Surface Magnétique Fermée (DSMF).

Dans la *configuration limiteur*, la DSMF est définie par un point de contact avec un objet matériel, appelé limiteur. Dans le bord du tokamak, les lignes de champ magnétique sont ouvertes et rencontrent le limiteur (c.f. fig. 3). Le tokamak Tore Supra [1] présente

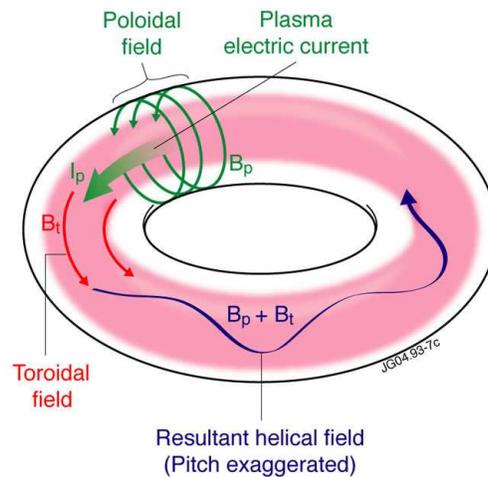


FIGURE 2 – Champ magnétique dans un tokamak [3].

notamment cette configuration.

Les particules qui se trouvent dans le bord du plasma vont poursuivre leur trajectoire le long des lignes de champ magnétique jusqu'à entrer en collision avec ce limiteur. Ces collisions ont un impact important sur la paroi du limiteur. En effet, celle-ci va émettre des impuretés qui peuvent polluer le plasma central et ainsi limiter la performance de la machine.

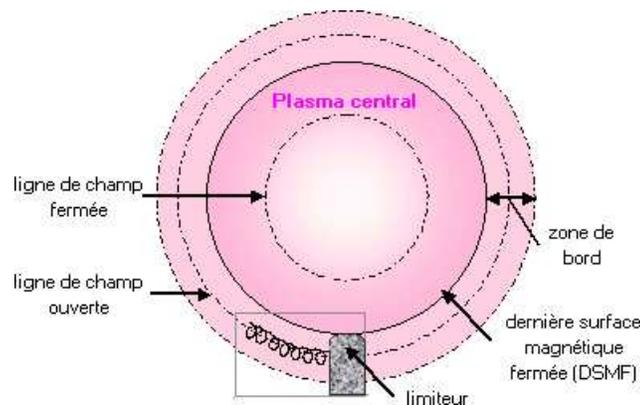


FIGURE 3 – Configuration limiteur d'un tokamak [1].

Une autre configuration appelée *configuration divertor* ou *configuration à point X* (c.f. fig. 4) a été envisagée pour limiter cette pollution du plasma par les impuretés provenant du limiteur. L'idée est d'éloigner du coeur du plasma le contact plasma-paroi. Dans ce but, une bobine est rajoutée dans le tokamak pour modifier la configuration magnétique. La DSMF n'est alors plus définie par un point de contact avec un objet solide mais par

une frontière magnétique, appelée *séparatrice*. Celle-ci se caractérise par le fait qu'elle se croise en un point appelé *point X*.

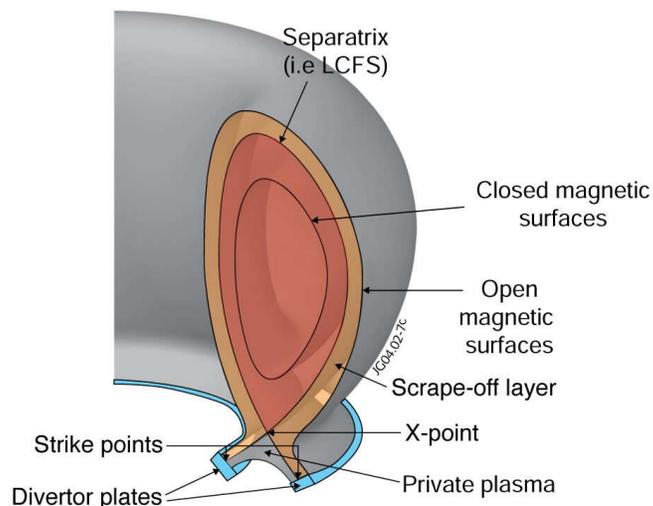


FIGURE 4 – Configuration divertor d'un tokamak [3].

Ainsi, le contact plasma-paroi se trouvant éloigné du coeur, les impuretés provoquées par les collisions ont moins de risques d'impacter le coeur du plasma. Dans cette configuration, on parle de *plaques de neutralisation* pour les parois qui reçoivent les particules. La partie délimitée par les plaques de neutralisation et le point X à l'intérieur de la séparatrice est qualifiée de *zone privée*.

Cette configuration divertor est notamment utilisée dans le tokamak JET [3]. C'est la configuration envisagée actuellement pour ITER [4], c.f. fig. 5.

Les côtés intérieur et extérieur dans le plan poloïdal sont qualifiés de côtés à champ fort et à champ faible, ces qualificatifs se référant à l'intensité du champ magnétique qui y circule. En effet, le champ magnétique est essentiellement proportionnel à $1/R$, R étant la distance par rapport à l'axe du tokamak. Ainsi, pour la partie du tokamak se situant le plus près de l'axe, on parle de côté à champ fort et pour celle se situant à l'extérieur du tore, de côté à champ faible.

Dans ces deux configurations, la DSMF délimite la *Scrape-Off Layer* (SOL), zone dans laquelle les lignes de champ magnétique sont ouvertes contrairement au coeur du plasma, dans lequel celles-ci sont fermées. Dans la suite de ce travail, nous qualifierons de bord du plasma, la SOL ainsi que la partie correspondant aux surfaces magnétiques fermées les plus externes du coeur. Cette partie du tokamak est celle qui nous intéressera dans le cadre de ce travail. En effet, des phénomènes complexes peuvent avoir lieu au bord du plasma, notamment à cause de l'interaction plasma-paroi que l'on vient d'évoquer dans

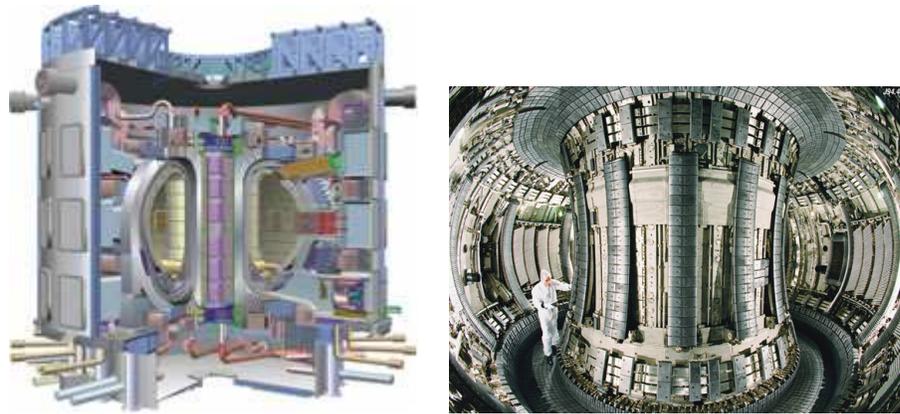


FIGURE 5 – Tokamaks ITER (gauche) [4] et JET (droite) [3]

les configurations limiteur et divertor.

Plan

Ce travail est divisé en 5 chapitres.

Dans le chapitre 1, on présente le modèle mathématique utilisé dans ce travail. Le modèle le plus complet pour décrire un plasma consisterait à expliciter le mouvement de chacune de ses particules. Cependant, étant donné le nombre important de particules qui constitue le plasma, cette description s'avère bien trop coûteuse pour des simulations numériques. Des modèles approchés, dérivant de cette description sont donc nécessaires car il est essentiel d'atteindre une précision suffisante pour un coût de calcul raisonnable. Certaines de ces approches sont notamment données dans la section 1.1.

Dans le cadre de ce travail, une approche fluide fondée sur des relations de fermeture de type Braginskii [14] est utilisée. Elle consiste à assimiler chaque espèce de particules à un fluide, caractérisé par une densité, une vitesse et une énergie. Après avoir présenté ce modèle, dérivé de l'équation cinétique de Vlasov-Boltzmann, on introduit les relations de fermeture de Braginskii. Celles-ci montrent en particulier que les phénomènes de diffusion et de viscosité ont un caractère fortement anisotrope suivant les lignes de champ magnétique.

Dans le chapitre 2, nous nous attachons à étudier les effets de l'anisotropie de la diffusion suivant les lignes de champ magnétique. Une équation de la chaleur présentant cette caractéristique est modélisée par éléments finis P_1 . Différents résultats sont présentés tout d'abord sur des problèmes modèles. Dans un second temps, on considère un modèle de rayonnement non-linéaire et avec diffusion anisotrope. Différentes simulations numériques sur les plasmas de bord des tokamaks de type Tore Supra et ITER sont présentées.

Dans le troisième chapitre, nous considérons un modèle de type Navier-Stokes avec un terme de forçage stationnaire que nous approximons par une méthode de volumes finis. Le terme de forçage permet d'assurer le confinement du plasma et représente la force magnétique $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ qui n'est pas dans le cadre de ce modèle explicitement calculée. Ce point s'avère délicat à traiter car dans le modèle étudié, ce champ de force est considéré indépendant du temps et donc la solution stationnaire du problème est difficile à maintenir. Différentes méthodes sont proposées pour le modéliser. Tout d'abord, une modélisation sous la forme de terme force a montré un déséquilibre artificiel du plasma dû à la différence de discrétisation des termes de transport et de ce terme de forçage. Cette première conclusion a alors conduit à l'implémentation d'un nouveau solveur de Riemann afin de résoudre le problème. Pour finir, une dernière méthode consistant à évaluer numériquement le flux associé à ce terme de forçage a été mise en place.

Les différentes conditions aux limites utilisées dans le cadre de ce travail sont également présentées. En particulier, on s'intéresse aux conditions aux limites de Bohm [24, 42, 51], représentant les interactions plasma-paroi. Ces conditions aux limites sont inhabituelles en mécanique des fluides et s'avèrent complexes à traiter. Celles-ci modélisent le fait que les particules qui se trouvent dans la SOL peuvent sortir du tokamak (aux limiteurs ou aux plaques du divertor selon la configuration étudiée) à une vitesse sonique, voire même supersonique.

Dans le quatrième chapitre, la géométrie torique du tokamak nous a conduit à nous interroger sur la modélisation volumes finis dans une géométrie cylindrique. Usuellement, ceci revient à traiter les termes de courbure en termes sources. Toutefois, dans l'esprit de [12], une autre approche est étudiée ici, en considérant comme volume élémentaire la cellule engendrée par rotation autour de l'axe du tokamak d'une cellule bidimensionnelle, d'où une formulation conservative des équations. Ceci conduit à l'apparition naturelle des termes propres à la géométrie cylindrique. Une application à la géométrie axisymétrique est étudiée et des résultats sont présentés pour comparer les deux approches sur un cas test.

Le dernier chapitre rassemble les développements numériques des chapitres 3 et 4 et présente un ensemble de résultats de simulation. Dans un premier temps, les simulations sont effectuées sur les systèmes Euler, Navier-Stokes et Braginskii pour une géométrie de type Tore-Supra. Les résultats obtenus avec la méthode de volumes-éléments finis sont notamment comparés avec une méthode d'éléments spectraux.

Dans un second temps, on étudie l'influence du terme de forçage et des résultats obtenus avec les différentes méthodes, décrites chapitre 4 sont comparés, sur des géométries de type Tore-Supra (configuration limiteur) et JET (configuration en point X). Ensuite, on étudie l'évolution du système suite à certaines perturbations de l'état d'équilibre afin de vérifier sa stabilité.

Pour finir, on simule l'alimentation en matière du tokamak par injections de pellets. Afin de prolonger la production d'énergie, il est en effet nécessaire de réalimenter le tokamak en matière au cours du processus. Une méthode envisagée consiste à injecter à grandes vitesses de la matière enrobée dans une couche externe et qui disparaît dans le plasma de

bord, permettant ainsi aux particules de pénétrer dans le coeur du plasma. La modélisation de ce procédé est effectuée en considérant un terme source de masse localisé et là encore, nous simulons l'instabilité qui se développe suite à l'injection de pellets.

Les développements numériques de ce travail ont été effectués au sein du logiciel FluidBox-PlaTo [5].

Le travail présenté a été cofinancé par l'INRIA Sophia-Antipolis et par le Conseil Régional PACA, avec l'entreprise ASSYSTEM, comme partenaire industriel. Il a été effectué au sein de l'INRIA Sophia-Antipolis et du laboratoire Dieudonné de Nice. Ce travail a été effectué dans le cadre du projet de la FR-FCM « Two-fluid numerical modelling of edge plasma in tokamaks ; application to ITER », de l'ANR ESPOIR et de l'Action d'Envergure FUSION de l'INRIA.

Chapitre 1

Modèle fluide

Cette première partie s'attache en premier lieu à décrire le système d'équations sur lequel s'appuiera le reste du travail. Le point de départ en est un modèle cinétique, reposant sur l'équation de Boltzmann et décrivant le mouvement de particules chargées dans un champ électromagnétique. Ce modèle cinétique permet d'obtenir la « description fluide » qui nous intéresse dans le cadre de ce travail.

On donne d'abord une présentation succincte des principales approches de modélisation du plasma et le passage du modèle cinétique au modèle fluide (e.g. [7, 28]) est décrit. Le système fluide obtenu nécessitant des relations de fermeture pour les termes diffusifs et visqueux, les relations établies par Braginskii [14] sont étudiées. Finalement, le chapitre se termine par l'adimensionnement du système et par quelques évaluations numériques dans le cadre de la fusion par confinement magnétique et en particulier, dans le cas des tokamaks ITER et JET.

1.1 Approches de modélisation du plasma

Différentes méthodes de modélisation du plasma existent et sont notamment décrites et comparées dans [15, 55]. Celles-ci sont construites sur des descriptions particulière, statistique ou fluide, selon les phénomènes observés ou les hypothèses envisagées. On s'attache ici à donner une description succincte des principales approches.

1.1.1 Description particulière

Le plasma est par définition constitué d'un ensemble de particules. Ainsi, la première idée pour modéliser le plasma consiste à décrire le mouvement de chacune de ces particules, sachant que celles-ci sont soumises à un champ électromagnétique, décrit par les équations de Maxwell.

Toutefois, dans la pratique, cette méthode n'est pas envisageable. En effet, le nombre important de particules qui constitue le plasma (de l'ordre de 10^{23} pour ITER) ne permet pas d'envisager cette solution. Cette description microscopique s'avèrerait bien trop coûteuse pour des simulations numériques. Une description statistique est donc préférable à une description mécanique exhaustive pour modéliser le plasma.

1.1.2 Description statistique

L'approche statistique ou cinétique consiste à ne plus considérer chaque particule individuellement mais plutôt la fonction de distribution associée $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. Celle-ci mesure la probabilité de trouver une particule de l'espèce s dans le volume infinitésimal de dimensions 6, $(\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{v})$ dans le voisinage de (\mathbf{x}, \mathbf{v}) . L'équation que satisfait cette fonction de distribution est l'équation de Vlasov-Boltzmann :

$$\partial_t f_s + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_s + \frac{1}{m_s} \mathbf{F}_s \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s = C_s, \quad (1.1)$$

avec \mathbf{F}_s , la force de Lorentz exercée sur une particule d'espèce s , de masse m_s et C_s , un terme de collision.

L'équation de Boltzmann peut notamment être obtenue à partir de la description particulaire du plasma (c.f. [39, 18]).

Cette description cinétique reste encore très coûteuse à modéliser. En effet, la fonction de distribution est décrite dans un espace des phases à 6 dimensions.

Modèle gyrocinétique

Une première simplification de cette description statistique est l'approche gyrocinétique [22, 9]. Celle-ci consiste à réduire l'espace des phases pour l'équation de Boltzmann à 5 dimensions : 3 en espace et 2 en vitesse. En effet, chaque particule effectue un mouvement cyclotronique très rapide le long des lignes de champ magnétique. L'idée est alors de décrire la dynamique du « gyrocentre » (c.f. fig 1.1) à travers ses 3 coordonnées spatiales, sa vitesse parallèle aux lignes de champ magnétique et le moment magnétique :

$$\mu = \frac{m_s v_{\perp}^2}{2B}, \quad (1.2)$$

avec v_{\perp} , la vitesse perpendiculaire au champ magnétique, d'où la réduction à 5 dimensions (plus la dimension en temps) de la fonction de distribution :

$$f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \Rightarrow f_s(\mathbf{x}, v_{\parallel}, \mu, t). \quad (1.3)$$

Cette approche est pertinente notamment pour décrire un plasma faiblement collisionnel. C'est en particulier le cas dans le coeur du tokamak. Ce modèle est notamment utilisé dans les codes gyrocinétiques GYSELA [32, 31] ou ELMFIRE [37].

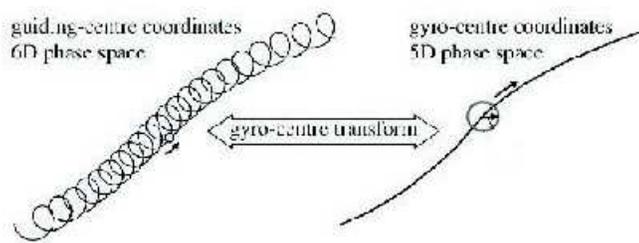


FIGURE 1.1 – Gyrocentre[30]

1.1.3 Description fluide

Modèle fluide

L'utilisation d'une description fluide du plasma (e.g. [7, 28]) permet de réduire encore le nombre de degrés de liberté du problème. Ce type d'approche est notamment approprié dans le cas d'un plasma fortement collisionnel. Dans le cas faiblement collisionnel, cette méthode n'est pas efficace et par conséquent l'approche gyrocinétique reste privilégiée.

La modélisation fluide décrit le plasma comme un fluide chargé. Elle consiste donc à ne plus considérer la fonction de distribution mais les moments de celle-ci. Le moment d'ordre 0 est alors la densité, celui d'ordre 1 la quantité de mouvement et celui d'ordre 2, l'énergie. Les différents moments de l'équation de Boltzmann permettent d'obtenir des équations pour chacune de ces grandeurs. Toutefois, la dynamique du moment d'ordre 0 est couplée au moment d'ordre 1, celle d'ordre 1 est couplée à celui d'ordre 2 etc... Il est donc nécessaire de faire intervenir des relations afin de fermer le système.

Braginskii [14] propose une fermeture pour ce système en s'appuyant sur la propriété physique selon laquelle la fonction de distribution approche une fonction Maxwellienne à l'équilibre thermodynamique :

$$f_M(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{n}{(2\pi T/m)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2T/m}\right). \quad (1.4)$$

Cette modélisation conduit à un système de 5 équations (densité, énergie et 3 composantes pour la vitesse) pour chacune des espèces (électrons et ions). A ces équations, s'ajoutent les équations de Maxwell, permettant de décrire le champ électrique \mathbf{E} et le champ magnétique \mathbf{B} .

Ce passage du cinétique au modèle fluide est notamment détaillé section 1.2.

Une simplification usuelle consiste à considérer l'hypothèse de quasineutralité :

$$n_e = Zn_i. \quad (1.5)$$

Approche des vitesses de dérive

Une réduction de ce modèle fluide repose sur l'approche des vitesses de dérive. Celle-ci est pertinente dans le cas d'une évolution lente du plasma par rapport à la fréquence cyclotronique, $f_{c,i} = \omega_{c,i}/2\pi : t \gg \frac{1}{f_{c,i}}$.

Cette méthode permet de réduire le système fluide à 3 équations pour chacune des espèces, en plus des équations de Maxwell pour \mathbf{E} et \mathbf{B} . En effet, pour la vitesse, seule reste sa composante parallèle. Un développement selon le paramètre $\frac{\omega}{\omega_c} \ll 1$ de l'équation du mouvement permet d'exprimer les composantes de la vitesse perpendiculaire en fonction des autres grandeurs. En ne considérant pas le mouvement cyclotronique ici, la vitesse perpendiculaire devient :

$$\mathbf{u}_\perp = \frac{\omega}{\omega_c}(\mathbf{u}_E + \mathbf{u}_*) + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \mathbf{u}_p, \quad (1.6)$$

où \mathbf{u}_E est la vitesse de dérive électrique, \mathbf{u}_* , celle de dérive diamagnétique et \mathbf{u}_p , celle de dérive de polarisation.

Ces différentes vitesses de dérive sont alors exprimées en fonction des autres grandeurs, d'où la réduction de la dimension du système. Cette méthode est notamment détaillée dans [60]. Les codes TOKAM-3D [61] et SOLEDGE-2D [42] reposent notamment sur cette approche.

Magnétohydrodynamique ou MHD

La MHD ([21, 15]) est une autre approche du modèle fluide. Ce modèle est pertinent pour les phénomènes magnétiques lents et à grande échelle :

$$t \gg \frac{1}{f_p} \text{ et } L \gg \lambda_{Debye}, \quad (1.7)$$

avec $f_p = \omega_p/2\pi$ et λ_{Debye} , respectivement la fréquence du plasma et la longueur de Debye. Ce modèle utilise aussi l'hypothèse de quasineutralité.

Cette méthode consiste à étudier la dynamique d'un fluide unique. En premier lieu, on considère une densité et une vitesse globales :

$$\rho = n_e m_e + \sum Z n_i m_i; \quad \mathbf{V} = \frac{n_e m_e \mathbf{V}_e + \sum Z n_i m_i \mathbf{V}_i}{n_e m_e + \sum Z n_i m_i} \quad (1.8)$$

Pour finir, on considère la pression totale et la densité de courant :

$$P = P_e + P_i, \quad \mathbf{J} = \sum Z n_i e \mathbf{V}_i - n_e e \mathbf{V}_e \quad (1.9)$$

Les équations gouvernant ces différentes variables sont obtenues à partir des équations du modèle fluide en considérant que l'inertie est dominée par les ions ($m_e/m_i \ll 1$). En particulier, le courant est obtenu par la loi d'Ohm :

$$\mathbf{J} = \eta(\mathbf{E} + \mathbf{V} \wedge \mathbf{B}) \quad (1.10)$$

où η correspond à la conductivité.

Par conséquent, ce modèle MHD permet de réduire le nombre d'inconnues du système à 5 : (ρ, P, \mathbf{V}) auquel se rajoute le champ magnétique, soit un total de 8 inconnues.

Une autre approximation peut être envisagée, qualifiée de MHD idéale. Celle-ci est utilisée dans le cas de plasmas chauds. La conductivité est alors considérée comme infinie et l'équation (1.10) est simplifiée :

$$0 = \mathbf{E} + \mathbf{V} \wedge \mathbf{B} \quad (1.11)$$

Ce système a toujours 8 inconnues : $(\rho, P, \mathbf{V}, \mathbf{B})$.

1.2 Du cinétique à la description fluide

1.2.1 Equation de Boltzmann

Considérons le plasma constitué d'un mélange d'électrons et d'ions. Rappelons que dans ce cas, l'état du plasma nous est donné grâce à la fonction de distribution $f_s(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ permettant de mesurer la probabilité de trouver une particule de l'espèce s dans un volume infinitésimal de dimensions δ , $(\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{v})$, autour de (\mathbf{x}, \mathbf{v}) , l'indice s se référant soit aux électrons, soit aux ions. Cette fonction de distribution est donnée par l'équation de Vlasov-Boltzmann suivante :

$$\partial_t f_s + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_s + \frac{1}{m_s} \mathbf{F}_s \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s = C_s, \quad (1.12)$$

où \mathbf{F}_s est la force exercée sur une particule d'espèce s , de masse m_s , localisée en \mathbf{x} avec une vitesse \mathbf{v} et C_s , le terme de collision. En présence d'un champ électromagnétique (\mathbf{E} le champ électrique, \mathbf{B} le champ magnétique), la force s'exprime comme une force de Lorentz, à savoir :

$$\mathbf{F}_s = Z_s e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}), \quad (1.13)$$

où $Z_s e$ est la charge d'une particule s avec e , la charge élémentaire ($e = 1.60 \cdot 10^{-19} C$).

Dans le cas où le terme de collision est nul dans (1.12), l'équation dite de Vlasov est obtenue :

$$\partial_t f_s + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_s + \frac{1}{m_s} \mathbf{F}_s \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s = 0. \quad (1.14)$$

L'équation de Boltzmann peut facilement être réécrite cette fois sous forme conservative :

$$\partial_t f_s + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v} f_s) + \frac{1}{m_s} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{F}_s f_s) = C_s. \quad (1.15)$$

Remarque 1.1 *Quelques propriétés du terme de collision*

Dans l'équation de Boltzmann (1.12) le terme C_s représente les effets de collisions. Les particules de l'espèce s peuvent se rencontrer entre elles ou avec des particules d'autres espèces. Par conséquent, le terme C_s peut s'écrire sous la forme :

$$C_s := \sum_{s'} C_{ss'}(f_s, f_{s'}). \quad (1.16)$$

En négligeant les collisions qui transforment une particule d'une espèce en une particule d'une autre espèce, le terme de collision satisfait la conservation de la masse :

$$\int_{\mathbb{R}^3} C_{ss'} d\mathbf{v} = 0. \quad (1.17)$$

De cette façon, le résultat suivant est obtenu avec (1.16) :

$$\int_{\mathbb{R}^3} C_s d\mathbf{v} = 0. \quad (1.18)$$

Si l'on considère que la quantité de mouvement et l'énergie sont conservées dans une collision entre particules de même espèce, les relations suivantes peuvent être données :

$$\int_{\mathbb{R}^3} m_s \mathbf{v} C_{ss} d\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (1.19)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_s v^2}{2} C_{ss} d\mathbf{v} = 0.$$

Alors qu'entre particules d'espèces différentes s and s' , nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}^3} m_s \mathbf{v} C_{ss'} d\mathbf{v} + \int_{\mathbb{R}^3} m_{s'} \mathbf{v} C_{s's} d\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (1.20)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_s v^2}{2} C_{ss'} d\mathbf{v} + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_{s'} v^2}{2} C_{s's} d\mathbf{v} = 0.$$

Au final, les relations suivantes peuvent être déduites des précédents résultats (1.19) et (1.20) avec la définition (1.16) :

$$\sum_s \int_{\mathbb{R}^3} m_s \mathbf{v} C_s d\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (1.21)$$

$$\sum_s \int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_s v^2}{2} C_s d\mathbf{v} = 0.$$

1.2.2 Description Fluide

Dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons à une description fluide du plasma qui consiste à ne plus considérer les fonctions de distributions mais leurs moments, définis par des moyennes statistiques sur l'espace des vitesses.

Définition des moments

Pour commencer, les premiers moments de la fonction de distribution, $f_s(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ vont être définis. Pour alléger les notations, l'opérateur $\langle \cdot \rangle$ suivant sera utilisé :

$$\langle \psi \rangle := \frac{1}{n_s} \int_{\mathbb{R}^3} \psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) f_s(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (1.22)$$

Le moment d'ordre 0 de la fonction de distribution est la densité moyenne de particules :

$$n_s(t, \mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^3} f_s(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (1.23)$$

La vitesse moyenne, $\mathbf{u}_s(t, \mathbf{x})$ de l'ensemble des particules se trouvant en \mathbf{x} , à l'instant t , considérée comme le moment d'ordre 1 est donnée par :

$$\mathbf{u}_s(t, \mathbf{x}) := \frac{1}{n_s} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f_s(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle. \quad (1.24)$$

Pour finir, le moment d'ordre 2 est l'énergie e_s :

$$e_s := \frac{1}{2} \frac{1}{n_s} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v}^2 f_s(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}^2 \rangle. \quad (1.25)$$

Pour trouver les équations qui gouvernent ces différentes grandeurs, les différents moments de l'équation de Boltzmann (1.15) vont être considérés.

Equation de la densité

Le moment d'ordre 0 de l'équation de Boltzmann est pris tout d'abord, autrement dit intégrons par rapport à la variable \mathbf{v} l'équation (1.15). Sachant que les variables t , \mathbf{x} et \mathbf{v} sont indépendantes, on obtient :

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} f_s d\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} \cdot f_s d\mathbf{v} + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \left(\frac{\mathbf{F}_s}{m_s} f_s \right) d\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^3} C_s d\mathbf{v}, \quad (1.26)$$

Le troisième terme de cette équation est nul grâce au théorème de Green car la fonction de distribution tend vers 0 quand les v_i tendent vers l'infini.

Par ailleurs, en utilisant les définitions (1.23) et (1.24) et la propriété du terme de collision (1.18), l'équation de conservation de la densité ou équation de continuité est obtenue :

$$\partial_t n_s + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = 0. \quad (1.27)$$

Equation de la vitesse

Maintenant, le moment d'ordre 1 de (1.15) est considéré. Pour cela, dans un premier temps, l'équation (1.15) est multipliée par $m_s v_i$, v_i et $F_{s,i}$ étant respectivement les i èmes composantes de la vitesse \mathbf{v} et de la force \mathbf{F}_s et en développant les divergences :

$$m_s v_i \partial_t f_s + m_s v_i \partial_{x_j} (v_j f_s) = -m_s v_i \partial_{v_j} (F_{s,j} f_s) + m_s v_i C_s. \quad (1.28)$$

Ensuite, ce résultat est intégré par rapport à \mathbf{v} , le troisième terme devient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} -m_s v_i \partial_{v_j} (F_{s,j} f_s) d\mathbf{v} &= -m_s \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_{v_j} (v_i F_{s,j} f_s) - F_{s,j} f_s \partial_{v_j} v_i) d\mathbf{v} \\ &= m_s \int_{\mathbb{R}^3} F_{s,j} f_s \partial_{v_j} v_i d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Ainsi l'équation (1.28) intégrée par rapport à \mathbf{v} donne, avec (1.29) :

$$m_s \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} v_i f_s d\mathbf{v} + m_s \partial_{x_j} \int_{\mathbb{R}^3} v_i v_j f_s d\mathbf{v} = m_s \int_{\mathbb{R}^3} F_{s,j} f_s \partial_{v_j} v_i d\mathbf{v} + \mathbf{R}_s. \quad (1.30)$$

\mathbf{R}_s représente le moment qui résulte des collisions entre particules de différentes espèces :

$$\mathbf{R}_s := \int_{\mathbb{R}^3} m_s \mathbf{v} C_s d\mathbf{v}. \quad (1.31)$$

En reprenant les définitions (1.22) et (1.24) et en sommant sur les différentes composantes, i données par (1.30), le second moment de l'équation de Boltzmann est alors obtenu :

$$\partial_t m_s n_s \mathbf{u}_s + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (m_s n_s \langle \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \rangle) = n_s \mathbf{F}_s + \mathbf{R}_s. \quad (1.32)$$

D'autre part, il est classique de décomposer la vitesse \mathbf{v} en deux vitesses : la vitesse moyenne \mathbf{u}_s définie en (1.24) et une fluctuation \mathbf{v}' telle que $\langle \mathbf{v}' \rangle = 0$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_s + \mathbf{v}'. \quad (1.33)$$

Par conséquent,

$$\langle \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}_s \otimes \mathbf{u}_s + \langle \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}' \rangle. \quad (1.34)$$

Le tenseur de pression P_s , qui mesure l'écart quadratique entre la vitesse moyenne, \mathbf{u}_s , et la vitesse particulière, \mathbf{v} , est donc défini par :

$$P_s := \int_{\mathbb{R}^3} m_s \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}' f_s(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (1.35)$$

Il peut encore être écrit sous la forme :

$$(P_s)_{ij} = p_s \delta_{ij} + (\sigma_s)_{ij}, \quad (1.36)$$

où δ_{ij} , le symbole de Kronecker et σ_s , le tenseur de pression diminué de sa composante isotrope p_s , la pression scalaire.

L'équation devient alors avec ces dernières définitions :

$$\partial_t m_s n_s \mathbf{u}_s + \nabla_x \cdot (m_s n_s \mathbf{u}_s \otimes \mathbf{u}_s + P_s) = n_s \mathbf{F}_s + \mathbf{R}_s. \quad (1.37)$$

Equation de l'énergie

Le moment d'ordre 2 est obtenu en multipliant par $\frac{1}{2}m_s \mathbf{v}^2$ et en intégrant par rapport à la vitesse. En utilisant l'indépendance des variables, l'équation suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}m_s \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v}^2 \cdot f_s d\mathbf{v} + \frac{1}{2}m_s \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v}^2 \mathbf{v} \cdot f_s d\mathbf{v} \\ &= -\frac{1}{2}m_s \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{F}_s f_s) - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_s f_s) d\mathbf{v} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} m_s \mathbf{v}^2 C_s d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

En utilisant les définitions précédentes (1.22) et (1.25) et des moments et la définition de la force de Lorentz (1.13), on obtient au final :

$$\partial_t m_s n_s e_s + \nabla_x \cdot \left(\frac{m_s n_s}{2} \langle \mathbf{v}^2 \mathbf{v} \rangle \right) = Z_s e n_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_s + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{m_s \mathbf{v}^2}{2} C_s d\mathbf{v}. \quad (1.39)$$

En reprenant la décomposition de la vitesse donnée par (1.33), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}^2 \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{v}^2 (\mathbf{v}' + \mathbf{u}_s) \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}^2 \mathbf{v}' \rangle + 2e_s \mathbf{u}_s \\ &= \langle \mathbf{v}'^2 \mathbf{v}' \rangle + \mathbf{u}_s^2 \langle \mathbf{v}' \rangle + 2\mathbf{u}_s \langle \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}' \rangle + 2e_s \mathbf{u}_s \\ &= \frac{2}{m_s n_s} \mathbf{q}_s + \frac{2}{m_s n_s} P_s \mathbf{u}_s + 2e_s \mathbf{u}_s, \end{aligned}$$

où le flux de chaleur \mathbf{q}_s est donné par :

$$\mathbf{q}_s := \frac{m_s}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v}'^2 \mathbf{v}' f_s(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (1.40)$$

On obtient alors l'équation finale pour l'énergie :

$$\partial_t m_s n_s e_s + \nabla_x \cdot (m_s n_s e_s \mathbf{u}_s + P_s \cdot \mathbf{u}_s) = -\nabla_x \cdot \mathbf{q}_s + Z_s e n_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_s + \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{u}_s + Q_s. \quad (1.41)$$

Q_s représente la chaleur générée par l'espèce s à cause des collisions avec les autres particules :

$$Q_s := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} m_s \mathbf{v}^2 C_s d\mathbf{v}. \quad (1.42)$$

Système cinétique

Le système final complet est le suivant, en introduisant la densité volumique, $\rho_s = m_s n_s$:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_s + \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{u}_s) &= 0 \\ \partial_t \rho_s \mathbf{u}_s + \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{u}_s \otimes \mathbf{u}_s + P_s) &= Z_s e n_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{R}_s \\ \partial_t \rho_s e_s + \nabla \cdot (\rho_s e_s \mathbf{u}_s + P_s \cdot \mathbf{u}_s) &= -\nabla \cdot \mathbf{q}_s + Z_s e n_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_s + \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{u}_s + Q_s \end{aligned} \quad (1.43)$$

Il peut encore être écrit sous la forme non conservative :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_s + \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{u}_s) &= 0 \\ \rho_s \partial_t \mathbf{u}_s + \rho_s (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{u}_s + \nabla \cdot (P_s) &= Z_s e n_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{R}_s \\ \rho_s \partial_t e_s + \rho_s \mathbf{u}_s \cdot \nabla e_s + \nabla \cdot (P_s \cdot \mathbf{u}_s) &= -\nabla \cdot \mathbf{q}_s + Z_s e n_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_s + \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{u}_s + Q_s \end{aligned} \quad (1.44)$$

1.2.3 Les équations d'évolution

Dans le cadre de ce travail, l'hypothèse de quasineutralité du plasma va être prise en compte :

$$n_e = Z n_i. \quad (1.45)$$

Par conséquent, l'équation de continuité pour les ions va être considérée :

$$\partial_t \rho_i + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u}_i) = 0 \quad (1.46)$$

Le système cinétique (1.43) donne les équations de quantité de mouvement pour chacune des espèces :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_e \mathbf{u}_e + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{u}_e \otimes \mathbf{u}_e + P_e) &= -e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{R}_e \\ \partial_t \rho_i \mathbf{u}_i + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i + P_i) &= Z_i e n_i (\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{R}_i \end{aligned} \quad (1.47)$$

Toutefois, en utilisant l'hypothèse de quasineutralité et en remarquant que $m_i \gg m_e$, dans le but de sommer les deux équations de quantité de mouvement, certains termes de l'équation pour les électrons peuvent être négligés :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot P_e &= -e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{R}_e \\ \partial_t \rho_i \mathbf{u}_i + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i + P_i) &= e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{R}_i \end{aligned} \quad (1.48)$$

Ainsi, en rappelant que d'après (1.21), $\mathbf{R}_e + \mathbf{R}_i = 0$, l'addition de ces deux équations donne l'équation sur la quantité de mouvement des ions qui nous intéresse :

$$\partial_t(\rho_i \mathbf{u}_i) + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i + P_i + P_e) = \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} \quad (1.49)$$

en notant le courant $\mathbf{J} = Zn_i e(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$

L'équation sur le courant peut aussi être obtenue en additionnant les équations (1.47) pondérées par q_s/m_s , q_s étant la charge de la particule s :

$$\partial_t \mathbf{J} + \sum_s \nabla \cdot (q_s n_s \mathbf{u}_s \otimes \mathbf{u}_s + \frac{q_s}{m_s} P_s) = \sum_s \frac{q_s^2}{m_s} n_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \wedge \mathbf{B}) + \sum_s \frac{q_s}{m_s} \mathbf{R}_s \quad (1.50)$$

L'équation pour l'énergie s'obtient en sommant les deux équations d'énergie. De la même façon que précédemment, certains termes issus de l'équation sur les électrons peuvent être négligés en remarquant que $m_i \gg m_e$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (P_e \cdot \mathbf{u}_e) &= -\nabla \cdot \mathbf{q}_e - en_e \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_e + \mathbf{R}_e \cdot \mathbf{u}_e + Q_e \\ \partial_t \rho_i e_i + \nabla \cdot (\rho_i e_i \mathbf{u}_i + P_i \cdot \mathbf{u}_i) &= -\nabla \cdot \mathbf{q}_i + en_e \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_i + \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{u}_i + Q_i \end{aligned} \quad (1.51)$$

Sachant que d'après (1.21), $Q_e + Q_i = 0$, la somme de ces équations sur l'énergie nous donne alors :

$$\partial_t \rho_i e_i + \nabla \cdot (\rho_i e_i \mathbf{u}_i + P_i \cdot \mathbf{u}_i + P_e \cdot \mathbf{u}_e) = -\nabla \cdot (\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_e) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{u}_i + \mathbf{R}_e \cdot \mathbf{u}_e \quad (1.52)$$

et que d'après la loi d'Ohm, dans le cas de la MHD idéale :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u}_i \wedge \mathbf{B}, \quad (1.53)$$

l'équation d'énergie devient finalement :

$$\partial_t \rho_i e_i + \nabla \cdot (\rho_i e_i \mathbf{u}_i + P_i \cdot \mathbf{u}_i + P_e \cdot \mathbf{u}_e) = -\nabla \cdot (\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_e) + (\mathbf{J} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_i + \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{u}_i + \mathbf{R}_e \cdot \mathbf{u}_e \quad (1.54)$$

Ainsi, au final, le système bi-fluide est le suivant :

$$\partial_t \rho_i + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u}_i) = 0$$

$$\partial_t(\rho_i \mathbf{u}_i) + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i + P_i + P_e) = \mathbf{J} \wedge \mathbf{B}$$

$$\partial_t \mathbf{J} + \sum_s \nabla \cdot (q_s n_s \mathbf{u}_s \otimes \mathbf{u}_s + \frac{q_s}{m_s} P_s) = \sum_s \frac{q_s^2}{m_s} n_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \wedge \mathbf{B}) + \sum_s \frac{q_s}{m_s} \mathbf{R}_s$$

$$\partial_t \rho_i e_i + \nabla \cdot (\rho_i e_i \mathbf{u}_i + P_i \cdot \mathbf{u}_i + P_e \cdot \mathbf{u}_e) + \nabla \cdot (\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_e) = (\mathbf{J} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_i + \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{u}_i + \mathbf{R}_e \cdot \mathbf{u}_e$$

$$\partial_t \rho_e e_e + \nabla \cdot (\rho_e e_e \mathbf{u}_e + P_e \cdot \mathbf{u}_e) + \nabla \cdot \mathbf{q}_e = -en_e \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_e + \mathbf{R}_e \cdot \mathbf{u}_e + Q_e$$

(1.55)

En reprenant les équations sur ρ_i , $\rho_i \mathbf{u}_i$ et $\rho_i e_i$ et en négligeant les contributions associées aux électrons, un modèle simplifié, mono-fluide sera en fait étudié dans ce travail :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P) &= \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} \\ \partial_t \rho e + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u} + P \cdot \mathbf{u}) &= -\nabla \cdot \mathbf{q} + (\mathbf{J} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1.56)$$

où le courant \mathbf{J} est supposé donné. Ce système est proche du modèle MHD. Une approche pour obtenir ce modèle est donnée en annexe B.

Remarquons que l'équation de continuité ou moment d'ordre 0 de l'équation de Vlasov fait intervenir le moment d'ordre 1 de la fonction de distribution, \mathbf{u}_s . De même, le moment d'ordre 1 de l'équation de Vlasov voit apparaître, P_s , le moment d'ordre 2 de la fonction de distribution et le moment d'ordre 2 de l'équation, \mathbf{q}_s , le moment d'ordre 3 de f_s et ainsi de suite...

Par conséquent, des relations de fermeture sont nécessaires pour boucler notre système. Pour cela, nous allons nous intéresser plus particulièrement dans ce travail aux relations de fermeture de Braginskii, [14].

1.3 Fermetures de Braginskii

Les fermetures de Braginskii reposent sur la propriété physique selon laquelle la fonction de distribution approche une fonction Maxwellienne à l'équilibre thermodynamique :

$$f_M(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{n}{(2\pi T/m)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2T/m}\right). \quad (1.57)$$

A partir d'un développement de Chapman-Enskog et dans l'hypothèse de plasmas collisionnels, la théorie de Braginskii [14] permet d'obtenir les relations de fermeture qui vont être étudiées ici :

- $\mathbf{q}_s = \mathbf{q}_s(T_s, n_s, \mathbf{u}_s)$,
- $\sigma_s = \sigma_s(\mathbf{u}_s)$.

1.3.1 Diffusion

Usuellement, en mécanique des fluides, la densité de flux de chaleur \mathbf{q} est donnée par la loi de Fourier, avec λ , la conductivité thermique du matériau :

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T. \quad (1.58)$$

Cependant, dans le cas du plasma et en présence d'un champ magnétique, les relations de fermeture de Braginskii donnent la densité de flux de chaleur \mathbf{q} qui s'exprime différemment de la loi de Fourier et qui dépend notamment du champ magnétique :

$$\mathbf{q} = -K_{\parallel} \nabla_{\parallel} T - K_{\perp} \nabla_{\perp} T + K_{\wedge} (\mathbf{b} \wedge \nabla_{\perp} T) = K \nabla T, \quad (1.59)$$

avec K , un tenseur. Les notations ∇_{\parallel} et ∇_{\perp} se réfèrent respectivement aux composantes parallèle et perpendiculaire au champ \mathbf{B} du gradient et sont définies en (1.62) et (1.64). Dans la suite du travail, le vecteur \mathbf{b} représentera le vecteur du champ magnétique normalisé :

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}. \quad (1.60)$$

Expression du tenseur de diffusion

Les différents termes de ce tenseur de diffusion vont être maintenant explicités.

L'opérateur ∇_{\parallel} est introduit :

$$\nabla_{\parallel} T = (\mathbf{b} \cdot \nabla T) \mathbf{b}. \quad (1.61)$$

Tout d'abord, le terme de diffusion parallèle au champ magnétique s'exprime alors par :

$$K_{\parallel} \nabla_{\parallel} T = K_{\parallel} \mathbf{b} \otimes \mathbf{b}^t \nabla T \quad (1.62)$$

$$= K_{\parallel} \begin{pmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3 b_3 \end{pmatrix} \nabla T. \quad (1.63)$$

où, \mathbf{b} est donné en coordonnées Cartésiennes par $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3$. Ensuite, le terme de diffusion perpendiculaire est donné par :

$$K_{\perp} \nabla_{\perp} T = K_{\perp} (I - \mathbf{b} \otimes \mathbf{b}^t) \nabla T. \quad (1.64)$$

Pour finir, le dernier terme donne :

$$\begin{aligned} K_{\wedge} (\mathbf{b} \wedge \nabla_{\perp} T) &= K_{\wedge} (\mathbf{b} \wedge \nabla T) \\ &= K_{\wedge} \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix} \nabla T. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Au final, l'expression numérique du tenseur de diffusion, K , de la formule (1.59) est obtenu, en fonction des différents coefficients de diffusion et des composantes en coordonnées Cartésiennes de \mathbf{b} :

$$K = \begin{pmatrix} (K_{\perp} - K_{\parallel})b_1 b_1 - K_{\perp} & (K_{\perp} - K_{\parallel})b_1 b_2 - b_3 K_{\wedge} & (K_{\perp} - K_{\parallel})b_1 b_3 + b_2 K_{\wedge} \\ (K_{\perp} - K_{\parallel})b_1 b_2 + b_3 K_{\wedge} & (K_{\perp} - K_{\parallel})b_2 b_2 - K_{\perp} & (K_{\perp} - K_{\parallel})b_2 b_3 - b_1 K_{\wedge} \\ (K_{\perp} - K_{\parallel})b_1 b_3 - b_2 K_{\wedge} & (K_{\perp} - K_{\parallel})b_2 b_3 + b_1 K_{\wedge} & (K_{\perp} - K_{\parallel})b_3 b_3 - K_{\perp} \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

Remarque 1.2 *Remarques sur le « terme cross ».*

Étudions le dernier terme de la densité de flux de chaleur, en utilisant certaines formules données en Annexe A et l'expression de K_\wedge donnée en (1.68) :*

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (K_\wedge(\mathbf{b} \wedge \nabla T)) &= K_\wedge \nabla \cdot (\mathbf{b} \wedge \nabla T) + \nabla K_\wedge \cdot \mathbf{b} \wedge \nabla T \\
&= K_\wedge(-\mathbf{b} \cdot \nabla \wedge (\nabla T) + \nabla \wedge \mathbf{b} \nabla T) + \nabla T \cdot \nabla K_\wedge \wedge \mathbf{b} \\
&= (K_\wedge \nabla \wedge \mathbf{b} + \nabla K_\wedge \wedge \mathbf{b}) \nabla T \\
&= \frac{5}{2} \frac{1}{\omega_c m} (nT \nabla \wedge \mathbf{b} + T \nabla n \wedge \mathbf{b}) \nabla T
\end{aligned} \tag{1.67}$$

On voit ainsi que ce dernier terme agit comme un terme de transport. Cette remarque sera d'ailleurs vérifiée numériquement dans la partie 2.2.

Dans le cadre de la « diamagnetic cancellation » [23, 59], certains termes de (1.67) se compensent avec les termes liés à la vitesse diamagnétique. L'équation sur la température obtenue à partir de l'équation d'énergie est :

$$\frac{3}{2} n \partial_t T + \frac{3}{2} n \mathbf{u} \cdot \nabla T + p \nabla \cdot \mathbf{u} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - \sigma : \nabla \mathbf{u} + Q$$

Or, la vitesse peut se décomposer de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \mathbf{u}_\parallel + \mathbf{u}_\perp \\
&= \mathbf{u}_\parallel + (\mathbf{u}_E + \mathbf{u}_*),
\end{aligned}$$

où \mathbf{u}_E est la vitesse de dérive électrique, $\mathbf{u}_ = \frac{\mathbf{b} \wedge \nabla p}{n \omega_c m}$ est la vitesse diamagnétique.*

Les termes de l'équation de température liés à la vitesse diamagnétique donnent :

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} n \mathbf{u}_* \cdot \nabla T &= -\frac{3}{2} \frac{1}{\omega_c m} T (\nabla n \wedge \mathbf{b}) \cdot \nabla T, \\
p \nabla \cdot \mathbf{u}_* &= -\frac{1}{\omega_c m} T (\nabla n \wedge \mathbf{b}) \cdot \nabla T + \frac{1}{\omega_c m} T (n \nabla T + T \nabla n) \cdot (\nabla \wedge \mathbf{b}).
\end{aligned}$$

Ainsi, les termes liés à la vitesse diamagnétique se compensent avec le terme en K_\wedge , ne laissant qu'un terme de courbure :

$$\frac{3}{2} n \mathbf{u}_* \cdot \nabla T + p \nabla \cdot \mathbf{u}_* + \nabla \cdot (K_\wedge(\mathbf{b} \wedge \nabla T)) = \frac{1}{\omega_c m} T \left(\frac{7}{2} n \nabla T + T \nabla n \right) \cdot (\nabla \wedge \mathbf{b}).$$

*. Dans cette remarque, la température est considérée en unités d'énergie (Joule).

Anisotropie de la diffusion

Braginskii donne aussi les expressions des différents coefficients de diffusion. Ici, les formules pour les ions sont données :

$$K_{\parallel} = 3.9 \frac{n_i k T_i \tau_i}{m_i}; K_{\perp} = 2 \frac{n_i k T_i}{\omega_{c,i}^2 \tau_i m_i} \text{ et } K_{\wedge} = 2.5 \frac{n_i k T_i}{\omega_{c,i} m_i}, \quad (1.68)$$

où k est la constante de Boltzmann en erg/eV[†], τ_i est le temps de collision, autrement dit le temps moyen entre collisions pour un ion et $\omega_{c,i}$, la pulsation cyclotronique.

Les formules des coefficients pour les électrons sont données dans [40], elles sont similaires, seules les constantes sont différentes.

Le temps de collision et la pulsation cyclotronique sont respectivement donnés par les formules suivantes :

$$\tau_i = \frac{3 \sqrt{m_i} (k T_i)^{3/2}}{4 \sqrt{\pi} \lambda n_i e^4} \text{ et } \omega_{c,i} = \frac{B Z e}{m_i c}. \quad (1.69)$$

Les différentes variables utilisées dans ces formules sont en unités CGS, à l'exception de la température donnée en eV et de la constante de Boltzmann, en erg/eV. L'équivalent en unités SI est donné en Annexe A. λ est le logarithme de Coulomb que l'on prend dans nos évaluations numériques égale à 15.

Les coefficients K_{\perp} et K_{\wedge} peuvent s'exprimer en fonction de K_{\parallel} :

$$K_{\perp} \simeq \frac{K_{\parallel}}{\omega_{c,i}^2 \tau_i^2} \text{ et } K_{\wedge} \simeq \frac{K_{\parallel}}{\omega_{c,i} \tau_i}. \quad (1.70)$$

Des évaluations numériques avec des valeurs de température et densité pour les plasmas, en particulier dans la géométrie d'ITER ($|\mathbf{B}| \simeq 5T$), permettent d'obtenir le tableau (1.1). Le champ magnétique varie en $1/R$ donc est différent entre le coeur et le bord du plasma à un coefficient multiplicatif près variant entre $R/(R+r) = 0.75$ et $R/(R-r) = 1.5$, où R et r , respectivement le grand et le petit rayons d'ITER. Il est pris côté champ faible pour le bord du plasma dans ce tableau.

Les valeurs du produit $\omega_c \tau$ dans l'ensemble du plasma révèlent la forte anisotropie du tenseur de diffusion suivant les lignes de champ magnétique d'après (1.70) :

$$K_{\parallel} \gg K_{\wedge} \gg K_{\perp}.$$

Des simulations numériques utilisant cette diffusion fortement anisotrope ont été menées et les résultats sont présentés dans la partie (2.2).

Notons par ailleurs, que d'après les formules (1.68) et l'expression du temps de collision (1.69), les différents coefficients présentent une non-linéarité en température. En effet,

$$K_{\parallel} \propto T^{5/2}, K_{\perp} \propto T^{-1/2} \text{ et } K_{\wedge} \propto T. \quad (1.71)$$

†. L'erg correspond à l'unité CGS de l'énergie; kT est donc homogène à une énergie.

	bord du plasma	coeur du plasma
Température en K	$5,80.10^5$	$2,3208.10^7$
Densité en m^{-3}	10^{19}	2.10^{20}
B en T	5	3,75
$\omega_{c,i}$ en s^{-1}	$4,79.10^8$	$3,59.10^8$
τ_i en s	$4,90.10^{-5}$	$6,20.10^{-4}$
$\omega_{c,i}\tau_i$	$2,35.10^4$	$2,23.10^5$

TABLE 1.1 – Ordres de grandeur des quantités caractéristiques du plasma.

1.3.2 Viscosité

La tenseur des contraintes, σ , apparaissant dans l'équation de Navier-Stokes est celui des fluides dit Newtoniens, à savoir que σ est une fonction linéaire du (double du) tenseur de déformation, W :

$$\sigma = \eta W, \quad (1.72)$$

avec W , défini par :

$$W = \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t - \left(\frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v}\right) I. \quad (1.73)$$

Comme précédemment, le tenseur des contraintes visqueuses proposé par Braginskii est différent. Il dépend notamment du champ magnétique et est donné par :

$$\sigma_{ij} = -\eta_0 \Pi_{0ij} - \eta_1 \bar{\Pi}_{1ij} - \eta_2 \bar{\Pi}_{2ij} + \eta_3 \bar{\Pi}_{3ij} + \eta_4 \bar{\Pi}_{4ij}, \quad (1.74)$$

avec, en utilisant la convention de sommation d'Einstein,

$$\begin{aligned} \Pi_{0ij} &= \frac{3}{2} (b_i b_j - \frac{1}{3} \delta_{ij}) (b_m b_n - \frac{1}{3} \delta_{mn}) W_{mn} \\ \bar{\Pi}_{1ij} &= (I_{im}^\perp I_{jn}^\perp + \frac{1}{2} I_{ij}^\perp b_m b_n) W_{mn} \\ \bar{\Pi}_{2ij} &= (I_{im}^\perp b_j b_n + I_{jn}^\perp b_i b_m) W_{mn} \\ \bar{\Pi}_{3ij} &= \frac{1}{2} (I_{im}^\perp \varepsilon_{jpn} + I_{jn}^\perp \varepsilon_{ipm}) b_p W_{mn} \\ \bar{\Pi}_{4ij} &= (b_i b_m \varepsilon_{jpn} + b_j b_n \varepsilon_{ipm}) b_p W_{mn} \end{aligned} \quad (1.75)$$

Les notations utilisées ici sont les suivantes :

- W est le tenseur de déformation donné par (1.73),
- $I^\perp = I - \mathbf{b} \otimes \mathbf{b}$,
- ε_{ijk} correspond au pseudo-tenseur de Levi-Civita.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est } (1,2,3), (2,3,1) \text{ ou } (3,1,2) \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est } (1,3,2), (2,1,3) \text{ ou } (3,2,1) \\ 0 & \text{si } i=j, j=k \text{ ou } i=k \end{cases} \quad (1.76)$$

Les tenseurs, Π_k peuvent s'écrire sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \frac{3}{2}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{b} - \frac{1}{3}I) \left[(\mathbf{b} \otimes \mathbf{b} - \frac{1}{3}I) : W \right] \\ \bar{\Pi}_1 &= W - (W \cdot \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \cdot W) + \frac{1}{2}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{b} : W)(I + \mathbf{b} \otimes \mathbf{b}) \\ \bar{\Pi}_2 &= (W \cdot \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \cdot W) - 2(\mathbf{b} \otimes \mathbf{b} : W)\mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \\ \bar{\Pi}_3 &= \frac{1}{2}(\mathbf{b} \times WI^\perp - I^\perp W \times \mathbf{b}) \\ \bar{\Pi}_4 &= (\mathbf{b} \times W(\mathbf{b} \otimes \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \otimes \mathbf{b})W \times \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (1.77)$$

où le scalaire $A : B$ représente le produit contracté, $A : B = A_{ij}B_{ji}$.

Le tenseur Π_0 peut être réécrit en utilisant la propriété de W , selon laquelle la trace de W est nulle :

$$(\mathbf{b} \otimes \mathbf{b} - \frac{1}{3}I) : W = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{b}) : W. \quad (1.78)$$

Par conséquent, le tenseur Π_0 peut aussi s'écrire :

$$\Pi_0 = \frac{3}{2}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{b} - \frac{1}{3}I)(\mathbf{b} \otimes \mathbf{b} : W). \quad (1.79)$$

Braginskii donne aussi les expressions des coefficients, η_k . Les formules données ici sont celles pour les ions :

$$\eta_0 = 0.96n_i k T_i \tau_i; \quad \eta_2 = 4\eta_1 = 1.2 \frac{n_i k T_i}{\omega_{ci}^2 \tau_i} \text{ et } \eta_4 = 2\eta_3 = \frac{n_i k T_i}{\omega_{ci}}. \quad (1.80)$$

Les formules pour les électrons sont données dans [40].

Notons qu'une remarque similaire à celle effectuée pour la diffusion peut être faite. En effet,

$$\eta_2 \simeq \frac{\eta_0}{\omega_{ci}^2 \tau_i^2} \text{ et } \eta_4 \simeq \frac{\eta_0}{\omega_{ci} \tau_i}. \quad (1.81)$$

Ainsi, d'après les évaluations données précédemment pour le produit $\omega_{ci} \tau_i$ du tableau (1.1), le terme η_0 est dominant par rapport aux deux autres :

$$\eta_0 \gg \eta_4 \gg \eta_2. \quad (1.82)$$

Par ailleurs, en utilisant les égalités, $\eta_2 = 4\eta_1$ et $\eta_4 = 2\eta_3$, certains tenseurs peuvent être regroupés. La forme finale du tenseur des contraintes visqueuses est alors :

$$\sigma = -\eta_0\Pi_0 - \eta_2\Pi_2 + \eta_4\Pi_4, \quad (1.83)$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \frac{3}{2}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{b} - \frac{1}{3}I)(\mathbf{b} \otimes \mathbf{b} : W), \\ \Pi_2 &= \frac{1}{4} \left[W + 3(W \cdot \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \cdot W) + \frac{1}{2}(I - 15\mathbf{b} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{b} \otimes \mathbf{b} : W) \right], \\ \Pi_4 &= \frac{1}{4} [M^b(W(I + 3\mathbf{b} \otimes \mathbf{b})) - ((I + 3\mathbf{b} \otimes \mathbf{b})W)M^b]. \end{aligned} \quad (1.84)$$

M^b étant le tenseur défini par :

$$M^b = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3.3 Anisotropie

Dans le but d'étudier l'anisotropie des termes de viscosité et de diffusion de Braginskii, les différents termes sont exprimés dans le système de coordonnées local (x, y, z) avec la direction z correspondant à celle du champ magnétique : $\mathbf{b} = \mathbf{e}_z$.

Dans le cas purement anisotrope, i.e. $K_\perp = K_\wedge = 0$, la densité de flux de chaleur donnée par (1.59), devient, à l'aide de (1.62) :

$$\mathbf{q} = K_\parallel \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla T = K_\parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_z T \end{pmatrix}. \quad (1.86)$$

On retrouve donc que la densité de flux thermique purement anisotrope dépend alors seulement du gradient de température dans la direction du champ magnétique.

Un raisonnement similaire peut être effectué sur le tenseur des contraintes visqueuses (1.83), comme dans [14], en exprimant les différents tenseurs (1.84) dans le même système de coordonnées.

Dans le système de coordonnées local, le tenseur Π_0 devient :

$$\begin{aligned}\Pi_0 &= \frac{3}{2}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{b} - \frac{1}{3}I)(\mathbf{b} \otimes \mathbf{b} : W) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} W_{zz}.\end{aligned}\tag{1.87}$$

Le tenseur Π_2 s'exprime alors par :

$$\begin{aligned}\Pi_2 &= \frac{1}{4} \left[W + 3(W \cdot \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \cdot W) + \frac{1}{2}(I - 15\mathbf{b} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{b} \otimes \mathbf{b} : W) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[W + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & W_{xz} \\ 0 & 0 & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & 2W_{zz} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}W_{zz} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} W_{xx} + \frac{1}{2}W_{zz} & W_{xy} & 4W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} + \frac{1}{2}W_{zz} & 4W_{yz} \\ 4W_{zx} & 4W_{zy} & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1.88}$$

Pour finir, le tenseur Π_4 devient :

$$\begin{aligned}\Pi_4 &= \frac{1}{4} [M^b(W(I + 3\mathbf{b} \otimes \mathbf{b})) - ((I + 3\mathbf{b} \otimes \mathbf{b})W)M^b] \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2W_{xy} & W_{xx} - W_{yy} & -4W_{yz} \\ W_{xx} - W_{yy} & 2W_{xy} & 4W_{xz} \\ -4W_{zy} & 4W_{zx} & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1.89}$$

L'inégalité (1.82) montre que le terme en $\eta_0\Pi_0$ domine largement les autres termes. Or pour mettre en évidence le caractère anisotrope, distinguons dans ce tenseur les parties associées au cisaillement et à la compressibilité :

$$W = \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t - \left(\frac{2}{3}\nabla \cdot \mathbf{v}\right)I = W^* - \left(\frac{2}{3}\nabla \cdot \mathbf{v}\right)I.\tag{1.90}$$

Le tenseur Π_0 devient alors avec (1.87) et cette nouvelle formulation de W , (1.90) :

$$\begin{aligned}\Pi_0 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} W_{zz}^* - \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \nabla \cdot \mathbf{v} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \partial_z v_z - \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (1.91)$$

Compte tenu de $\eta_0 \gg \eta_4 \gg \eta_2$, cette expression montre que le tenseur des contraintes visqueuses se caractérise par une forte sensibilité à $\partial_z v_z$, i.e. au gradient dans la direction du champ magnétique de la vitesse colinéaire au champ magnétique, couplée à un effet de compressibilité associé à la présence de la divergence de la vitesse.

1.4 Adimensionnement

Le système (1.56) considéré dans ce travail est rappelé :

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{S} \\ \partial_t \rho e + \nabla \cdot ((\rho e + p) \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{q} &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}\end{aligned} \quad (1.92)$$

Le terme force \mathbf{S} est donné sous la forme suivante :

$$\mathbf{S} = \mathbf{J} \wedge \mathbf{B}. \quad (1.93)$$

La densité de flux thermique de Braginskii, \mathbf{q} , qui a été étudiée plus en détails précédemment et qui présente une forte anisotropie suivant les lignes de champ magnétique et une non-linéarité, s'exprime sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= -K \nabla T \\ &= -K_{\parallel} \nabla_{\parallel} T - K_{\perp} \nabla_{\perp} T + K_{\wedge} (\mathbf{b} \wedge \nabla_{\perp} T),\end{aligned} \quad (1.94)$$

Le tenseur de viscosité est lui donné par :

$$\boldsymbol{\sigma} = -\eta_0 \Pi_0 - \eta_2 \Pi_2 + \eta_4 \Pi_4. \quad (1.95)$$

L'énergie totale est donnée par :

$$\rho e = \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \varepsilon, \quad (1.96)$$

où ρe est l'énergie totale, $\rho \varepsilon$, l'énergie interne et $\frac{1}{2} \rho u^2$, l'énergie cinétique.

1.4.1 Adimensionnement des équations

Pour adimensionner notre système, les valeurs de référence suivantes sont choisies :

- la longueur de référence (en m) : L^* ,
- la température de référence (en eV) : T^* ,
- la densité de référence (en m^{-3}) : n^* .

Les autres grandeurs de référence sont issues de ces valeurs, à savoir :

- la masse volumique de référence (en kg.m^{-3}) : $\rho^* = m_i n^*$,
- la vitesse de référence (en m.s^{-1}) : $u^* = (e_c T^* / m_i)^{\frac{1}{2} \ddagger}$
- le temps de référence (en s) : $t^* = \frac{L^*}{u^*}$,
- la pression de référence (en N.m^{-2}) : $p^* = \rho^* e^* = \rho^* u^{*2}$.

Par ailleurs, nous choisissons aussi :

- pour les flux thermiques : $q^* = \rho^* u^{*3}$,
- pour le tenseur de cisaillement : $\sigma^* = \rho^* u^{*2}$.

Le système adimensionné que l'on obtient alors est le suivant :

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{t}} \tilde{\rho} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}}) &= 0 \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) + \tilde{\nabla} \tilde{p} + \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\sigma} &= \tilde{S} \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{\rho} \tilde{e} + \tilde{\nabla} \cdot ((\tilde{\rho} \tilde{e} + \tilde{p}) \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\sigma} \tilde{\mathbf{u}}) &= \tilde{S} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (1.97)$$

Nous nous intéresserons par la suite, plus précisément à l'adimensionnement des termes de diffusion et de viscosité.

Remarque 1.3 *La loi d'état des gaz parfaits s'écrit :*

$$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon = (\gamma - 1) (\rho e - \frac{1}{2} \rho u^2), \quad (1.98)$$

avec $\gamma = \frac{5}{3}$.

Par conséquent, si on adimensionne cette loi d'état, il est nécessaire d'avoir :

$$\tilde{p} = (\gamma - 1) \tilde{\rho} \tilde{\varepsilon} = (\gamma - 1) (\tilde{\rho} \tilde{e} - \frac{1}{2} \tilde{\rho} \tilde{u}^2), \quad (1.99)$$

d'où les égalités suivantes :

$$p^* = \rho^* e^* = \rho^* u^{*2} \quad (1.100)$$

qui sont conformes à notre adimensionnement.

Au cours du calcul, on dispose des variables $\tilde{\rho}$, $\tilde{\mathbf{u}}$ et \tilde{e} qui sont adimensionnées et on veut en déduire \tilde{p} , \tilde{c}_s et \tilde{T} .

‡. $T[\text{eV}]$ correspond à une énergie de $1,6 \cdot 10^{-19} T[\text{eV}] = e_c T[\text{eV}]$.

La pression s'obtient par la formule précédente (1.99).

En ce qui concerne la température :

$$p(\text{Pa}) = ne_c T(\text{eV}) \text{ d'où } p^* \tilde{p} = n^* \tilde{n} e_c T^* \tilde{T}, \quad (1.101)$$

or

$$p^* = \rho^* u^{*2} = \rho^* \frac{T^* e_c}{m_i} = T^* n^* e_c, \quad (1.102)$$

donc

$$\tilde{p} = \tilde{n} \tilde{T}. \quad (1.103)$$

Pour finir, la vitesse du son s'obtient par la formule suivante, avec $p^* = \rho^* u^{*2}$:

$$c_s^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \text{ d'où } u^{*2} \tilde{c}_s^2 = \gamma \frac{p^* \tilde{p}}{\rho^* \tilde{\rho}}, \quad (1.104)$$

donc

$$\tilde{c}_s = \sqrt{\gamma \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}}. \quad (1.105)$$

L'adimensionnement proposé est donc bien cohérent.

1.4.2 Adimensionnement du terme de viscosité

Dans un premier temps, nous allons considérer l'adimensionnement du terme de viscosité. Pour cela, rappelons tout d'abord la formule du tenseur de viscosité, en notant τ_i , le temps de collision et ω_{ci} , la fréquence cyclotronique. Notons que les η_i correspondent à des viscosités dynamiques (Pa.s).

$$\sigma = -\eta_0 \Pi_0 - \eta_2 \Pi_2 + \eta_4 \Pi_4, \quad (1.106)$$

avec $\eta_0 = 0.96 neT \tau_i$, $\eta_2 = \frac{6neT}{5\omega_{ci}^2 \tau_i}$ et $\eta_4 = \frac{neT}{\omega_{ci}}$ §.

En adimensionnant le tenseur de viscosité avec $\sigma^* = \rho^* u^{*2}$, on obtient :

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{\rho^* u^* L^*} \left(-\eta_0 \tilde{\Pi}_0 - \eta_2 \tilde{\Pi}_2 + \eta_4 \tilde{\Pi}_4 \right). \quad (1.107)$$

Les paramètres η_i font apparaître le temps de collision τ_i , son adimensionnement est donc nécessaire :

$$\tilde{\tau}_i = A_{\tau_i} \frac{\tilde{T}^{3/2}}{\tilde{n}} \text{ avec } A_{\tau_i} = 1, 39.10^{12} \frac{T^{*3/2}}{n^* t^*}. \quad (1.108)$$

§. Les viscosités dynamiques sont données ici en unités SI (Pa.s). Par conséquent, l'énergie kT en erg devient eT en J (e , la charge élémentaire).

En reportant cette dernière expression de $\tilde{\tau}_i$ dans la définition de η_0 , nous pouvons obtenir l'adimensionnement de celui-ci :

$$\begin{aligned}\eta_0 &= 0.96n^*eT^*t^*\tilde{n}\tilde{T}\tilde{\tau}_i \\ &= 0.96n^*eT^*t^*A_{\tau_i}\tilde{T}^{5/2}.\end{aligned}\quad (1.109)$$

De la même façon, on obtient :

$$\eta_2 = \frac{1.2n^*eT^*}{\omega_{ci}^2t^*} \frac{1}{A_{\tau_i}} \tilde{n}^2\tilde{T}^{-1/2} \text{ et } \eta_4 = \frac{n^*eT^*}{\omega_{ci}} \tilde{n}\tilde{T}.\quad (1.110)$$

En reportant ces différentes formules des η_i dans (1.107), on obtient :

$$\tilde{\sigma} = -\tilde{\eta}_0\tilde{\Pi}_0 - \tilde{\eta}_2\tilde{\Pi}_2 + \tilde{\eta}_4\tilde{\Pi}_4,\quad (1.111)$$

$$\text{avec } \tilde{\eta}_0 = 0.96A_{\tau_i}\tilde{T}^{5/2}, \tilde{\eta}_2 = \frac{1.2}{\omega_{ci}^2t^{*2}} \frac{1}{A_{\tau_i}} \tilde{n}^2\tilde{T}^{-1/2} \text{ et } \tilde{\eta}_4 = \frac{1}{\omega_{ci}t^*} \tilde{n}\tilde{T}$$

Remarque 1.4 *Il est possible aussi de raisonner en terme de nombre de Reynolds, Re déterminant le rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité. Etant donnée la forme du tenseur du cisaillement, 3 nombres de Reynolds peuvent être déterminés ici. Avec les résultats précédents, l'équation de mouvement adimensionnée devient alors :*

$$\begin{aligned}\partial_{\tilde{t}}\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{p}) \\ - \frac{1}{Re_0} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{T}^{5/2}\tilde{\Pi}_0) - \frac{1}{Re_2} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{n}^2\tilde{T}^{-1/2}\tilde{\Pi}_2) + \frac{1}{Re_4} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{n}\tilde{T}\tilde{\Pi}_4) = \tilde{S}\end{aligned}\quad (1.112)$$

avec les nombres de Reynolds suivants :

$$Re_0 = \frac{1}{0.96A_{\tau_i}}; Re_2 = A_{\tau_i} \frac{\omega_{ci}^2t^{*2}}{1.2} \text{ et } Re_4 = \omega_{ci}t^*.\quad (1.113)$$

Ces expressions peuvent être reformulées :

$$Re_0 = 7,66.10^{-17} \frac{n^*L^*}{(T^*)^2}; Re_2 = 1,25.10^{25} \frac{T^*L^*}{n^*} \text{ et } Re_4 = 1,02.10^{-4} \omega_{ci} \frac{L^*}{\sqrt{T^*}}.\quad (1.114)$$

1.4.3 Adimensionnement du terme de diffusion

Un raisonnement similaire à celui de la viscosité est effectué pour trouver l'adimensionnement du terme de diffusion. Le terme de diffusion s'exprime sous la forme suivante :

$$\mathbf{q} = -K_{\parallel}\nabla_{\parallel}eT - K_{\perp}\nabla_{\perp}eT + K_{\wedge}\mathbf{b} \wedge \nabla_{\perp}eT,\quad (1.115)$$

$$\text{avec } K_{\parallel} = 3,9 \frac{neT\tau_i}{m_i}, K_{\perp} = 2 \frac{neT}{m_i\tau_i\omega_{ci}^2} \text{ et } K_{\wedge} = 2,5 \frac{neT}{m_i\omega_{ci}}.$$

En procédant à l'adimensionnement de ces différents termes un à un, comme précédemment pour la viscosité, nous obtenons :

$$\tilde{\mathbf{q}} = -\tilde{K}_{\parallel}\tilde{\nabla}_{\parallel}\tilde{T} - \tilde{K}_{\perp}\tilde{\nabla}_{\perp}\tilde{T} + \tilde{K}_{\wedge}\mathbf{b} \wedge \tilde{\nabla}_{\perp}\tilde{T},\quad (1.116)$$

$$\text{avec } \tilde{K}_{\parallel} = 3.9A_{\tau_i}\tilde{T}^{5/2}, \tilde{K}_{\perp} = \frac{2}{\omega_{ci}^2t^{*2}} \frac{1}{A_{\tau_i}} \tilde{n}^2\tilde{T}^{-1/2} \text{ et } \tilde{K}_{\wedge} = \frac{2.5}{\omega_{ci}t^*} \tilde{n}\tilde{T}.$$

1.4.4 Quelques évaluations pour notre système.

Pour adimensionner notre système, nous allons choisir par exemple, les valeurs de référence suivantes :

- la longueur de référence : $L^* = 2m$, le petit rayon d'ITER,
- la température de référence, la température à la séparatrice : $T^* = 100eV$,
- la densité de référence, la densité à la séparatrice : $n^* = 10^{19}m^{-3}$.

De ces valeurs, les autres grandeurs de référence peuvent être obtenues, à savoir :

- la masse volumique de référence :

$$\rho^* = m_i n^* = 1,67.10^{-8} \text{ kg/m}^3, \quad (1.117)$$

- la vitesse de référence, la vitesse du son pour les ions :

$$u^* = (eT^*/m_i)^{\frac{1}{2}} = 0,98.10^5 \text{ m/s}, \quad (1.118)$$

- le temps de référence, le temps nécessaire à une onde acoustique pour traverser le petit rayon d'ITER :

$$t^* = \frac{L^*}{u^*} = 2,04.10^{-5} \text{ s}, \quad (1.119)$$

- la pression de référence :

$$p^* = \rho^* e^* = \rho^* u^{*2} = 1,60.10^2 \text{ N/m}^2. \quad (1.120)$$

Le nombre sans dimension A_{τ_i} donné par (1.108) est alors :

$$A_{\tau_i} = 1,39.10^{12} \frac{T^{*3/2}}{n^* t^*} = 6,81. \quad (1.121)$$

La fréquence cyclotronique est donnée par la formule (1.69). Le champ magnétique est de $3,4T$ pour JET ou encore $5,3T$ pour ITER.

$$\omega_{c,i} = 9,58.10^7 B s^{-1} = 3,26.10^8 s^{-1} \text{ pour JET}. \quad (1.122)$$

Les paramètres de diffusion et viscosité adimensionnés sont donc :

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_0 &= 6,54 \tilde{T}^{5/2} & ; & \quad \tilde{\eta}_2 = 3,98.10^{-9} \tilde{n}^2 \tilde{T}^{-1/2} & ; & \quad \tilde{\eta}_4 = 1,50.10^{-4} \tilde{n} \tilde{T}; \\ \tilde{K}_{\parallel} &= 2,66.10^1 \tilde{T}^{5/2} & ; & \quad \tilde{K}_{\perp} = 6,65.10^{-9} \tilde{n}^2 \tilde{T}^{-1/2} & ; & \quad \tilde{K}_{\wedge} = 3,76.10^{-4} \tilde{n} \tilde{T}. \end{aligned} \quad (1.123)$$

Remarque 1.5 En s'appuyant sur (1.114), ces applications numériques ($T^* = 100eV$ et $n^* = 10^{19}m^{-3}$) donnent les nombres de Reynolds suivants :

$$Re_0 = 0,15 ; Re_2 = 2,50.10^8 \text{ et } Re_4 = 6,65.10^3. \quad (1.124)$$

Pour une température $T^* = 10eV$ et une densité $n^* = 10^{19}m^{-3}$, on obtient les nombres de Reynolds suivants :

$$Re_0 = 1,53.10^1 ; Re_2 = 2,50.10^7 \text{ et } Re_4 = 2,10.10^4. \quad (1.125)$$

Rappelons que les termes en η_0 et K_{\parallel} dominent respectivement les autres termes de viscosité et de diffusion. Les température et densité de référence ($T^* = 100eV$ et $n^* = 10^{19}m^{-3}$) choisies ici peuvent correspondre à des valeurs du bord du plasma. Or, les évaluations numériques présentées précédemment conduisent à des viscosités en η_0 et des diffusions en K_{\parallel} fortes. De même, le nombre de Reynolds correspondant au terme de viscosité dominant est petit : $Re_0 < 1$. Par conséquent, la modélisation fluide avec les fermetures de Braginskii ne semble pas adaptée au plasma dans ces conditions de température. Toutefois, plus on s'approche du bord du plasma ($T^* = 10eV$), plus le nombre de Reynolds Re_0 devient important et donc plus les fermetures de Braginskii semblent adaptées.

Chapitre 2

Diffusion anisotrope avec modèle de rayonnement

Dans les tokamaks, le rayonnement est important et peut avoir des conséquences sur le bon fonctionnement du tokamak. Dans ce chapitre, la présence éventuelle d'impuretés rayonnantes va être prise en compte dans des simulations numériques de diffusion anisotrope, sous la forme d'un puits d'énergie. Les conséquences de tels phénomènes radiatifs sur les profils de température du plasma vont être observées.

L'étude d'un phénomène de diffusion avec un terme source de rayonnement a donc été menée. Elle correspond à l'extension en 2D du modèle 1D proposé par [24]. Le tenseur de diffusion est celui donné par les relations de fermeture de Braginskii, cf partie 1.3.1, et présente donc une forte anisotropie et une non-linéarité en température.

En premier lieu, le modèle considéré est présenté ainsi que son approximation, avec une méthode d'éléments finis P_1 et un schéma implicite en temps. Dans un second temps, la méthode numérique est validée et étudiée par comparaison avec une méthode d'éléments spectraux [52]. Enfin, les résultats numériques du modèle de rayonnement sont présentés.

2.1 Modélisation

Le modèle étudié est une équation de la chaleur, avec terme source modélisant le phénomène radiatif, la conductivité est fortement anisotrope suivant les lignes de champ magnétique et non-linéaire en température :

$$\partial_t T + \nabla \cdot \mathbf{q} = S(T). \quad (2.1)$$

La densité de flux thermique est donnée sous une forme analogue à celle donnée par Braginskii en (1.59), à savoir :

$$\mathbf{q} = -K_{\parallel} \nabla_{\parallel} T - K_{\perp} \nabla_{\perp} T + K_{\wedge} (\mathbf{b} \wedge \nabla_{\perp} T). \quad (2.2)$$

Toutefois, étant donnée la dominance du terme K_{\parallel} par rapport à K_{\perp} et à K_{\wedge} vue dans la partie (1.3.1), la dépendance en température de ces deux derniers coefficients ne sera pas considérée : $K_{\parallel} = \alpha T^{\frac{5}{2}}$ avec α , K_{\perp} et K_{\wedge} , des constantes. Cette densité de flux thermique peut s'exprimer à l'aide d'un tenseur, K , c.f. l'équation (1.66). Par conséquent, par la suite, \mathbf{q} est donné sous la forme :

$$\mathbf{q} = -K\nabla T, \quad (2.3)$$

avec $K = K(K_{\parallel}, K_{\perp}, K_{\wedge}, \mathbf{b})$.

Le rayonnement est modélisé par un terme de puits de chaleur non-linéaire. Ce terme source $S(T)$ s'exprime sous la forme suivante :

$$S(T) = -An_z T^2 \exp\left(-\left(\frac{T - \bar{T}}{\Delta T}\right)^2\right), \quad (2.4)$$

avec A , une constante ; n_z , la densité en impuretés ; \bar{T} est la température critique de rayonnement et ΔT , l'écart-type associé. Le terme T^2 assure l'absence de rayonnement pour une température nulle : $S(T = 0) = 0$.

2.1.1 Schéma spatial

Géométrie axisymétrique

Cette équation de diffusion a été traitée dans une géométrie axisymétrique. La divergence est exprimée en coordonnées polaires et l'ensemble des variables est considéré comme indépendant de θ ($\partial_{\theta} \equiv 0$). Par conséquent, la divergence de la densité de flux s'exprime sous la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{r} \partial_r r q_r + \partial_z q_z = \nabla_{(r,z)} \cdot \mathbf{q} + \frac{1}{r} q_r, \quad (2.5)$$

en notant q_r et q_z les composantes selon r et z de \mathbf{q} .

Ici, le terme $\nabla_{(r,z)} \cdot \mathbf{q} = \partial_r q_r + \partial_z q_z$ correspond à l'expression de la divergence 2D en coordonnées Cartésiennes, on la notera $\nabla \cdot \mathbf{q}$ par la suite pour soulager l'écriture.

Ainsi, la différence notable entre les divergences 2D et 2D axisymétrique provient du terme $\frac{1}{r} q_r$ qui apparaît dans le deuxième cas. De façon classique, quand une géométrie axisymétrique est considérée, ce terme est discrétisé séparément. Dans le chapitre 4, nous reviendrons sur le problème de la conception d'une méthode volumes finis en coordonnées cylindriques et nous étudierons une autre méthode d'approximation qui permet de s'affranchir du problème de la discrétisation des termes sources artificiels apparaissant en coordonnées cylindriques.

En reportant (2.5) dans l'équation modèle (2.1), l'équation à discrétiser est obtenue :

$$\partial_t T - \nabla \cdot K \nabla T - \frac{1}{r} (K \nabla T)_r = S(T). \quad (2.6)$$

Formulation faible

Une méthode d'éléments finis P_1 ([19]) a été choisie pour discrétiser cette équation de la chaleur, i.e. l'espace d'approximation est celui des fonctions continues linéaires sur chacun des éléments triangulaires, τ . En notant ψ_i , les fonctions de base de l'espace d'approximation et Ω , le domaine étudié, la formulation faible de l'équation (2.6) s'écrit :

$$\int_{\Omega} \partial_t T \psi_i d\Omega - \int_{\Omega} \psi_i \nabla \cdot K \nabla T d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{r} (K \nabla T)_r \psi_i d\Omega = \int_{\Omega} S(T) \psi_i d\Omega. \quad (2.7)$$

En notant Γ , la frontière du domaine Ω et \mathbf{n} , le vecteur normal à cette frontière, une intégration par partie, avec le théorème de la divergence, permet de développer le second terme :

$$\int_{\Omega} \psi_i \nabla \cdot K \nabla T d\Omega = \int_{\Gamma} \psi_i K \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} K \nabla T \cdot \nabla \psi_i d\Omega \quad (2.8)$$

De façon usuelle, les fonctions de base ψ_i choisies sont égales à 1 pour le point i mais s'annulent sur les autres points du maillages. Par conséquent, l'intégrale sur l'ensemble du domaine Ω revient à ne considérer que les intégrales sur les triangles auxquels le point i appartient. Dans un premier temps, seuls les points i à l'intérieur du système vont être considérés, le terme de bord de l'équation (2.8) est alors nul. La formulation faible (2.7) devient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \ni i} \int_{\tau} \partial_t T \psi_i d\tau + \sum_{\tau \ni i} \int_{\tau} K \nabla T \cdot \nabla \psi_i d\tau - \sum_{\tau \ni i} \int_{\tau} \frac{1}{r} (K \nabla T)_r \psi_i d\tau \\ = \sum_{\tau \ni i} \int_{\tau} S(T) \psi_i d\tau \end{aligned} \quad (2.9)$$

L'inconnue T peut être décomposée sur la base des $(\psi_i)_i$:

$$T = \sum_j T_j(t) \psi_j, \quad (2.10)$$

avec T_j ne dépendant plus de l'espace mais seulement du temps. L'équation de discrétisation est alors obtenue :

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \ni i} \sum_{j \in \tau} \partial_t T_j \int_{\tau} \psi_j \psi_i d\tau + \sum_{\tau \ni i} \sum_{j \in \tau} T_j \left(\int_{\tau} K \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i d\tau - \int_{\tau} \frac{1}{r} (K \nabla \psi_j)_r \psi_i d\tau \right) \\ = \sum_{\tau \ni i} \int_{\tau} S(T) \psi_i d\tau \end{aligned} \quad (2.11)$$

Une condensation de masse ou « mass lumping », est effectuée pour le terme en temps :

$$\sum_{\tau \ni i} \sum_{j \in \tau} \partial_t T_j \int_{\tau} \psi_j \psi_i d\tau = a_i \partial_t T_i \quad (2.12)$$

Les intégrales sur les triangles sont approximées par la méthode de quadrature de Gauss. Ceci revient à remplacer le calcul des intégrales par une somme prise en un certain nombre de points du domaine d'intégration. Les points de Gauss sont notés $x_{g,\tau}$ et leur poids associé, $\omega_{g,\tau}$. De façon évidente, dans le cas des éléments finis P_1 , les $\nabla\psi_j$ sont constants. Les premières intégrales se calculent donc, avec $|\tau|$, l'aire du triangle :

$$\int_{\tau} K \nabla\psi_j \cdot \nabla\psi_i d\tau = \left(\sum_{g,\tau} |\tau| \omega_{g,\tau} K(x_{g,\tau}) \right) \nabla\psi_j|_{\tau} \cdot \nabla\psi_i|_{\tau}, \quad (2.13)$$

$$\int_{\tau} \frac{1}{r} (K \nabla\psi_j)_r \psi_i d\tau = \sum_{g,\tau} |\tau| \omega_{g,\tau} \frac{1}{r_{g,\tau}} (K(x_{g,\tau}) \cdot \nabla\psi_j|_{\tau})_r. \quad (2.14)$$

Pour finir, de la même façon, l'intégrale de la fonction de rayonnement est calculée comme un terme source :

$$\begin{aligned} \int_{\tau} S(T) \psi_i d\tau &= - \int_{\tau} n_Z A T^2 \exp \left(- \left(\frac{T - \bar{T}}{\Delta T} \right)^2 \right) \psi_i d\tau \\ &= - n_Z A \sum_{g,\tau} |\tau| \omega_{g,\tau} T(x_{g,\tau})^2 \exp \left(- \left(\frac{T(x_{g,\tau}) - \bar{T}}{\Delta T} \right)^2 \right) \psi_i(x_{g,\tau}) \end{aligned}$$

Un raisonnement similaire est effectué pour les points i appartenant aux bords du système. Le terme de bord de l'équation (2.8) doit alors être considéré. Il sera calculé selon les conditions aux limites choisies, cf la partie 2.1.3.

2.1.2 Schéma en temps

Dans le cas d'un schéma explicite au premier ordre, le problème est résolu au temps t_n , afin d'obtenir le résultat au temps suivant :

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} - \nabla \cdot K(T^n) \nabla T^n - \frac{1}{r} (K(T^n) \nabla T^n)_r = S(T^n), \quad (2.15)$$

en notant T^n , la température au temps t_n ; T^{n+1} , celle recherchée au pas de temps suivant et Δt , le pas de temps.

Dans le cas d'un schéma implicite, le problème est résolu au temps t_{n+1} :

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} - \nabla \cdot K(T^{n+1}) \nabla T^{n+1} - \frac{1}{r} (K(T^{n+1}) \nabla T^{n+1})_r = S(T^{n+1}) \quad (2.16)$$

La difficulté ici, venant de la dépendance en température de K et S , nous procédons par linéarisation. Des développements limités permettent d'exprimer les différentes fonctions prises en T^{n+1} , en fonction d'expressions connues, en T^n :

$$\begin{aligned} K(T^{n+1}) &= K(T^n) + K'(T^n) \delta T, \\ S(T^{n+1}) &= S(T^n) + S'(T^n) \delta T, \end{aligned} \quad (2.17)$$

δT représentant la différence $T^{n+1} - T^n$.

Les différents termes de la formulation faible donnée par (2.7) sont étudiés successivement. Tout d'abord, le terme de diffusion peut être calculé, en utilisant les développements limités donnés par (2.17) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} K(T^{n+1}) \nabla T^{n+1} \cdot \nabla \psi_i d\Omega &= \int_{\Omega} K(T^n) \nabla T^n \cdot \nabla \psi_i d\Omega + \int_{\Omega} K(T^n) \nabla \delta T \cdot \nabla \psi_i d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \delta T K'(T^n) \nabla T^n \cdot \nabla \psi_i d\Omega + \int_{\Omega} \delta T K'(T^n) \nabla \delta T \cdot \nabla \psi_i d\Omega \end{aligned} \quad (2.18)$$

Le dernier terme est considéré négligeable car en $O(\delta T^2)$. Le premier terme est le même qu'en explicite. Par conséquent, seuls deux termes restent à étudier. Sachant que δT peut s'exprimer dans la base des ψ_i , $\delta T = \sum_j \delta T_j \psi_j$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} K(T^n) \nabla \delta T \cdot \nabla \psi_i d\Omega &= \sum_{\tau \ni i} \int_{\tau} K(T^n) \nabla \delta T \cdot \nabla \psi_i d\tau \\ &= \sum_{\tau \ni i} \sum_{j \in \tau} \int_{\tau} K(T^n) \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i \delta T_j d\tau \end{aligned} \quad (2.19)$$

La dérivée du tenseur de diffusion peut être facilement obtenue, à partir des formules (1.66) et (2.2), sachant que dans ce modèle, seul $K_{//}$ dépend de la température :

$$K'(T^n) = \frac{5}{2} \alpha(T^n)^{\frac{3}{2}} \mathbf{b} \mathbf{b}^T. \quad (2.20)$$

Le dernier terme à calculer devient alors :

$$\int_{\Omega} \delta T K'(T^n) \nabla T^n \cdot \nabla \psi_i d\Omega = \sum_{\tau \ni i} \sum_{j \in \tau} \int_{\tau} \frac{5}{2} \alpha(T^n)^{\frac{3}{2}} \delta T_j \psi_j \mathbf{b} \mathbf{b}^T \nabla T^n \cdot \nabla \psi_i d\tau. \quad (2.21)$$

Considérons maintenant le terme supplémentaire provenant de la géométrie axisymétrique :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{r} (K(T^{n+1}) \nabla T^{n+1})_r \psi_i d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{1}{r} (K(T^n) \nabla T^n)_r \psi_i d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \frac{1}{r} (K(T^n) \nabla \delta T)_r \psi_i d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \frac{1}{r} \delta T (K'(T^n) \nabla T^n)_r \psi_i d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \frac{1}{r} \delta T (K'(T^n) \nabla \delta T)_r \psi_i d\Omega \end{aligned}$$

De même que précédemment, le dernier terme est négligeable et le premier terme est le même qu'en explicite. Considérons donc seulement les deux termes restants.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{r} (K(T^n) \nabla \delta T)_r \psi_i d\Omega &= \sum_{\tau \ni i} \sum_{j \in \tau} \int_{\tau} \frac{1}{r} (K(T^n) \nabla \psi_j)_r \psi_i \delta T_j d\tau, \\ \int_{\Omega} \frac{1}{r} \delta T (K'(T^n) \nabla T^n)_r \psi_i d\Omega &= \sum_{\tau \ni i} \sum_{j \in \tau} \int_{\tau} \frac{1}{r} \frac{5}{2} \alpha(T^n)^{\frac{3}{2}} (\mathbf{b} \mathbf{b}^T \nabla T)_r \psi_j \psi_i \delta T_j d\tau. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Pour finir, le terme de la fonction de rayonnement donne :

$$\int_{\Omega} S(T^{n+1}) \psi_i d\Omega = \int_{\Omega} S(T^n) \psi_i d\Omega + \int_{\Omega} S'(T^n) \delta T \psi_i d\Omega.$$

Le premier terme est le même qu'en explicite. Connaissant l'expression de $S(T)$, donnée par (2.4), sa dérivée $S'(T)$ peut facilement être obtenue :

$$S'(T) = -2An_z T \left(1 - T \frac{T - \bar{T}}{\Delta T^2} \right) \exp \left(- \left(\frac{T - \bar{T}}{\Delta T} \right)^2 \right). \quad (2.23)$$

Le terme implicite pour le rayonnement peut alors être calculé :

$$\int_{\Omega} S'(T^n) \delta T \psi_i d\Omega = \sum_{\tau \ni i} \sum_{j \in \tau} \int_{\tau} S'(T^n) \delta T_j \psi_j \psi_i d\tau \quad (2.24)$$

Les différentes intégrales apparaissant en plus dans le cas d'un schéma en temps implicite, peuvent facilement être calculées par l'intermédiaire des points de Gauss, comme dans (2.13), (2.14) et (2.15)

2.1.3 Conditions aux limites

Différentes conditions aux limites seront utilisées dans les tests numériques donnés dans la partie (2.2). Nous les décrivons ci-après.

Condition de Neumann homogène

Dans un premier temps, des tests de diffusion anisotrope, sans terme de rayonnement seront menés. La condition aux limites considérée est alors la condition de Neumann homogène :

$$K \nabla T \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (2.25)$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal à la frontière. Concrètement, cette condition revient à annuler le terme de bord de (2.8). Les points du bord sont alors calculés de la même façon que ceux intérieurs au domaine.

Densités de flux

Les tests suivants portent sur un modèle de rayonnement dans une géométrie correspondant au bord du tokamak. Deux conditions aux limites sont nécessaires : l'une à l'interface entre le coeur et le bord du plasma et l'autre à la paroi du tokamak.

A l'interface coeur-plasma, le coeur étant à une température plus élevée que le bord, on impose une densité de flux constante et positive (le vecteur normal à la frontière, \mathbf{n} , pointant vers l'extérieur du domaine) :

$$\Phi_e = -K\nabla T \cdot \mathbf{n} = g. \quad (2.26)$$

En tenant compte de ce flux entrant constant, avec Γ_τ , les segments frontières auxquels le point i appartient, on obtient le terme de bord :

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \psi_i K \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Gamma &= g \int_\Gamma \psi_i d\Gamma \\ &= g \sum_{\Gamma_\tau \ni i} \int_{\Gamma_\tau} \psi_i d\Gamma_\tau. \end{aligned} \quad (2.27)$$

A l'interface plasma-paroi, la paroi est modélisée par une condition aux limites linéaire mixte, i.e. la densité de flux sortante est proportionnelle à la température :

$$\Phi_s = -K\nabla T \cdot \mathbf{n} = BT, \quad (2.28)$$

avec B une constante positive.

Le terme de bord devient alors :

$$\begin{aligned} - \int_\Gamma \psi_i K \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Gamma &= B \int_\Gamma T \psi_i d\Gamma \\ &= B \sum_{\Gamma_\tau \ni i} \sum_{j \in \Gamma_\tau} T_j \int_{\Gamma_\tau} \psi_j \psi_i d\Gamma_\tau. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Dans le but d'égaliser les flux entrant et sortant, une relation peut être établie entre les constantes, g et B . Dans le cas d'une géométrie cylindrique, si on considère un cylindre creux de longueur, L , grande par rapport aux rayons intérieur, r_{min} , et extérieur, r_{max} , et dont les surfaces sont respectivement à températures $T(r_{min})$ et $T(r_{max})$ et si on note λ , la conductivité, en régime stationnaire, le flux thermique traversant chaque surface cylindrique est alors (e.g. [57]) :

$$\Phi = 2\Pi\lambda L \frac{T(r_{min}) - T(r_{max})}{\ln(r_{max}/r_{min})}. \quad (2.30)$$

Donc la densité de flux thermique traversant la surface intérieure est :

$$\varphi_e = \frac{\Phi}{2\Pi r_{min} L} = \frac{\lambda}{r_{min}} \frac{T(r_{min}) - T(r_{max})}{\ln(r_{max}/r_{min})}. \quad (2.31)$$

En l'absence de rayonnement, la densité de flux externe peut alors être déduite de la densité de flux interne :

$$\varphi_s = \frac{r_{min}}{r_{max}} \varphi_e. \quad (2.32)$$

Par conséquent, sachant que dans notre cas, $\lambda = K_{\perp}$, la densité de flux entrante, g , est calculée avec (2.31) :

$$g = \frac{K_{\perp}}{r_{min}} \frac{T(r_{min}) - T(r_{max})}{\ln(r_{max}/r_{min})}. \quad (2.33)$$

Suivant (2.32) et (2.33), la densité de flux externe peut être évaluée et donc le coefficient B :

$$B = \frac{r_{min}}{r_{max}} \frac{g}{T(r_{max})}. \quad (2.34)$$

2.2 Tests numériques

2.2.1 Diffusion anisotrope sans rayonnement

Dans un premier temps, des tests numériques portant sur les phénomènes de diffusion fortement anisotrope décrits dans la partie (1.3.1) vont être effectués. Le terme de rayonnement n'est alors pas pris en compte.

La géométrie considérée est de forme carré et est éloignée de la géométrie du tokamak mais permet de se familiariser avec les particularités de la diffusion de Braginskii, en présence d'un champ magnétique. La condition au limite choisie est la condition de Neumann homogène, cf la partie (2.1.3).

Condition initiale en pulse avec diffusion anisotrope

Dans un premier cas, une condition initiale sous la forme d'un pulse, dans un système en température uniforme est considérée. Elle est définie par :

$$T = 10 + \exp\left(-\frac{(x - 3.5)^2 + y^2}{0.01^2}\right), \quad (2.35)$$

x et y représentant respectivement l'abscisse et l'ordonnée.

Cette condition initiale se rapproche, de façon simplifiée de celle proposée par Fischer dans [20]. Un champ magnétique circulaire est choisi pour observer la diffusion le long des lignes de champ :

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

où x et y sont les coordonnées du point considéré. Celui-ci ainsi que la condition initiale sont représentés par la figure (2.1).

La géométrie axisymétrique est discrétisée avec un maillage de 17730 éléments et 9036 points. Le schéma en temps est explicite avec une méthode RK4.

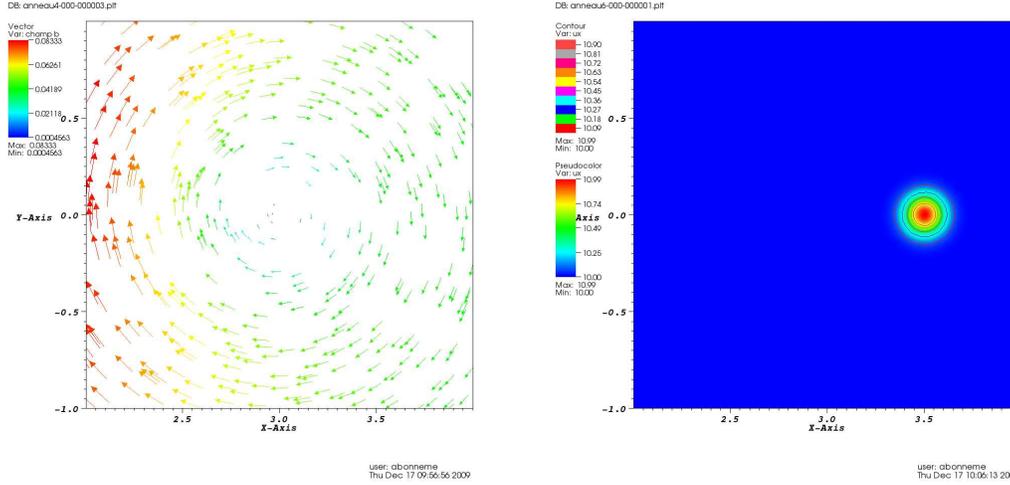


FIGURE 2.1 – Champ \mathbf{b} ; CI en "pulse"

Les coefficients de diffusion de la formule (2.2) sont les suivants, $K_{\parallel} = T^{\frac{5}{2}}$ et $K_{\perp} = K_{\wedge} = 0$. Le pas de temps est $\Delta t = 1.10^{-5}$. Les résultats sont données par les figures (2.2) pour des temps adimensionnés de $t = 0; 0.005; 0.04; 0.1$.

La diffusion du pulse de température suit comme prévu les lignes de champ magnétique. Le pulse prend la forme d'un croissant et tend à former un anneau, solution stationnaire du problème. Le phénomène de diffusion est rapide. Ceci est dû au fait que le coefficient K_{\parallel} dépend de $T^{\frac{5}{2}}$, la diffusion parallèle est donc importante.

Condition initiale en pulse avec présence du terme en K_{\wedge}

Le second cas test présenté ici a pour objectif l'étude du terme en K_{\wedge} de la densité de flux donné dans (2.2). Dans le chapitre 1, il a été vu que ce terme agit comme un terme de transport :

$$\nabla \cdot (K_{\wedge}(\mathbf{b} \wedge \nabla T)) = (K_{\wedge} \nabla \wedge \mathbf{b} + \nabla K_{\wedge} \wedge \mathbf{b}) \nabla T. \quad (2.37)$$

Notons que dans le cadre de la « diamagnetic cancellation » [23, 59], certains termes de (2.37) se compensent avec le terme d'advection lié à la vitesse diamagnétique \mathbf{u}_{*} , c.f. remarque 1.2.

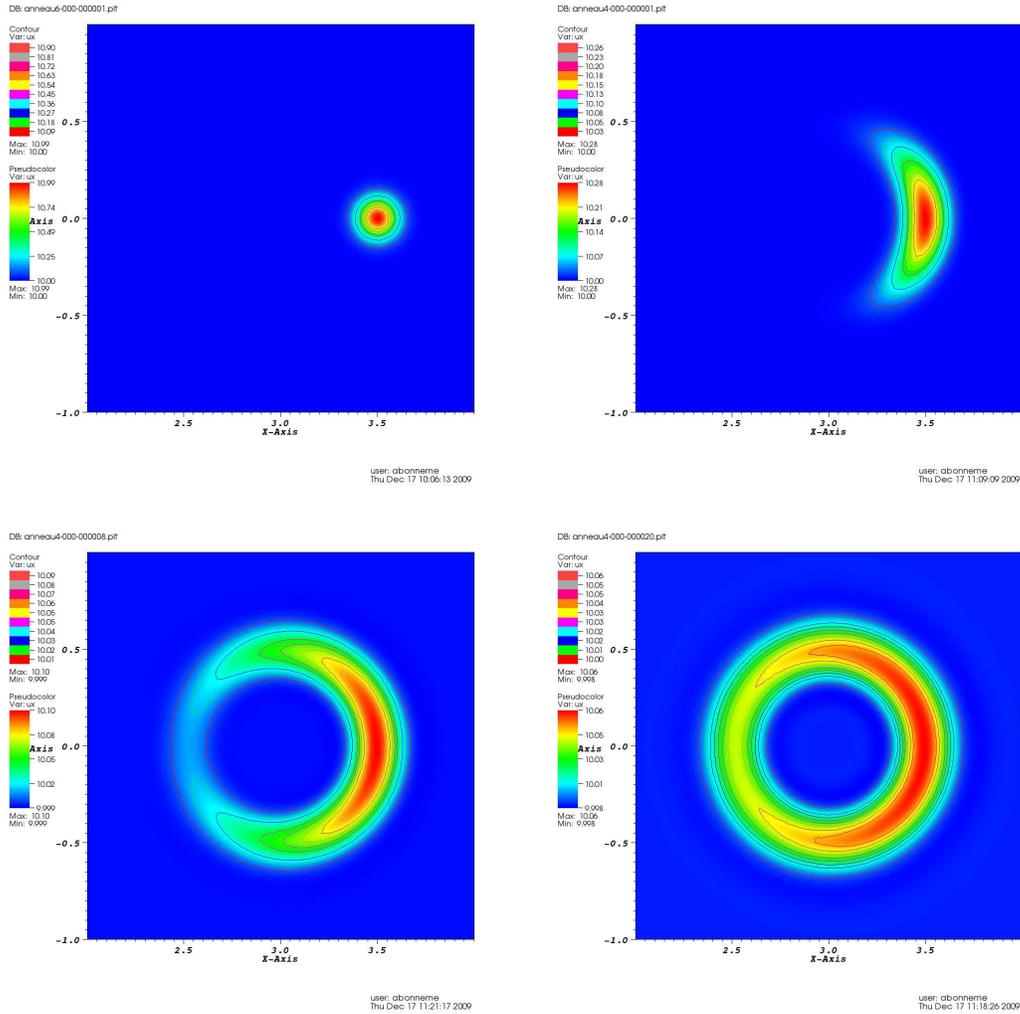


FIGURE 2.2 – CI en "pulse", $K_{\perp} = K_{\wedge} = 0$, à $t = 0; 0.005; 0.04; 0.1$.

Le coefficient $K_{//}$ est ici considéré comme une constante et le coefficient K_{\wedge} est pris égal à $K_{//}$ afin d'amplifier le phénomène de transport lié à K_{\wedge} . La diffusion perpendiculaire est une nouvelle fois considérée comme nulle, $K_{\perp} = 0$. Les résultats sont donnés par la figure (2.3) à des temps adimensionnés de $t = 0; 0.4; 1; 1.6$.

De la même façon que précédemment, la diffusion suivant les lignes de champ est observée, avec la transformation du pulse en un croissant. Toutefois, le coefficient $K_{//}$ ne dépendant pas de la température, le phénomène de diffusion est moins rapide. D'autre part, avec la présence du terme en K_{\wedge} , le pulse est transporté vers le haut du carré de calcul, validant ainsi la remarque faite dans la partie (1.3.1). Si le coefficient K_{\wedge} est pris de signe opposé, le transport s'effectue vers le bas.

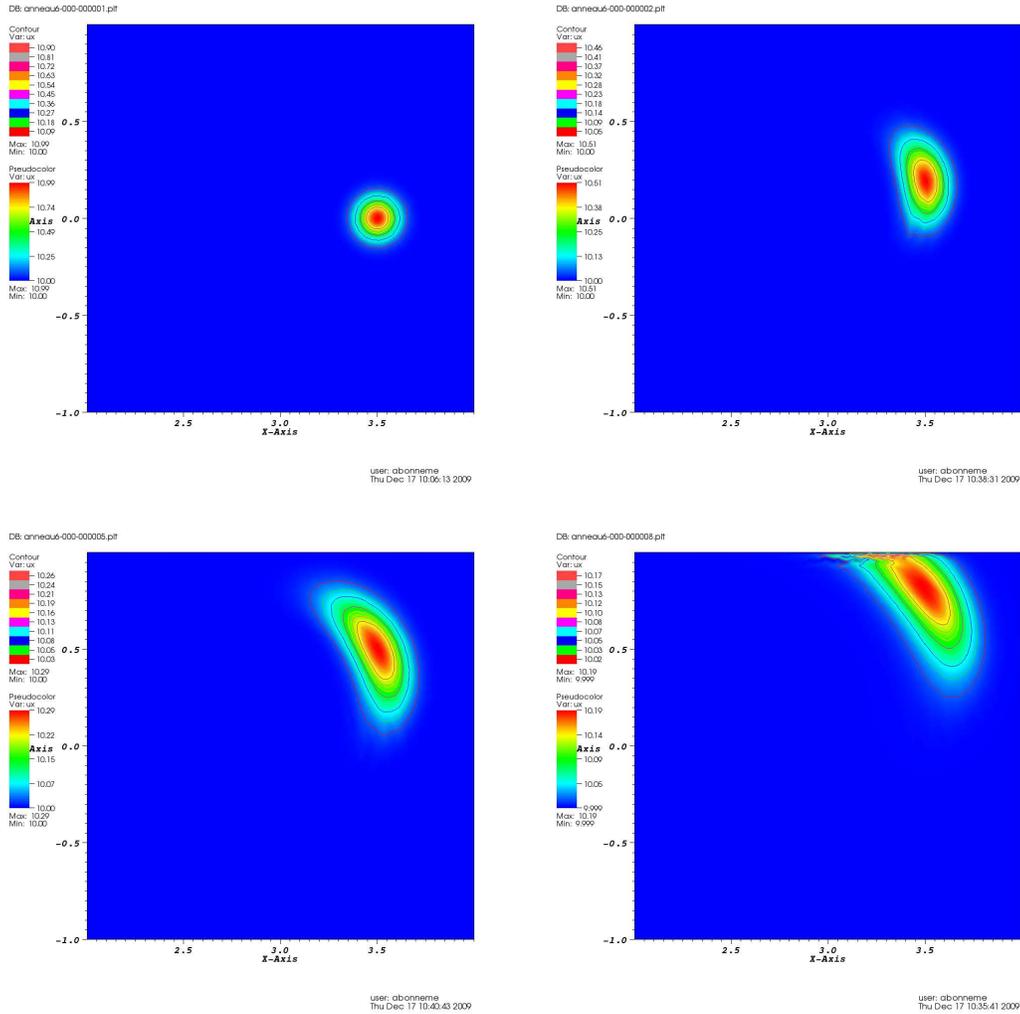


FIGURE 2.3 – CI en "pulse", $K_{//} = K_{\wedge}$, à $t = 0; 0.4; 1; 1.6$.

Condition initiale stationnaire

Dans les cas test suivants, une solution stationnaire au problème de diffusion parallèle aux lignes de champ magnétique, ($K_{//} \neq 0, K_{\perp} = K_{\wedge} = 0$) est choisie comme condition initiale.

On cherche notamment à comparer la précision entre les méthodes de discrétisation spatiale, méthode des éléments finis P_1 et méthode des éléments spectraux Q_4 [52]. Par ailleurs, les résultats obtenus seront aussi comparés à ceux obtenus par la méthode des éléments finis P_1 sur un maillage aligné aux lignes de champs. Des zooms de ce maillage

sont notamment donnés par la figure (2.4).

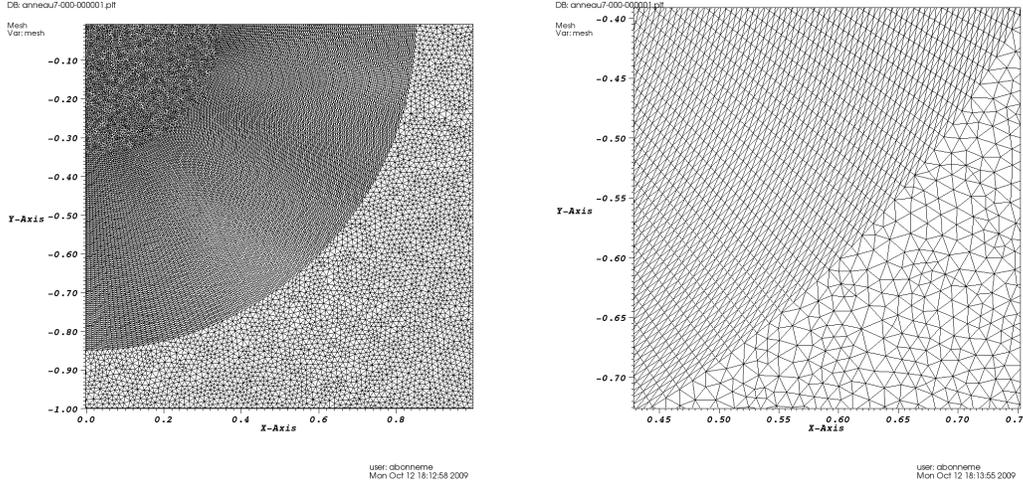


FIGURE 2.4 – Zoom du maillage aligné suivant le champ magnétique.

Le maillage utilisé pour la méthode SEM (Spectral Element Method) comporte 2304 éléments et 37249 points. Pour la méthode FEM (Finite Element Method), il est composé de 97990 éléments et 49396 points. Dans le cas du maillage aligné, on a 135210 éléments et 67906 points. Dans la partie de la géométrie correspondant au créneau, le raffinement des deux maillages aligné et non-aligné pour la méthode EF est similaire, le surplus des mailles dans le cas aligné se situant en particulier dans la partie centrale comme on peut le voir sur la figure (2.4). Le pas de temps considéré est de l'ordre de 10^{-5} pour chacun des calculs.

La première condition initiale étudiée est la solution stationnaire en créneau et elle est représentée par la figure (2.5). Elle est définie par :

$$T = \begin{cases} 11 & \text{si } r \in [0.5; 0.7] \\ 10 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.38)$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Les résultats obtenus à $t = 2$ sont présentés en figure (2.6). Les images de haut en bas correspondent respectivement à la méthode SEM, à la méthode FEM sur maillage non-aligné et à la méthode FEM sur maillage aligné.

Notons que cette condition initiale est délicate, car la température est discontinue. Aussi, dans le cas SEM Q_4 , un phénomène de Gibbs sur les bords du créneau est observé

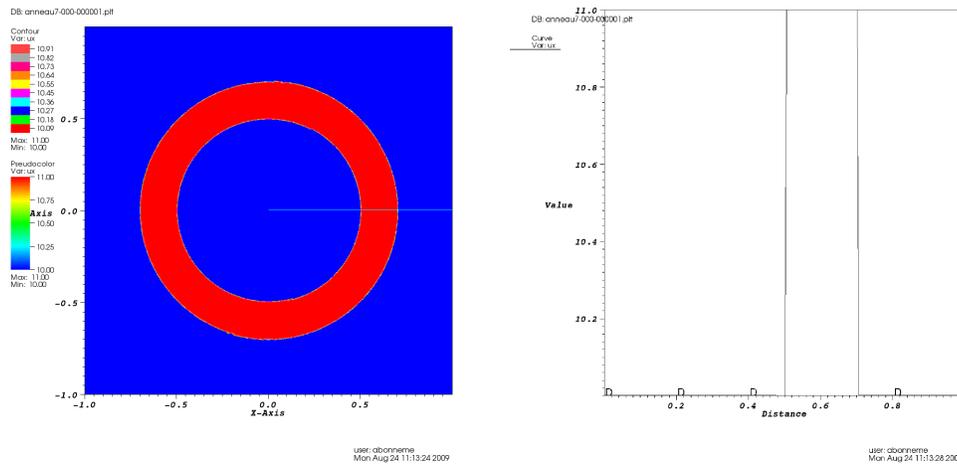


FIGURE 2.5 – CI : Créneau sur un anneau

et le maximum a varié de 8,5% par rapport à la solution stationnaire, même si la forme du créneau est globalement maintenue. Dans le cas FEM non-aligné, la variation est plus importante, de l'ordre de 10% par rapport à la solution stationnaire. De plus, la forme en créneau est complètement perdue. Comme nous pouvions le supposer, l'approximation FEM P_1 est peu précise en comparaison à la méthode SEM Q_4 . Par contre, le maillage aligné avec discrétisation FEM montre un résultat plutôt satisfaisant : le maximum de température est conservé et seuls les bords du créneau ont légèrement évolué.

La deuxième condition initiale considérée est un anneau sous la forme d'une Gaussienne, comme le montre la figure (2.7) et est définie par :

$$T = 10 + \exp\left(-\frac{(r - r_0)^2}{\delta^2}\right) \quad (2.39)$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r_0 = 0.6$ et $\delta = 0.1$.

La condition initiale est donc maintenant régulière.

Les résultats à $t = 2$ sont donnés par la figure (2.8), avec de haut en bas, la méthode SEM, la méthode FEM sur maillages non-aligné et aligné. Cette fois, la forme en gaussienne est bien conservée. Toutefois, une variation du maximum de l'ordre de 7% est tout de même observée pour la méthode FEM sur maillage non-aligné, alors que les maxima sont conservés pour les méthodes SEM et FEM aligné.

Comme nous pouvions le supposer, la méthode d'ordre élevé SEM Q_4 permet d'obtenir de meilleurs résultats que la méthode FEM P_1 pour la conservation de la solution stationnaire. Toutefois, les résultats obtenus avec cette dernière sur un maillage aligné sur les lignes de champ magnétique sont satisfaisants. Ainsi, il semble nécessaire d'utiliser un

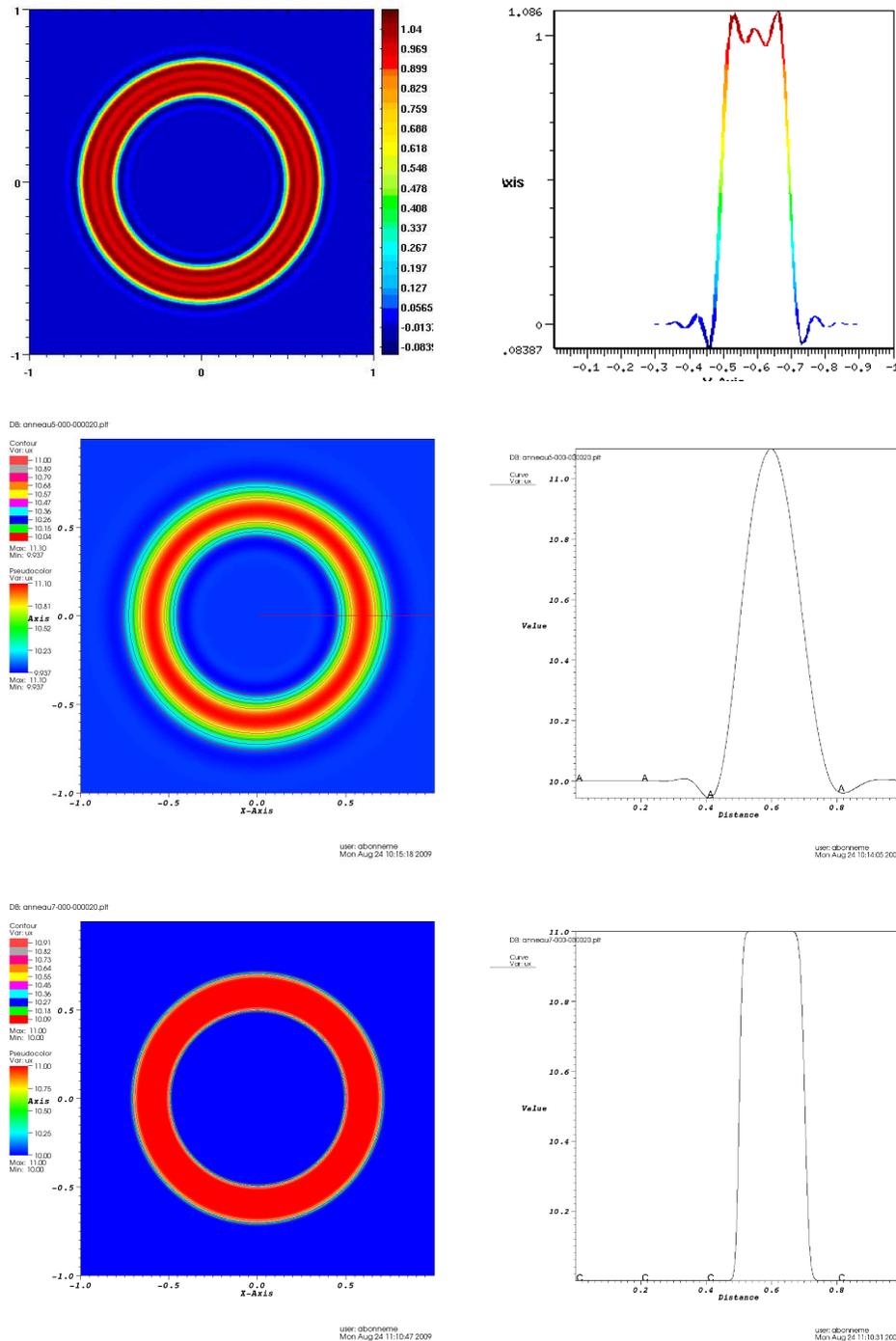


FIGURE 2.6 – CI : Créneau, solution à $t = 2$. - Approx. SEM ($N = 4$). - Approx. FEM P_1 . - Approx. FEM P_1 , maillage aligné.

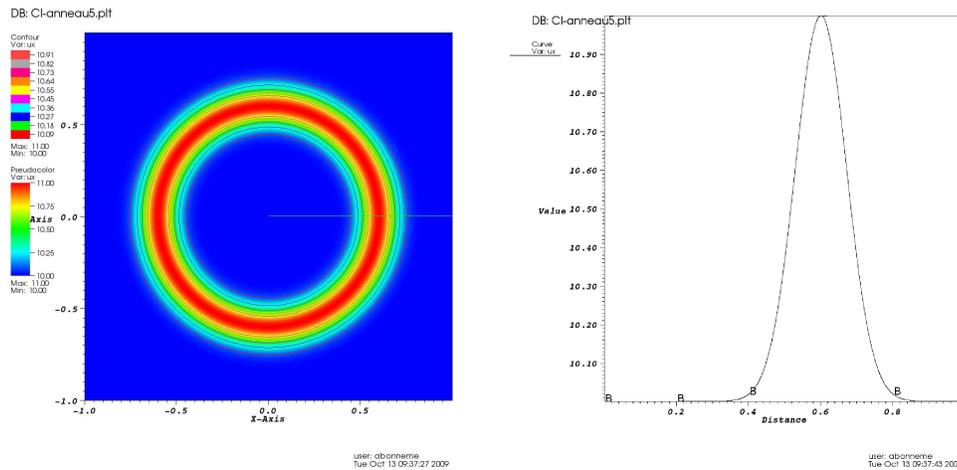


FIGURE 2.7 – CI : Gaussienne sur un anneau

maillage similaire pour la suite des simulations numériques dans les tokamaks, afin de capter au mieux les phénomènes liés à l'anisotropie suivant les lignes de champ magnétique.

2.2.2 Tests avec rayonnement

Les tests qui suivent sont effectués avec la méthode des éléments finis P_1 et un schéma en temps implicite, sur des géométries axisymétriques, plus proches de la géométrie des tokamaks. Dans un premier temps, on donne des résultats sur le plasma de bord d'un tokamak circulaire puis pour la géométrie du tokamak ITER.

Les coefficients de diffusion donnés par (2.2), considérés dans ces simulations sont les suivants : $K_{\parallel} = 5.10^2 T^{\frac{5}{2}}$, $K_{\perp} = 1$ et $K_{\wedge} = 0$. Les ordres de grandeurs des rapports entre les coefficients donnés dans le chapitre 1 ne sont pas respectés ici. Le terme de rayonnement est pris en compte et la constante An_z est prise égale à 1. Les valeurs de la température de rayonnement \bar{T} et de ΔT sont définis selon la configuration étudiée. La zone où la température \bar{T} est atteinte et donc où le terme de rayonnement $S(T)$ est le plus important est appelée par la suite zone de rayonnement ou zone radiative.

Les conditions aux limites choisies sont les conditions de Neumann et mixte, évoquées dans la partie (2.1.3). Les paramètres sont alors choisis selon les rayons r_{min} et r_{max} et la différence de température $T(r_{min}) - T(r_{max})$, suivant les formules (2.33) et (2.34). Le nombre d'itérations sera noté kt .

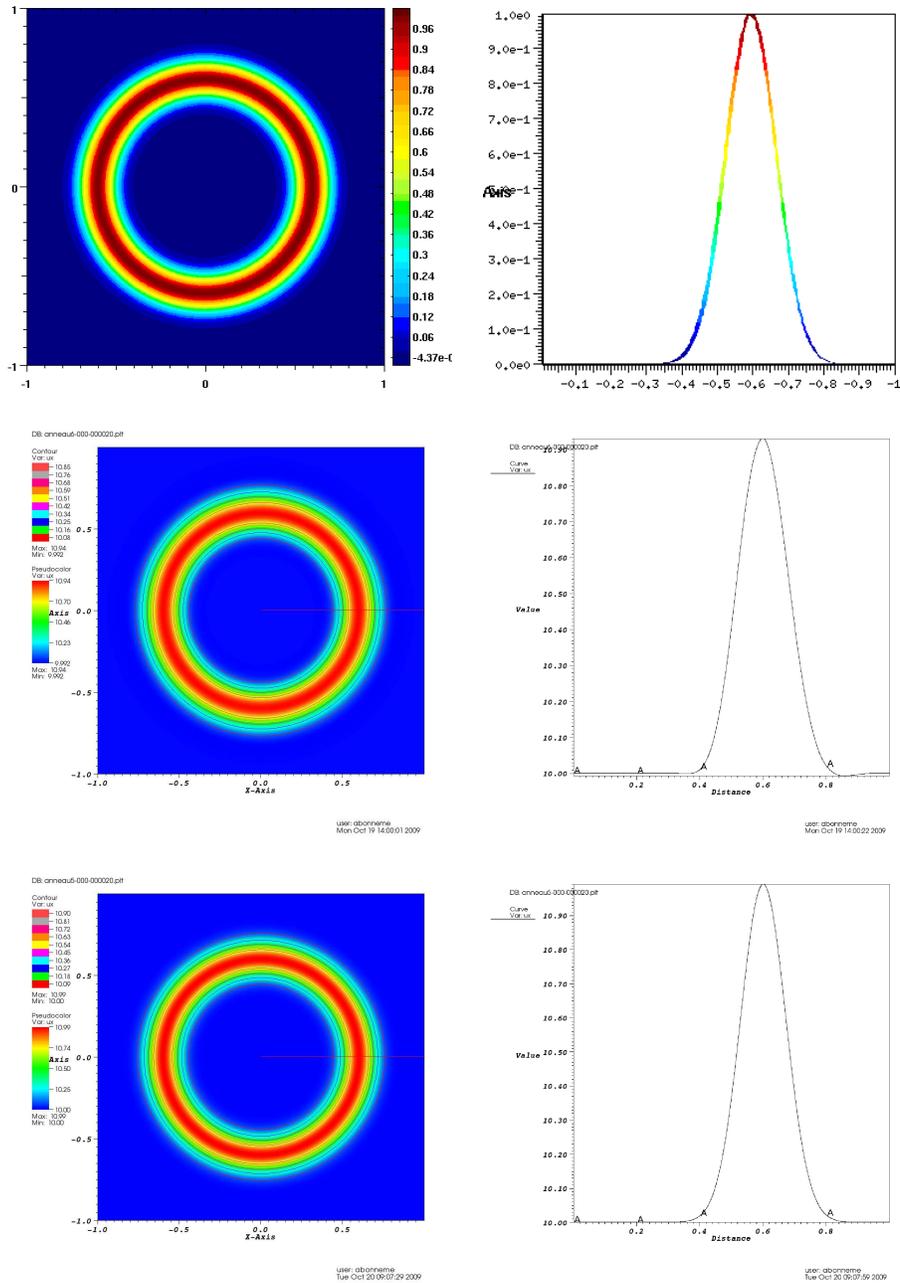


FIGURE 2.8 – CI : Gaussienne sur un anneau, solution à $t = 2$. Approx. SEM ($N = 4$). - Approx. FEM P_1 . - Approx. FEM P_1 , maillage aligné.

Tokamak circulaire : condition initiale linéaire

Comme précisé précédemment, les premières simulations sont menées sur une géométrie annulaire. Les lignes de champ magnétique forment des cercles concentriques, la densité de flux magnétique correspondante est représentée par la figure (2.9).

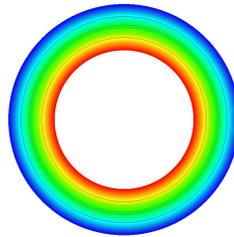


FIGURE 2.9 – Densité de flux magnétique dans le tokamak circulaire.

Dans un premier temps, une variation linéaire selon le rayon est prise comme condition initiale en température (fig 2.10). La température de rayonnement est choisie à l'intérieur de cet intervalle de rayonnement i.e $T(r_{min}) > \bar{T} > T(r_{max})$ avec $\bar{T} = 30$ et $\Delta T = 5$. Le pas de temps du schéma implicite est $\Delta t = 10^{-6}$.

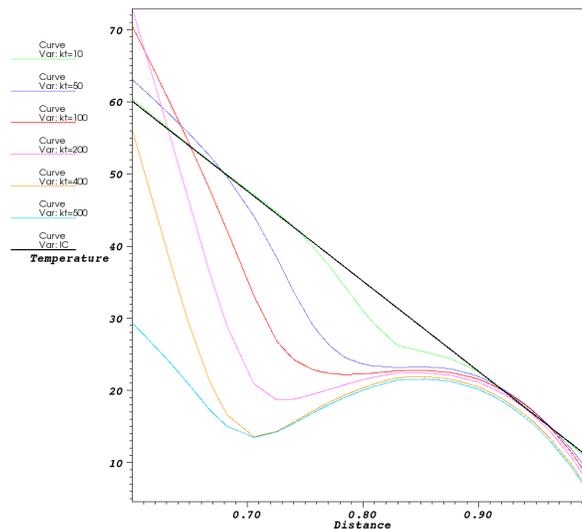


FIGURE 2.10 – Evolution du profil de température avec une CI linéaire.

Les profils de température obtenus à différents instants de la simulation sont donnés

par la figure (2.10). Une zone de rayonnement apparaît au niveau de la température de rayonnement, $\bar{T} = 30$. Elle se développe peu en peu tout en se déplaçant en direction du coeur du plasma, suivant ainsi la valeur de température, $\bar{T} = 30$. Cette zone radiative se déplace peu à peu en direction du coeur du plasma et influe sur la température du coeur du plasma. Par ailleurs, un maximum de température apparaît à l'arrière de cette zone radiative à cause de la faible diffusion perpendiculairement aux lignes de champ magnétique.

Le second test consiste à prendre la même condition initiale que précédemment mais affectée par un anneau froid, comme le montre la figure (2.11). Cette fois, la température de rayonnement \bar{T} est choisie dans l'anneau froid et donc à l'extérieur de l'intervalle $[T(r_{min}), T(r_{max})]$, i.e. $T(r_{min}) > T(r_{max}) > \bar{T}$ avec $\bar{T} = 5$ et $\Delta T = 5$. Le pas de temps est $\Delta t = 10^{-4}$.

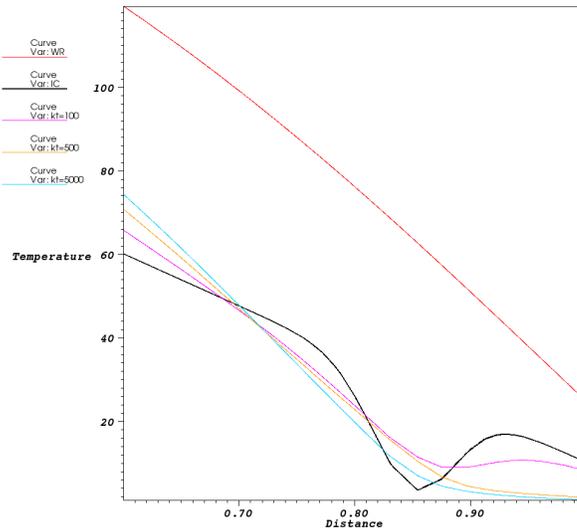


FIGURE 2.11 – Evolution du profil de température avec la CI de l'anneau froid et comparaison avec des conditions similaires, en absence de rayonnement.

Les résultats sont présentés par la figure (2.11). En premier lieu, la zone de rayonnement se déplace radialement mais cette fois, en direction de la périphérie du tokamak. La courbe bleue correspondant à $t = 0.5$ est proche de l'état stationnaire avec équilibre des flux radiatif et injecté. Par ailleurs, la figure donne aussi la solution obtenue avec les mêmes conditions initiales et aux limites mais sans terme de rayonnement (courbe rouge). Les profils de température obtenus sont complètement différents selon les configurations considérées (avec et sans rayonnement). En effet, les températures présentent une différence importante, de l'ordre de 50eV, aussi bien au niveau du coeur du plasma qu'à la

périphérie.

Tokamak circulaire : le spot froid

La dernière condition initiale considérée est une variation linéaire de la température mais affectée cette fois d'un spot froid, comme le montre le zoom du tokamak, figure (2.12). Les paramètres de rayonnement sont $\bar{T} = 5$ et $\Delta T = 5$. La température de rayonnement est prise dans le spot froid mais en dessous de l'intervalle $[T(r_{max}), T(r_{min})]$. Le pas de temps considéré est $\Delta t = 10^{-6}$.

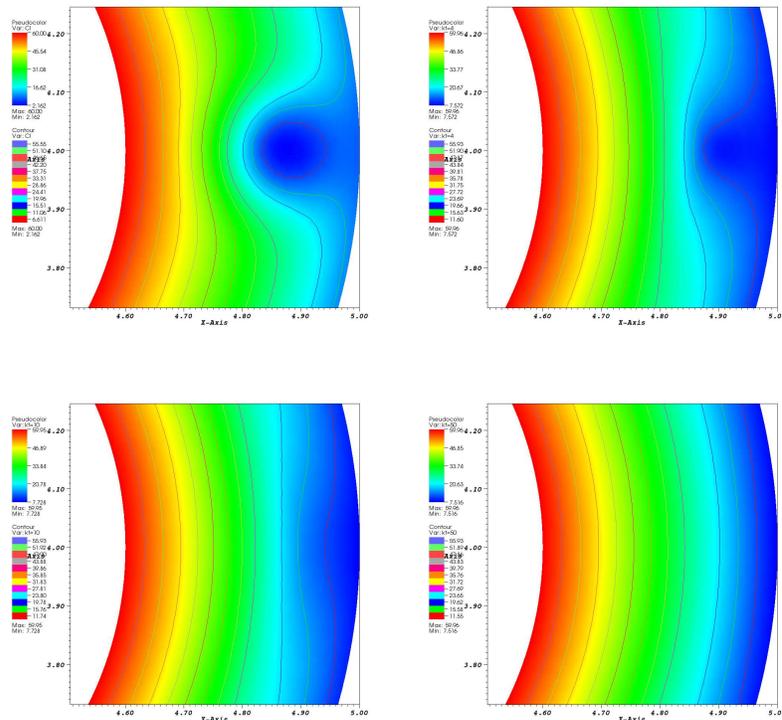


FIGURE 2.12 – Diffusion parallèle du spot froid. (kt=0;4;10;50)

Dans un premier temps, les isothermes de la figure (2.12) montrent la diffusion du spot froid parallèlement aux lignes de champ magnétique. Par ailleurs, les profils de la figure (2.13) révèlent le déplacement radial de la zone de rayonnement en direction de la périphérie du tore, poussée par le flux entrant de la condition aux limites. L'effet conjugué de ces deux phénomènes, la diffusion et le flux entrant entraîne la disparition du spot froid et donc de la zone de rayonnement. Le profil de température retrouve alors sa variation linéaire à l'équilibre.

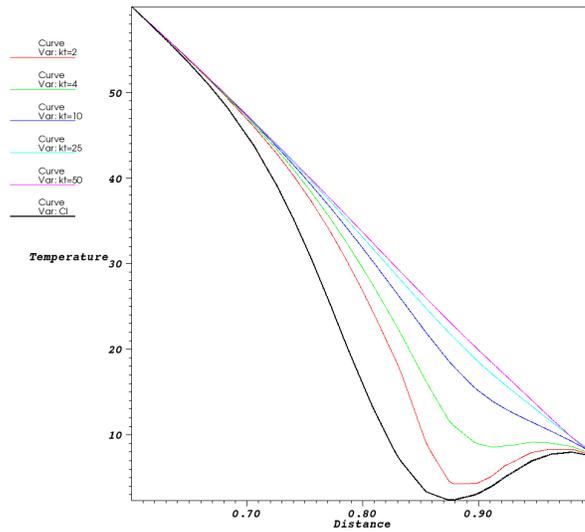


FIGURE 2.13 – Evolution du profil de température pour la condition initiale du spot froid.

Géométrie ITER : condition linéaire en température

Dans cette partie, on présente les résultats numériques obtenus sur la géométrie d'ITER. La figure (2.14) représente la densité de flux magnétique sur cette géométrie, donnée par le code de calcul CEDRES++ [38, 29]. De même que précédemment, pour le tokamak circulaire, seul le plasma de bord nous intéresse. Les conditions aux limites sont, comme pour la géométrie annulaire, des conditions de Neumann et mixte, traitées dans la partie (2.1.3).

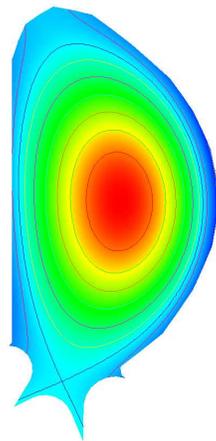


FIGURE 2.14 – Densité de flux magnétique sur la géométrie complète d'ITER, donnée par le code CEDRES++ [38, 29].

La première condition initiale étudiée est similaire à celle de la figure (2.10). Cependant, étant donnée la complexité de la géométrie, une expression analytique du profil de température ne peut pas être donnée. Aussi, la condition initiale considérée est la solution stationnaire du même problème avec un terme de rayonnement nul, la température est donc quasi-linéaire par rapport au rayon.

La température de rayonnement est prise à l'intérieur de l'intervalle de température : $T(r_{min}) > \bar{T} > T(r_{max})$ avec $\bar{T} = 20$ et $\Delta T = 5$. Le pas de temps est $\Delta t = 10^{-6}$.

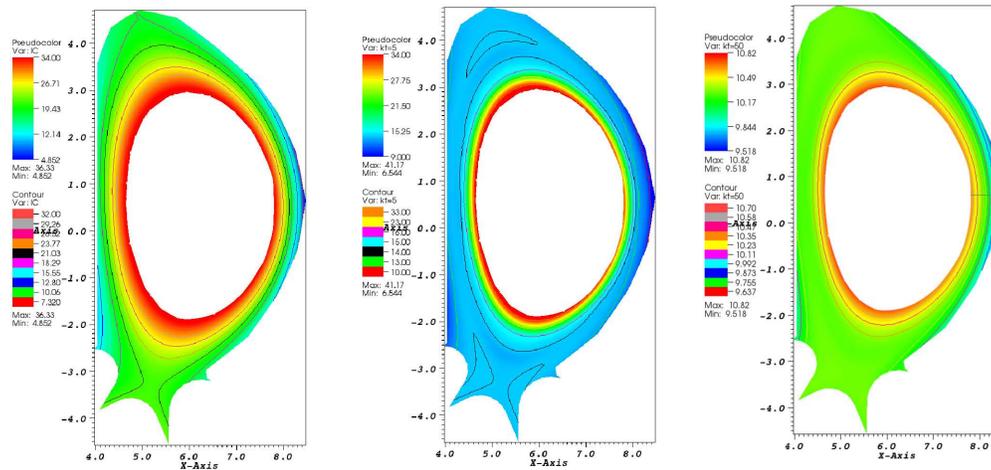


FIGURE 2.15 – Evolution de la température (kt = 0, 5, 50).

La figure (2.15) montre l'évolution global des champs thermiques au cours du calcul et la figure (2.16), l'évolution d'un profil radial. Comme dans le cas du tokamak circulaire, une zone radiative se forme et se déplace radialement en direction du coeur du plasma dont la température est affectée. Par ailleurs, certaines différences avec la géométrie circulaire sont aussi observées :

- aucun maximum de température n'apparaît à l'arrière de la zone radiative et à l'équilibre, la température est quasiment constante dans la SOL (courbe verte de la figure (2.16))
- les isothermes prennent des formes particulière au niveau du point X et au dessus du coeur

Ainsi, la géométrie particulière d'ITER peut être la cause des grandes différences avec le tokamak circulaire qui est entièrement symétrique.

Géométrie d'ITER : le spot froid

Le dernier cas test présenté sur ce problème de rayonnement est similaire à celui dont les résultats sont donnés par la figure (2.12). En effet, la condition initiale considérée est la même que pour le test précédent mais la variation quasi-linéaire du profil est affectée par un spot froid, comme nous le montre la figure (2.17).

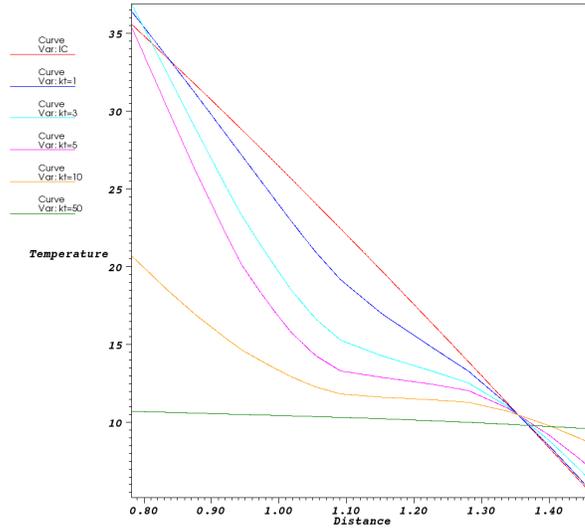


FIGURE 2.16 – Evolution du profil de température pour la condition initiale linéaire dans la géométrie d'ITER.

La température de rayonnement est prise à l'intérieur de ce spot froid et donc à l'extérieur de l'intervalle de température, $[T(r_{min}), T(r_{max})]$ avec, $T(r_{min}) > T(r_{max}) > \bar{T}$, $\bar{T} = 9$ et $\Delta T = 1$. Le pas de temps est $\Delta t = 10^{-8}$.

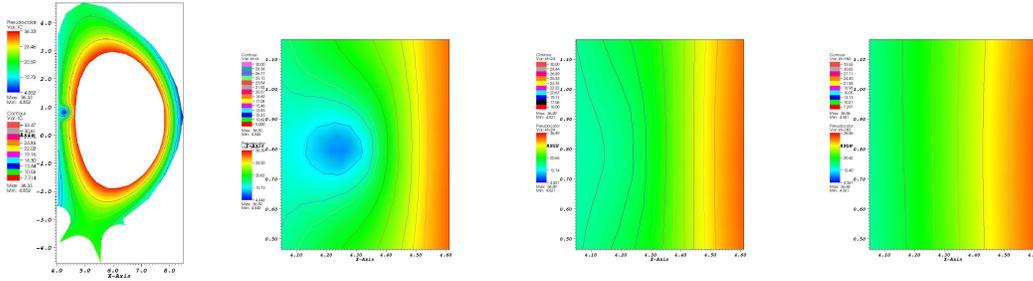


FIGURE 2.17 – Evolution de la température (kt = 0, 4, 24, 160).

Les phénomènes observés au cours du temps, représentés par les figures (2.17) et (2.18) sont similaires à ceux observés dans le tokamak circulaire. En effet, tout d'abord, la zone radiative se déplace radialement en direction de la périphérie du tore, le rayonnement très localisé étant probablement compensé par la condition aux limites de flux d'entrée. Ce phénomène entraîne en plus de la forte diffusion parallèle aux lignes de champ magnétique la disparition du spot froid à l'équilibre et donc du phénomène de rayonnement, la température \bar{T} n'étant plus atteinte dans le système. A l'équilibre, le profil de température redevient quasi-linéaire comme dans le reste de la géométrie.

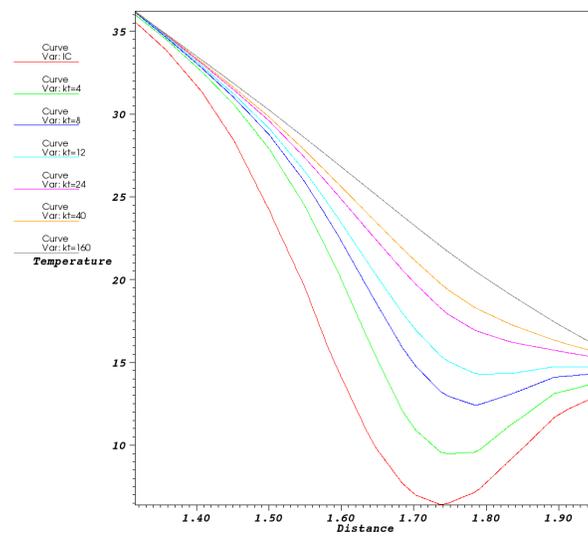


FIGURE 2.18 – Evolution du profil de température, au niveau du spot froid, dans la géométrie d'ITER.

Chapitre 3

Le modèle numérique

Suite à l'étude menée sur la diffusion fortement anisotrope dans le chapitre précédent, on s'intéresse ici au système (1.56) qui est proche d'un système de Navier-Stokes avec terme de forçage :

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + pI) + \nabla \cdot \sigma &= \mathbf{F} \\ \partial_t \rho e + \nabla \cdot ((\rho e + p)\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\sigma \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{q} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Rappelons que σ correspond au tenseur des contraintes visqueuses et \mathbf{q} à la densité de flux thermique, tous deux donnés par les relations de fermeture de Braginskii. Par ailleurs, la force permettant de confiner le plasma au coeur du tokamak est notée \mathbf{F} , avec $\mathbf{F} = \mathbf{J} \wedge \mathbf{B}$.

Certaines simulations seront dans un premier temps menées sur un système de type Euler. En l'absence des termes visqueux et diffusifs, on a :

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + pI) &= \mathbf{F} \\ \partial_t \rho e + \nabla \cdot ((\rho e + p)\mathbf{u}) &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}\end{aligned}\tag{3.2}$$

Une méthode de volumes finis [48] a été choisie pour approximer les termes de transport alors que pour les termes diffusifs et visqueux, on utilise comme dans le chapitre précédent, des éléments finis P_1 .

Plusieurs points sont abordés dans ce chapitre. Le premier problème soulevé concerne l'approximation du terme force \mathbf{F} en vue de préserver l'équilibre au sein du plasma. Ce terme de forçage permet d'assurer le confinement du plasma et représente la force magnétique $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$. Dans le cadre de ce modèle, celle-ci n'est pas explicitement calculée et elle est considérée comme une constante.

En l'absence de vitesse, la préservation de l'équilibre du plasma revient à maintenir l'égalité $\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$, point qui s'avère difficile. Dans ce but, plusieurs méthodes sont alors proposées et testées :

- approximation du terme source,
- implémentation d'un nouveau solveur de Riemann,
- évaluation numérique du flux associé.

La modélisation sous la forme de terme force montre un déséquilibre artificiel du plasma (c.f. chapitre 5) dû à la différence de discrétisation des termes de transport et de ce terme de forçage. Cette première conclusion a alors conduit à l'implémentation d'un nouveau solveur de Riemann afin de résoudre le problème. Cependant, dans le cas de la géométrie axisymétrique, cette méthode présente aussi un déséquilibre du plasma. Ainsi pour finir, une dernière méthode consistant à évaluer numériquement le flux associé à ce terme de forçage a été mise en place.

Ensuite, les conditions aux limites sont traitées ici et notamment la condition aux limites de Bohm [24, 42], qui modélise l'interaction plasma-paroi au niveau des plaques du divertor dans les tokamaks. Ces conditions aux limites sont inhabituelles en mécanique des fluides et sont délicates à traiter. Celles-ci modélisent le fait que les particules qui se trouvent dans la SOL peuvent sortir du tokamak à une vitesse sonique, voire même supersonique.

3.1 Modélisation du terme équilibre

3.1.1 Champ magnétique et champ de force associé

L'équation de Grad-Shafranov [58, 27] permet de décrire l'équilibre du plasma à partir des équations de la Magnétohydrodynamique (MHD), en particulier dans le cas de la géométrie axisymétrique toroïdale des tokamaks. Les différentes étapes permettant d'obtenir cette équation sont brièvement rappelées.

La MHD permet de décrire le comportement du plasma en présence d'un champ électromagnétique. Elle repose sur les équations de Navier Stokes pour l'hydrodynamique, couplées aux équations de Maxwell, décrivant l'électromagnétisme et elle fournit en particulier les équations suivantes qui nous intéressent ici, avec D_t , la dérivée particulaire :

$$\begin{aligned} \rho D_t \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} - \nabla p \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

L'équilibre considéré consiste à chercher une solution stationnaire de la MHD, où la

vitesse du plasma est nulle. Le système (3.3) devient alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{J} \wedge \mathbf{B} &= \nabla p \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\tag{3.4}$$

La propriété d'axisymétrie caractéristique de la géométrie toroïdale du tokamak doit être envisagée. Dans le système de coordonnées cylindriques, (R, θ, Z) , l'équation sur la divergence du champ magnétique devient :

$$\frac{1}{R} \partial_R R B_R + \partial_Z B_Z = 0\tag{3.5}$$

Les expressions des composantes du champ magnétique poloïdal, \mathbf{B}_p sont alors données à partir du potentiel magnétique ϕ :

$$B_R = -\frac{1}{R} \partial_Z \phi \text{ et } B_Z = \frac{1}{R} \partial_R \phi.\tag{3.6}$$

L'expression globale du champ magnétique est alors :

$$\mathbf{B} = B_\theta \mathbf{e}_\theta + \mathbf{B}_p \text{ avec } \mathbf{B}_p = \frac{1}{R} \nabla \phi \wedge \mathbf{e}_\theta\tag{3.7}$$

La composante toroïdale du champ magnétique s'exprime à partir d'une fonction $F(\phi)$:

$$B_\theta = \frac{F(\phi)}{R}.\tag{3.8}$$

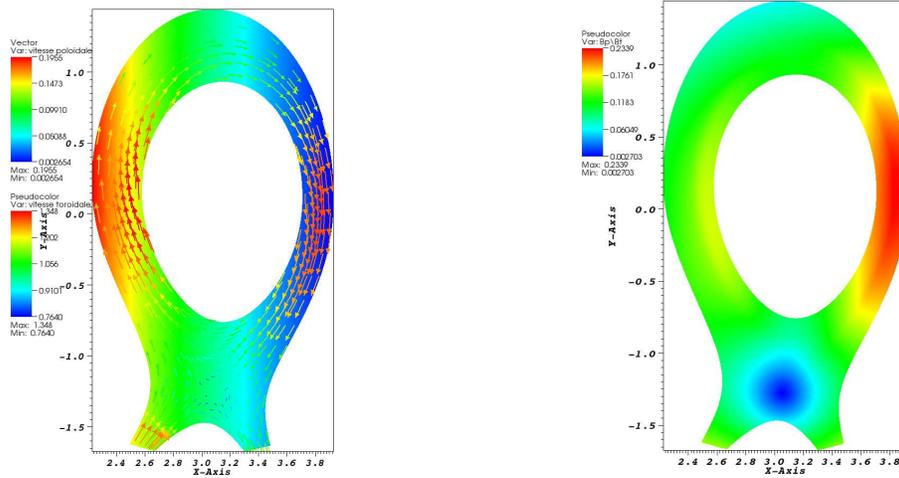
En reportant ces expressions dans les équations restantes du système (3.4), moyennant quelques calculs ([58], [27]), l'équation de Grad-Shafranov est obtenue :

$$\Delta^* \phi = -\mu_0 R^2 \partial_\phi p - F \partial_\phi F,\tag{3.9}$$

avec, Δ^* , l'opérateur de Grad-Shafranov donné par :

$$\Delta^* \phi = R \partial_R \left(\frac{1}{R} \partial_R \phi \right) + \partial_Z^2 \phi.\tag{3.10}$$

L'équation de Grad-Shafranov est notamment résolue par les codes de calcul JOREK [41, 50] ou CEDRES++ [38, 29]. Le code JOREK résout aussi les équations de la MHD réduite et fournit le potentiel magnétique, la température et la densité associés à un équilibre donné sur une géométrie du tokamak JET ainsi qu'un maillage aligné sur les lignes de champ magnétique. Ces différentes données seront utilisées dans les simulations numériques du chapitre 4.

FIGURE 3.1 – Champ magnétique et ratio B_p/B_t obtenus.

Le champ magnétique est donc obtenu (c.f. annexe D) et est donné pour le tokamak JET par les figures 3.1.

Dans cette thèse, nous ne considérons pas la partie électromagnétique et nous nous restreignons à la partie hydrodynamique du problème complet. La difficulté est alors de modéliser dans les équations (3.2) la force \mathbf{F} qui maintient l'équilibre. A l'équilibre, on a d'après (3.4) :

$$\mathbf{J} \wedge \mathbf{B} = \nabla p_{eq}. \quad (3.11)$$

L'idée développée ci-après est donc de modéliser le terme équilibre par l'intermédiaire du gradient de la pression à l'équilibre.

Le système à approximer sans termes diffusif et visqueux dans un premier temps, devient alors :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}) &= \nabla p_{eq} \\ \partial_t \rho e + \nabla \cdot ((\rho e + p) \mathbf{u}) &= \nabla p_{eq} \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.12)$$

De façon évidente, une vitesse nulle et une pression égale à p_{eq} constituent une solution stationnaire du problème, comme voulu si la condition initiale représente déjà un équilibre du système. La difficulté est de préserver au niveau discret cette propriété du problème continu.

3.1.2 Modélisation sous la forme d'un terme force

Connaissant la valeur de la pression en chacun des points du maillage, le gradient de celle-ci peut être déterminé aux sommets des éléments de la même façon que le gradient du potentiel magnétique, utilisé pour déterminer le champ magnétique, (c.f. annexe D).

Le gradient de pression étant ainsi évalué en chaque point, une modélisation sous la forme d'un terme source a dans un premier temps été envisagée.

Dans le but d'utiliser une méthode de volumes finis, un bilan local des flux dans les cellules de contrôle doit être effectué. Dans le cadre de ce travail, une approche vertex-centered est envisagée. Les cellules de contrôle sont alors définies à partir des barycentres des triangles et des milieux des segments (maillage dual, c.f. figure (3.2)) .

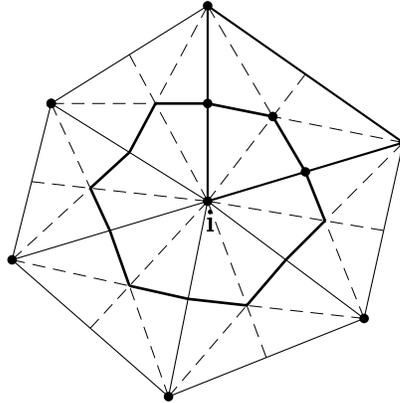


FIGURE 3.2 – Cellule de contrôle associé au point i .

En notant Ω_i , la cellule duale associée au point i et $|\Omega_i|$ son aire, le bilan de flux du système donne alors :

$$\begin{aligned}
 |\Omega_i| \partial_t \rho_i + \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) d\Omega_i &= 0 \\
 |\Omega_i| \partial_t \rho_i \mathbf{u}_i + \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}) d\Omega_i &= \int_{\Omega_i} \nabla p_{eq} d\Omega_i \\
 |\Omega_i| \partial_t \rho_i e_i + \int_{\Omega_i} \nabla \cdot ((\rho e + p) \mathbf{u}) d\Omega_i &= \int_{\Omega_i} \nabla p_{eq} \cdot \mathbf{u} d\Omega_i
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Par le théorème de divergence, ce bilan de flux devient, en notant Γ_i le contour de la cellule duale Ω_i et \mathbf{n} le vecteur normal associé :

$$\begin{aligned}
|\Omega_i| \partial_t \rho_i + \int_{\Gamma_i} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma_i &= 0 \\
|\Omega_i| \partial_t \rho_i \mathbf{u}_i + \int_{\Gamma_i} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + pI) \cdot \mathbf{n} d\Gamma_i &= \int_{\Omega_i} \nabla p_{eq} d\Omega_i \\
|\Omega_i| \partial_t \rho_i e_i + \int_{\Gamma_i} (\rho e + p) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma_i &= \int_{\Omega_i} \nabla p_{eq} \cdot \mathbf{u} d\Omega_i
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Utilisant un schéma de Godunov, les flux des équations d'Euler (sans le terme force) sur chacun des segments qui constituent Γ_i sont calculés à l'aide d'un solveur de Riemann ([62]). Dans un premier temps, une approximation du terme d'équilibre sous la forme d'un terme source est envisagée :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_i} \nabla p_{eq} d\Omega_i &= |\Omega_i| (\nabla p_{eq})_i \\
\int_{\Omega_i} \nabla p_{eq} \cdot \mathbf{u} d\Omega_i &= |\Omega_i| (\nabla p_{eq})_i \cdot \mathbf{u}_i
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Toutefois, nos simulations (c.f. section 5.2.1) ont montré que cette méthode de discrétisation est délicate. En effet, comme mentionné précédemment, dans le cas où la condition initiale de pression est prise égale à la pression d'équilibre p_{eq} , les différents termes de pression doivent se compenser exactement. Or ici, ces termes sont discrétisés différemment : l'un est issu du solveur de Riemann alors que l'autre est calculé comme un terme force. Ces différences peuvent engendrer un déséquilibre artificiel du plasma.

3.1.3 Modélisation dans le solveur de Riemann

La différence de discrétisation entre le terme d'équilibre p_{eq} en terme source et le terme de pression dans le solveur de Riemann empêchant la conservation de l'équilibre, l'idée suivie dans un second temps est de développer un solveur de Riemann prenant en compte le terme force. Dans ce but, le système suivant est étudié :

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\
\partial_t \rho \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \bar{\Pi} I) &= 0 \\
\partial_t \rho e + \nabla \cdot ((\rho e + \Pi) \mathbf{u}) &= -p_{eq} \nabla \cdot \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

avec $\Pi = p - p_{eq}$ et $\rho e = \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho u^2$.

En raison du terme de droite de l'équation de l'énergie, le système n'est plus conservatif. Afin de le résoudre, un schéma de relaxation a été utilisé. De tels schémas ont été introduits pour des systèmes conservatifs dans [43] puis ont été étendus au cas non conservatifs [8, 13]. L'idée principale sur laquelle repose ces schémas est l'utilisation d'un système de relaxation

pour lequel la solution est plus facile à calculer. Dans ce but, le système 1D suivant est proposé :

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u &= 0 \\
\partial_t u + u \partial_x u + \frac{1}{\rho} \partial_x \bar{\Pi} &= 0 \\
\partial_t \varepsilon + u \partial_x \varepsilon + \frac{\bar{\Pi}}{\rho} \partial_x u + \frac{p_{eq}}{\rho} \partial_x u &= 0 \\
\partial_t \bar{\Pi} + u \partial_x \bar{\Pi} + \frac{Z^2}{\rho} \partial_x u &= \frac{1}{\lambda} (\rho(\gamma - 1)\varepsilon - p_{eq} - \bar{\Pi}) \\
\partial_t Z + u \partial_x Z &= 0 \\
\partial_t p_{eq} &= 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

avec l'introduction des variables artificielles Z et $\bar{\Pi}$.

En utilisant le développement de Chapman-Enskog pour $\bar{\Pi}$: $\bar{\Pi} = p - p_{eq} + \lambda \bar{\Pi}' + O(\lambda^2)$, on peut voir que quand λ tend vers 0, ce système (3.17) converge bien vers le système (3.16) voulu puisqu'il est équivalent à :

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho + \partial_x(\rho \mathbf{u}) &= 0 \\
\partial_t \rho \mathbf{u} + \partial_x(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \bar{\Pi} I) &= -\lambda \partial_x \bar{\Pi}' \\
\partial_t \rho e + \partial_x((\rho e + \Pi) \mathbf{u}) + p_{eq} \partial_x \mathbf{u} &= -\lambda \partial_x (\bar{\Pi}' \mathbf{u})
\end{aligned} \tag{3.18}$$

sachant qu'à l'ordre 0, on trouve : $\bar{\Pi}' = (\rho c^2 - \frac{Z^2}{\rho}) \partial_x \mathbf{u} + \mathbf{u} \partial_x p_{eq}$.

Le système à résoudre est alors le suivant :

$$\partial_t W + A \partial_x W = 0 \tag{3.19}$$

avec W , le vecteur des variables et A , la matrice Jacobienne du système :

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ \varepsilon \\ \bar{\Pi} \\ Z \\ p_{eq} \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{\Pi} + p_{eq}}{\rho} & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Z^2}{\rho} & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

Les valeurs propres de cette matrice A sont

$$\lambda_k = \left\{ 0 ; u - \frac{Z}{\rho} ; u + \frac{Z}{\rho} ; u \right\}, \tag{3.21}$$

toutes de multiplicité 1 sauf u de multiplicité 3.

Les vecteurs propres à droite, \mathbf{r}_{λ_k} associés aux valeurs propres λ_k sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{u,1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_{u,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_{u,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{r}_{u-\frac{Z}{\rho}} &= \begin{pmatrix} \rho^2 \\ -Z \\ \bar{\Pi} + p_{eq} \\ Z^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{r}_{u+\frac{Z}{\rho}} = \begin{pmatrix} \rho^2 \\ Z \\ \bar{\Pi} + p_{eq} \\ Z^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Les champs obtenus ici sont linéairement dégénérés, les valeurs propres λ_k et chacun des vecteurs propres associé satisfaisant à la relation :

$$\nabla_W \lambda_k \cdot \mathbf{r}_{\lambda_k} = 0. \quad (3.23)$$

A chacune de ses valeurs propres λ_k , peuvent être associés les invariants de Riemann I_{λ_k} . Ceux-ci satisfont la relation :

$$\nabla_W I_{\lambda_k} \cdot \mathbf{r}_{\lambda_k} = 0. \quad (3.24)$$

Ainsi, les invariants de Riemann suivants sont obtenus :

- pour 0 : $\rho, u, \varepsilon, \bar{\Pi}, Z$
- pour u : $u, \bar{\Pi}, p_{eq}$
- pour $u - \frac{Z}{\rho}$: $Z, p_{eq}, u - \frac{Z}{\rho}, (\bar{\Pi} + p_{eq})^2 - 2Z^2\varepsilon, \bar{\Pi} + Zu$
- pour $u + \frac{Z}{\rho}$: $Z, p_{eq}, u + \frac{Z}{\rho}, (\bar{\Pi} + p_{eq})^2 - 2Z^2\varepsilon, \bar{\Pi} - Zu$

La variable Z est choisie de telle façon que les ondes soient rangées dans l'ordre suivant : $\lambda_{u-Z/\rho} < \lambda_u < \lambda_{u+Z/\rho}$. Les calculs sont donnés en Annexe E.

Reste alors le problème de l'onde λ_0 puisque quatre configurations sont possibles. Ces différentes configurations vont être étudiées ci-après. La solution du problème de Riemann est alors constante par morceaux et est composée des états notés : $W_L, W_L^*, W^*, W_R^*, W_R$, sachant que W_L et W_R sont respectivement les états gauche et droit. Pour chacune des configurations possibles, les invariants de Riemann permettent le calcul des états intermédiaires, W_L^*, W^*, W_R^* représentés dans la figure (3.3).

- $\lambda_0 < \lambda_{u-Z/\rho} < \lambda_u < \lambda_{u+Z/\rho}$

$$W_L^* = \begin{pmatrix} \rho_L \\ u_L \\ \varepsilon_L \\ \bar{\Pi}_L \\ Z_L \\ p_{eq,R} \end{pmatrix}, W^* = \begin{pmatrix} \rho^* \\ u^* \\ \varepsilon^* \\ \bar{\Pi}^* \\ Z_L \\ p_{eq,R} \end{pmatrix}, W_R^* = \begin{pmatrix} \rho^{**} \\ u^* \\ \varepsilon^{**} \\ \bar{\Pi}^* \\ Z_R \\ p_{eq,R} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

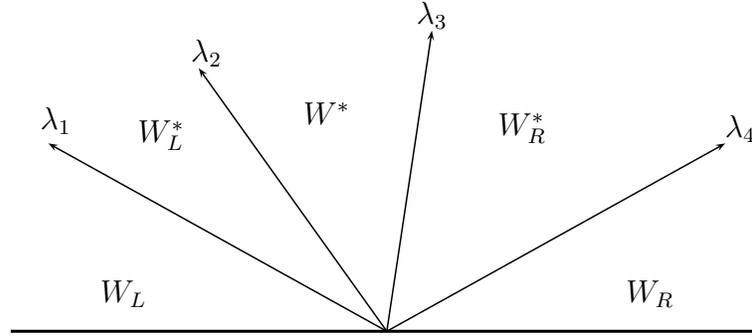


FIGURE 3.3 – Etats à chaque interface.

Les valeurs étoiles qui apparaissent dans ces différents états sont données par les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* = \frac{\bar{\Pi}_L - \bar{\Pi}_R + Z_L u_L + Z_R u_R}{Z_L + Z_R}, \\ \bar{\Pi}^* = \bar{\Pi}_L + Z_L(u_L - u^*), \\ \frac{1}{\rho^*} = \frac{u^* - u_L}{Z_L} + \frac{1}{\rho_L}, \\ \frac{1}{\rho^{**}} = \frac{u_R - u^*}{Z_R} + \frac{1}{\rho_R}, \\ \varepsilon^* = \varepsilon_L + \frac{(\bar{\Pi}^* + p_{eq,R})^2 - (\bar{\Pi}_L + p_{eq,R})^2}{2Z_L^2}, \\ \varepsilon^{**} = \varepsilon_R + \frac{(\bar{\Pi}^* + p_{eq,R})^2 - (\bar{\Pi}_R + p_{eq,R})^2}{2Z_R^2} \end{array} \right. \quad (3.26)$$

$$- \lambda_{u-Z/\rho} < \lambda_0 < \lambda_u < \lambda_{u+Z/\rho}$$

$$W_L^* = \begin{pmatrix} \rho^* \\ u^* \\ \varepsilon^* \\ \bar{\Pi}^* \\ Z_L \\ p_{eq,L} \end{pmatrix}, \quad W^* = \begin{pmatrix} \rho^* \\ u^* \\ \varepsilon^* \\ \bar{\Pi}^* \\ Z_L \\ p_{eq,R} \end{pmatrix}, \quad W_R^* = \begin{pmatrix} \rho^{**} \\ u^* \\ \varepsilon^{**} \\ \bar{\Pi}^* \\ Z_R \\ p_{eq,R} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Les valeurs ρ^* , ρ^{**} , u^* et $\bar{\Pi}^*$ sont données par les mêmes formules que précédemment,

(3.26).

Seules les énergies, ε^* et ε^{**} changent :

$$\begin{cases} \varepsilon^* &= \varepsilon_L + \frac{(\bar{\Pi}^* + p_{eq,L})^2 - (\bar{\Pi}_L + p_{eq,L})^2}{2Z_L^2}, \\ \varepsilon^{**} &= \varepsilon_R + \frac{(\bar{\Pi}^* + p_{eq,R})^2 - (\bar{\Pi}_R + p_{eq,R})^2}{2Z_R^2} \end{cases} \quad (3.28)$$

$$- \lambda_{u-Z/\rho} < \lambda_u < \lambda_0 < \lambda_{u+Z/\rho}$$

$$W_L^* = \begin{pmatrix} \rho^* \\ u^* \\ \varepsilon^* \\ \bar{\Pi}^* \\ Z_L \\ p_{eq,L} \end{pmatrix}, \quad W^* = \begin{pmatrix} \rho^{**} \\ u^* \\ \varepsilon^{**} \\ \bar{\Pi}^* \\ Z_R \\ p_{eq,L} \end{pmatrix}, \quad W_R^* = \begin{pmatrix} \rho^{**} \\ u^* \\ \varepsilon^{**} \\ \bar{\Pi}^* \\ Z_R \\ p_{eq,R} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Les valeurs ρ^* , ρ^{**} , u^* et $\bar{\Pi}^*$ sont données par (3.26).Seules les énergies, ε^* et ε^{**} changent :

$$\begin{cases} \varepsilon^* &= \varepsilon_L + \frac{(\bar{\Pi}^* + p_{eq,L})^2 - (\bar{\Pi}_L + p_{eq,L})^2}{2Z_L^2} \\ \varepsilon^{**} &= \varepsilon_R + \frac{(\bar{\Pi}^* + p_{eq,R})^2 - (\bar{\Pi}_R + p_{eq,R})^2}{2Z_R^2} \end{cases} \quad (3.30)$$

$$- \lambda_{u-Z/\rho} < \lambda_u < \lambda_{u+Z/\rho} < \lambda_0$$

$$W_L^* = \begin{pmatrix} \rho^* \\ u^* \\ \varepsilon^* \\ \bar{\Pi}^* \\ Z_L \\ p_{eq,L} \end{pmatrix}, \quad W^* = \begin{pmatrix} \rho^{**} \\ u^* \\ \varepsilon^{**} \\ \bar{\Pi}^* \\ Z_R \\ p_{eq,L} \end{pmatrix}, \quad W_R^* = \begin{pmatrix} \rho_R \\ u_R \\ \varepsilon_R \\ \bar{\Pi}_R \\ Z_R \\ p_{eq,L} \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Les valeurs ρ^* , ρ^{**} , u^* et $\bar{\Pi}^*$ sont données par (3.26).Seules les énergies, ε^* et ε^{**} changent :

$$\begin{cases} \varepsilon^* &= \varepsilon_L + \frac{(\bar{\Pi}^* + p_{eq,L})^2 - (\bar{\Pi}_L + p_{eq,L})^2}{2Z_L^2} \\ \varepsilon^{**} &= \varepsilon_R + \frac{(\bar{\Pi}^* + p_{eq,L})^2 - (\bar{\Pi}_R + p_{eq,L})^2}{2Z_R^2} \end{cases} \quad (3.32)$$

Une fois définie chacune des configurations possibles et les différents états associés qui composent la solution du problème de Riemann, le flux numérique peut être calculé suivant la méthode de Godunov. Celle-ci exprime le nouvel état à calculer, W_i^{n+1} en fonction des solutions des deux problèmes de Riemann qui affectent le point i qui sont notés ici $\vartheta_{i-1/2}$ et $\vartheta_{i+1/2}$ et qui sont représentés par la figure (3.4) :

$$W_i^{n+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \int_0^{\frac{\Delta x}{2\Delta t}} \vartheta_{i-1/2}(\xi) d\xi + \frac{\Delta t}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2\Delta t}}^0 \vartheta_{i+1/2}(\xi) d\xi. \quad (3.33)$$

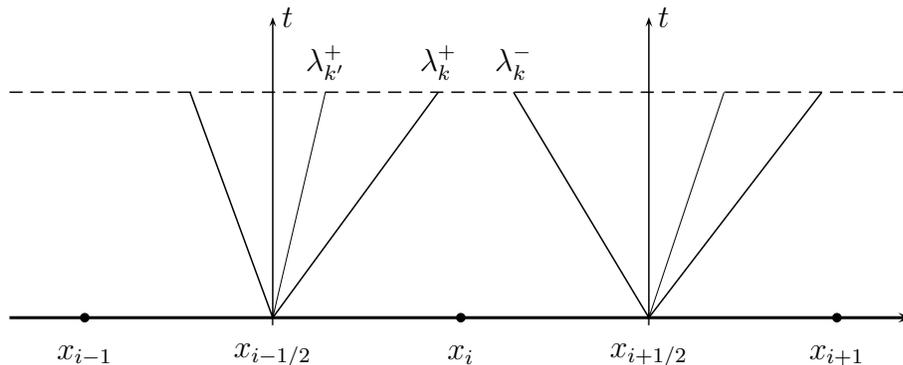


FIGURE 3.4 – Méthode de Godunov et notations.

L'ajout et la soustraction de l'état calculé à l'itération précédente, W_i^n permettent de faire apparaître des fluctuations, $\phi_{i-1/2}^+$ et $\phi_{i+1/2}^-$:

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} &= W_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \int_0^{\frac{\Delta x}{2\Delta t}} (\vartheta_{i-1/2}(\xi) - W_i^n) d\xi + \frac{\Delta t}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2\Delta t}}^0 (\vartheta_{i+1/2}(\xi) - W_i^n) d\xi \\ &= W_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i-1/2}^+ - \phi_{i+1/2}^-) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ces fluctuations sont ensuite calculées :

$$\begin{aligned} \phi_{i-1/2}^+ &= \sum_k (\lambda_k^+ \delta W_k)_{i-1/2} \\ \phi_{i+1/2}^- &= \sum_k (\lambda_k^- \delta W_k)_{i+1/2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

où les indices $i-1/2$ et $i+1/2$ se réfèrent à chacun des problèmes de Riemann qui affectent le point i (cf figure (3.4)). λ_k^+ et λ_k^- sont respectivement les valeurs propres positives et négatives et δW_k correspond au saut à la k ème discontinuité, selon le problème de Riemann considéré. Les sauts δW_k sont donc calculés grâce aux états, $W_L, W_L^*, W^*, W_R^*, W_R$ donnés précédemment pour chacune des configurations, (3.25) à (3.32).

Des résultats avec ce nouveau solveur de Riemann sont présentés section 5.2.2.

3.1.4 Modélisation par compensation numérique

Une dernière idée a été envisagée pour évaluer les termes forces qui permettent de confiner le plasma. L'idée ici n'est plus d'utiliser l'égalité avec le gradient de la pression équilibre (3.11) mais de les calculer numériquement. Pour cela, dans un premier temps, le système sans terme force mais éventuellement avec les termes de diffusion est considéré :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + pI) + \nabla \cdot \sigma &= 0 \\ \partial_t \rho e + \nabla \cdot ((\rho e + p)\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\sigma \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{q} &= 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Une première itération est effectuée sur ce système pour évaluer numériquement des quantités \mathcal{F}_k telles que :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \nabla \cdot (\rho_{eq} \mathbf{u}_{eq}) \\ \mathcal{F}_2 &= \nabla \cdot (\rho_{eq} \mathbf{u}_{eq} \otimes \mathbf{u}_{eq} + p_{eq} I) + \nabla \cdot \sigma_{eq} \\ \mathcal{F}_3 &= \rho_{eq} e_{eq} + \nabla \cdot ((\rho_{eq} e_{eq} + p_{eq}) \mathbf{u}_{eq}) + \nabla \cdot (\sigma \mathbf{u}_{eq}) + \nabla \cdot \mathbf{q}_{eq} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Les termes de transport sont calculés avec un solveur de Riemann alors que les termes diffusifs sont évalués avec une méthode FEM. Ces notations sont donc abusives puisque les quantités \mathcal{F}_k sont discrètes et n'ont aucun sens en continu.

Cette simple itération permet d'évaluer les termes de confinement \mathcal{F}_k . Le véritable calcul est lui effectué pour le système complet auquel ces termes de préservation de l'équilibre du plasma sont rajoutés :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= \mathcal{F}_1 \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + pI) + \nabla \cdot \sigma &= \mathcal{F}_2 \\ \partial_t \rho e + \nabla \cdot ((\rho e + p)\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\sigma \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{q} &= \mathcal{F}_3 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Il est évident que sous des conditions initiales identiques, l'équilibre va être préservé puisque le terme de confinement est évalué de la même manière que la somme des termes diffusifs et de transport.

Cette dernière méthode résout également le problème de la conservation de la matière dans le système considéré. En effet, au niveau des plaques de neutralisation, les conditions

aux limites (conditions aux limites de Bohm, c.f partie 3.2) induisent un flux de matière sortant. Des conditions de glissement étant utilisées aux parois du tokamak ainsi qu'au coeur du plasma, on a un déséquilibre avec les conditions de Bohm, qui favorisent la sortie de matière dans le divertor, sans mécanisme de réalimentation du plasma en particules.

Avec cette dernière méthode d'évaluation numérique du terme de confinement du plasma, le terme \mathcal{F}_1 permet d'agir comme une source de matière sur l'ensemble du système réalimentant donc celui-ci en particules et rééquilibrant le flux de matière imposé par les conditions aux limites de Bohm.

Des résultats utilisant cette méthode de compensation numérique sont présentés section 5.3.

3.2 Conditions aux limites

Le but de ce travail étant d'étudier les phénomènes qui ont lieu dans le plasma de bord du tokamak, le domaine de calcul ne considère pas la partie du coeur du tokamak.

Les conditions aux limites retenues sont les suivantes.

- Aux parois extérieures du tokamak, ainsi que la « zone privée », partie de la paroi située entre les deux plaques du divertor, on utilise des conditions aux limites glissantes.
- Au niveau des plaques du divertor, un type particulier de condition aux limites, « la condition aux limites de Bohm » intervient pour modéliser les interactions entre le plasma et les plaques. Cette condition permet de modéliser le flux de particules qui sort du tokamak à une vitesse de l'ordre de la vitesse du son, voire même supersonique.
- Des conditions aux limites doivent également être imposées à l'interface entre le coeur et le bord du plasma. Ce point s'avère délicat. En effet, le coeur du plasma doit alimenter le bord en particules pour compenser la perte de matière au niveau des plaques due aux conditions aux limites de Bohm. Pour ne pas vider le tokamak, il est nécessaire que ces flux d'entrée et de sortie se compensent. Or, il est difficile en pratique de quantifier le flux imposé par les conditions aux limites de Bohm. Le choix d'une condition aux limites glissante a été effectué au niveau du bord, avec l'idée que le flux nécessaire pour réalimenter le plasma serait modélisé par la présence d'un terme source dans l'équation de continuité. On a alors une réalimentation répartie du plasma et non plus à l'interface entre le coeur et le bord.

Dans un premier temps, la modélisation des conditions aux limites glissantes est présentée. Ensuite, on étudie les conditions aux limites de Bohm et leur conséquence sur le profil de

la vitesse.

3.2.1 Paroi glissante

Des conditions aux limites glissantes ont été choisie pour modéliser les parois du tokamak, zone privée comprise, ainsi qu'à l'interface avec le coeur. Dans le cas Euler, ces parois glissantes reviennent à imposer une vitesse normale au bord nulle : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, avec \mathbf{n} le vecteur normal à la surface considérée.

La formulation faible du système d'Euler est rappelée, pour un point du bord i_b :

$$\begin{aligned}
|\Omega_{i_b}| \partial_t \rho_{i_b} &+ \sum_{j \in v(i_b)} \int_{\delta\Omega_{i_b j}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl + \int_{\delta\Gamma_{i_b}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl &= 0 \\
|\Omega_{i_b}| \partial_t \rho_{i_b} \mathbf{u}_{i_b} &+ \sum_{j \in v(i_b)} \int_{\delta\Omega_{i_b j}} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + pI) \cdot \mathbf{n} dl + \int_{\delta\Gamma_{i_b}} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + pI) \cdot \mathbf{n} dl &= 0 \\
|\Omega_{i_b}| \partial_t \rho_{i_b} e_{i_b} &+ \sum_{j \in v(i_b)} \int_{\delta\Omega_{i_b j}} (\rho e + p) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl + \int_{\delta\Gamma_{i_b}} (\rho e + p) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl &= 0
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Pour un point du bord, la cellule duale Ω_{i_b} est définie par les segments reliant le barycentre des triangles auquel le point appartient et le milieu des segments qui sont issus de i_b et qui sont ici notés $\delta\Omega_{i_b j}$, $j \in v(i_b)$ signifiant que le point j appartient au voisinage du point i_b . Les parties communes à la cellule duale et au bord sont notées $\delta\Gamma_{i_b}$.

Avec des conditions de glissement, les intégrales de bord disparaissent naturellement de la formulation faible :

$$\begin{aligned}
|\Omega_{i_b}| \partial_t \rho_{i_b} &+ \sum_{j \in v(i_b)} \int_{\delta\Omega_{i_b j}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl &= 0 \\
|\Omega_{i_b}| \partial_t \rho_{i_b} \mathbf{u}_{i_b} &+ \sum_{j \in v(i_b)} \int_{\delta\Omega_{i_b j}} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + pI) \cdot \mathbf{n} dl + \int_{\delta\Gamma_{i_b}} pI \cdot \mathbf{n} dl &= 0 \\
|\Omega_{i_b}| \partial_t \rho_{i_b} e_{i_b} &+ \sum_{j \in v(i_b)} \int_{\delta\Omega_{i_b j}} (\rho e + p) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl &= 0
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Les flux à travers les segments $\delta\Omega_{i_b j}$ sont calculés de façon classique, à l'aide du solveur de Riemann. Les conditions aux limites glissantes impactent l'équation de quantité de mouvement en rajoutant un terme de pression. Elles n'impactent pas les équations de continuité et d'énergie.

3.2.2 Conditions aux limites de Bohm

Les particules chargées sont attirées par la paroi du divertor. Le flux sortant généré par cette attraction des particules chargées permet de préserver la quasi-neutralité du plasma. Ce phénomène a lieu à l'interface plasma-paroi au niveau des plaques où les lignes de champ magnétique sont ouvertes, dans une zone appelée gaine. La transition plasma-gaine n'est pas brutale mais implique l'existence d'une deuxième zone, appelée pré-gaine. Aux plaques du divertor, la vitesse d'entrée des ions dans la gaine est alors au minimum de l'ordre de grandeur de la vitesse acoustique ionique ([60], [15]), c'est ce qu'on appelle le critère de Bohm :

$$|M| \geq 1 \text{ avec } M = \frac{u}{C} \text{ et } C = \sqrt{\frac{kT}{m_i}}. \quad (3.41)$$

La condition de Bohm se présente ainsi comme une inéquation, car des vitesses supersoniques peuvent apparaître dans le système et qu'il n'y a pas lieu que se développe une couche limite. Plusieurs méthodes ont été testées pour implémenter ces conditions de Bohm et les trois idées principales sur lesquelles reposent ces méthodes sont données ici.

Différentes méthodes pour les conditions aux limites de Bohm

- Dans un premier temps, on a imposé en chaque point i des plaques, une vitesse $\mathbf{v}_i = c_i \mathbf{b}_i$. Cette condition aux limites est de type Dirichlet. La vitesse imposée n'est pas une constante mais fluctue spatialement et temporellement, selon les valeurs de la vitesse du son c_i . Une condition aux limites de Neumann homogène était imposée sur les variables de densité et d'énergie. Cette méthode ne s'est cependant pas révélée efficace. En effet, un nombre de Mach de 1 est bien imposé sur les limiteurs mais des vitesses supersoniques finissent par apparaître dans le système, ce qui n'est pas consistant avec le fait d'imposer un nombre de Mach strictement égal à 1.
- Dans un second temps, une méthode classique en volumes finis a été utilisée. Celle-ci consiste à imposer une condition aux limites par l'intermédiaire de cellules fantômes rajoutées au bord du maillage. Cette méthode est notamment décrite par Leveque [48] et Toro [62].

Dans l'ensemble de la géométrie, on calcule en effet des flux à l'aide de deux états voisins mais pour les noeuds au bord i_b , la cellule duale est tronquée en raison de l'absence de triangles à l'extérieur du domaine. L'idée est alors d'étendre le domaine de calcul avec une couche de mailles supplémentaires. Un état pour cette cellule fantôme i_f est affecté selon la condition aux limites voulue et le flux associé est calculé de façon classique avec les deux états : U_{i_b} et U_{i_f} . Cette cellule fantôme est représentée par la figure (3.5).

Dans le cas des conditions aux limites de Bohm, l'idée est d'imposer un Mach de 1 dans la cellule fantôme par l'intermédiaire de la vitesse $\mathbf{v}_{i_f} = c_{i_b} \mathbf{b}_{i_b}$ et une densité

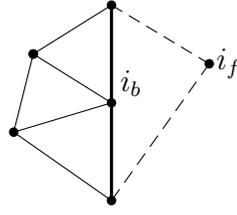


FIGURE 3.5 – Cellule fantôme.

proche du vide pour accentuer le flux sortant. Les autres variables sont prises égales à celles de l'état U_{i_b} . Cette méthode ne s'est pas avérée efficace car en pratique, le Mach au limiteur est bien proche de 1 mais ne le dépasse jamais.

- La dernière idée a été d'imposer le flux pour satisfaire le critère de Bohm. La condition aux limites que l'on veut imposer sur la vitesse avec $|M| \geq 1$ est équivalente à :

$$(\rho \mathbf{u})_i^{n+1} = \rho_i^{n+1} \mathbf{u}_i^* \text{ avec } \mathbf{u}_i^* = \max(c_i, |\mathbf{u}_{v_i}|) \mathbf{b}_i, \quad (3.42)$$

où \mathbf{u}_{v_i} correspond aux vecteurs vitesse des points voisins de i . Cette expression de \mathbf{u}^* permet d'imposer un Mach de 1 en l'absence de vitesses supersoniques à proximité du bord ($\mathbf{u}^* = c\mathbf{b}$) et le cas $\mathbf{u}^* = |\mathbf{u}_v| \mathbf{b}$ permet un Mach supérieur à 1.

Le flux à imposer pour obtenir l'expression (3.42) doit être calculé. Il fait intervenir le flux de la densité, au point i et au temps t^n que l'on notera, $\mathcal{F}_i^{n,\rho}$:

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{a_i} \mathcal{F}_i^{n,\rho}, \quad (3.43)$$

avec a_i , l'aire de la cellule duale et Δt , le pas de temps.

En reportant cette expression en (3.42), on obtient :

$$\begin{aligned} (\rho \mathbf{u})_i^{n+1} &= \rho_i^{n+1} \mathbf{u}_i^* \\ &= \rho_i^n \mathbf{u}_i^n + \rho_i^{n+1} \mathbf{u}_i^* - \rho_i^n \mathbf{u}_i^n \\ &= \rho_i^n \mathbf{u}_i^n + \rho_i^n (\mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i^n) - \frac{\Delta t}{a_i} \mathcal{F}_i^{n,\rho} \mathbf{u}_i^* \\ &= \rho_i^n \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{a_i} \left(\mathcal{F}_i^{n,\rho} \mathbf{u}_i^* - \frac{a_i}{\Delta t} \rho_i^n (\mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i^n) \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Le flux à imposer sur la quantité de mouvement pour satisfaire le critère de Bohm est le suivant :

$$\mathcal{F}_i^{n,\rho \mathbf{u}} = \mathcal{F}_i^{n,\rho} \mathbf{u}_i^* - \frac{a_i}{\Delta t} \rho_i^n (\mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i^n). \quad (3.45)$$

Cette modélisation de la condition aux limites de Bohm a été privilégiée pour les simulations. Elle a en effet conduit au résultat attendu, i.e. d'imposer un nombre de Mach supérieur ou égal à 1 aux plaques du divertor.

3.3 Conditions initiales de vitesse

La condition initiale sur la vitesse s'appuie sur le critère de Bohm. Comme mentionné précédemment, la présence d'une pré-gaine assure l'accélération des ions pour atteindre une vitesse de l'ordre de la vitesse du son au niveau du limiteur. Pour définir la vitesse dans cette pré-gaine, il convient de considérer ces composantes perpendiculaire et parallèle au champ magnétique, respectivement \mathbf{u}_\perp et u_\parallel :

$$\mathbf{u} = u_\parallel \mathbf{b} + \mathbf{u}_\perp. \quad (3.46)$$

A l'instant initial, on suppose

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\perp &= \mathbf{0} \quad \text{partout,} \\ u_\parallel &= 0 \quad \text{à l'intérieur de la séparatrice.} \end{aligned} \quad (3.47)$$

A l'extérieur de la séparatrice, la condition initiale pour la composante parallèle de la vitesse est prise égale à la solution du problème de diffusion unidimensionnel suivant les lignes de champ magnétique, avec s , la coordonnée le long de cette ligne de champ :

$$\partial_s^2 u_\parallel = 0. \quad (3.48)$$

La solution de ce problème est de la forme :

$$u_\parallel = as + b. \quad (3.49)$$

Le critère de Bohm permet de calculer les constantes a et b . En effet, au niveau du divertor, le Mach étant de 1, la vitesse parallèle est égale à plus ou moins la vitesse du son c , d'où :

$$u_\parallel(s=0) = -c_0 \text{ et } u_\parallel(s=l) = c_l, \quad (3.50)$$

avec l , la longueur de la ligne de champ magnétique et c_0 et c_l , les vitesses du son aux extrémités de la ligne de champ. Le signe des conditions aux limites est déterminé par le sens du champ magnétique, sachant que l'on veut un flux sortant.

La solution analytique est évidente :

$$u_\parallel(s) = \frac{c_0 + c_l}{l} s - c_0. \quad (3.51)$$

Les composantes perpendiculaires de la vitesse étant considérées nulles, à l'extérieur de la séparatrice, on a :

$$\mathbf{u} = u_\parallel \mathbf{b}, \text{ avec } u_\parallel \text{ définie par (3.51)} \quad (3.52)$$

Remarque 3.1 *L'implémentation de cette solution analytique peut être complexe dans nos géométries car il est difficile d'associer chacun des points d'un maillage non structuré à une ligne de champ magnétique et à une coordonnée s .*

Le choix d'un maillage aligné sur les lignes de champ magnétique s'avère alors judicieux, car en parcourant les voisins de chaque point du maillage, on peut définir la ligne de champ auquel chacun appartient et donc la solution analytique donnée par (3.51).

Cette condition initiale analytique pose quelques difficultés. En effet, tout d'abord, une discontinuité de la vitesse apparaît au niveau de la séparatrice entre la vitesse nulle à l'intérieur et la vitesse suivant (3.51) à l'extérieur, c.f. figure 3.6. D'autre part, cette condition est imparfaite. Dans les tokamaks, l'accélération des ions pour atteindre la vitesse de son n'est pas constante mais se produit dans une zone proche des plaques.

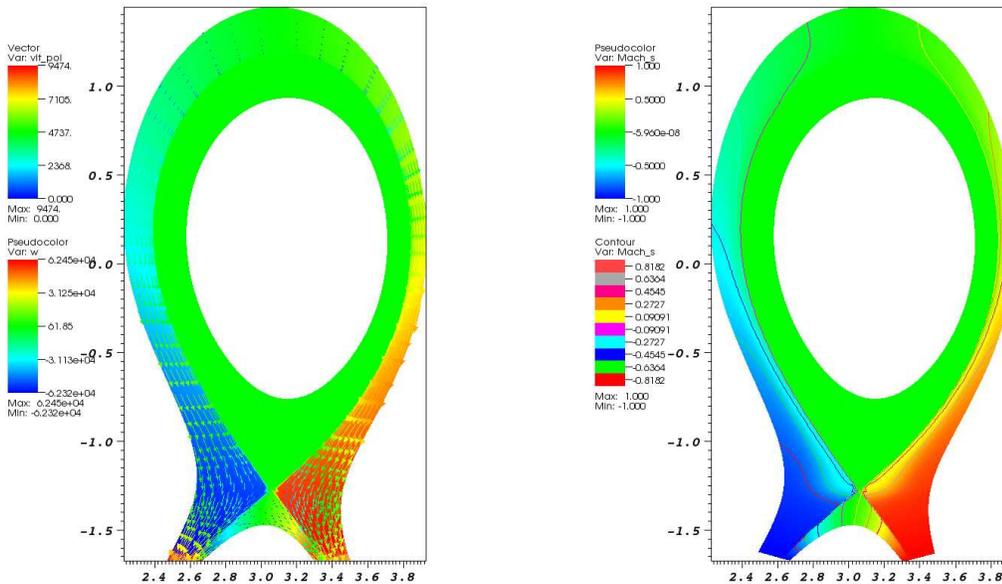


FIGURE 3.6 – Gauche : champ de vitesse azimuthal et vecteurs de vitesse poloidale à la condition initiale. Droite : nombre de Mach à la condition initiale.

Une seconde condition initiale (c.f. figure 3.7) est utilisée ici. La vitesse n'est plus calculée de façon analytique et ne varie plus linéairement suivant les lignes de champ magnétique. En particulier, la croissance de la vitesse se produit dans la partie divertor, ce qui semble être davantage conforme à la physique. Cette condition a été obtenue par M. Bilanceri [10] avec un code VF, densité-quantité de mouvement parallèle, fondé sur l'approximation en vitesse de dérive, en présence notamment d'un terme de diffusion de densité perpendiculaire à \mathbf{B} . Avec cette nouvelle vitesse, le critère de Bohm est également satisfait.

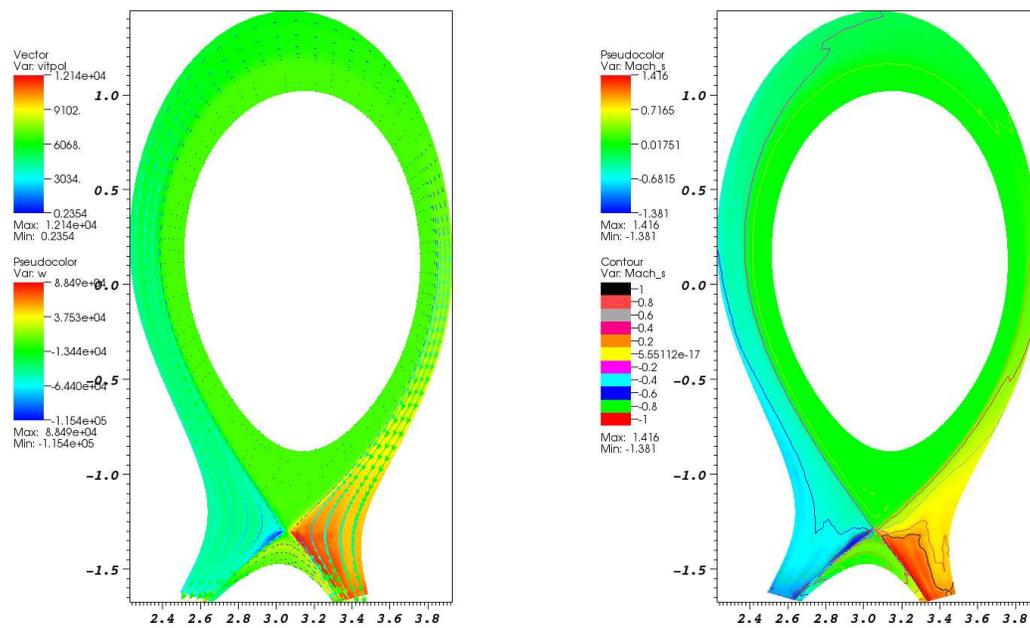


FIGURE 3.7 – Gauche : champ de vitesse azimutal et vecteurs de vitesse poloïdale à la condition initiale. Droite : nombre de Mach à la condition initiale.

Chapitre 4

Modélisation volumes finis dans une géométrie cylindrique

Afin de modéliser la géométrie torique du tokamak, une étude relative à la modélisation volumes finis dans une géométrie cylindrique est menée ici. En effet, les opérateurs tels que la divergence ou le gradient, exprimés en coordonnées cylindriques montrent la présence de coefficients en r ou encore l'apparition de termes non conservatifs. Les équations perdent alors leur caractère conservatif.

La méthode usuelle pour traiter ces termes de courbure par une méthode volumes finis est de les considérer en termes sources. Toutefois, dans la continuité du travail [12], une autre approche est proposée ici. Le but est de ne pas discrétiser indépendamment ces termes de courbure mais au contraire de préserver le caractère conservatif des équations. Pour cela, l'idée est de considérer comme volume élémentaire la cellule engendrée par rotation autour de l'axe du tokamak d'une cellule bidimensionnelle, d'où une formulation conservative des équations, contrairement à la méthode usuelle. Ceci conduit à l'apparition naturelle des termes propres à la géométrie cylindrique.

Quelques brefs rappels sur les coordonnées curvilignes sont donnés dans l'annexe C. Dans le cas des tokamaks, le système de coordonnées naturel est le système cylindrique $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$. Dans ce système de coordonnées, rappelons la forme des différents opérateurs principaux :

- pour le gradient d'un scalaire :

$$\begin{aligned}(\nabla f)_r &= \partial_r f \\(\nabla f)_\theta &= \frac{1}{r} \partial_\theta f \\(\nabla f)_z &= \partial_z f\end{aligned}\tag{4.1}$$

- pour la divergence d'un vecteur :

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r} \partial_r (r v_r) + \frac{1}{r} \partial_\theta v_\theta + \partial_z v_z\tag{4.2}$$

– pour la divergence d'un tenseur :

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \mathbf{T})_r &= \frac{1}{r} \partial_r r T_{rr} + \frac{1}{r} \partial_\theta T_{\theta r} + \partial_z T_{zr} - \frac{T_{\theta\theta}}{r} \\
(\nabla \cdot \mathbf{T})_\theta &= \frac{1}{r} \partial_r r T_{r\theta} + \frac{1}{r} \partial_\theta T_{\theta\theta} + \partial_z T_{z\theta} + \frac{T_{\theta r}}{r} \\
(\nabla \cdot \mathbf{T})_z &= \frac{1}{r} \partial_r r T_{rz} + \frac{1}{r} \partial_\theta T_{\theta z} + \partial_z T_{zz}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

L'expression de la divergence d'un tenseur (4.3) montre l'apparition de termes non conservatifs, due à la dépendance en θ des vecteurs \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ . En effet, en coordonnées cylindriques, les vecteurs \mathbf{e}_k sont indépendants des variables r et z mais pas de θ . Les définitions des vecteurs \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ donnent :

$$\partial_\theta \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r \text{ et } \partial_\theta \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta. \tag{4.4}$$

Or, en coordonnées curvilignes, notées ici ξ^k , la divergence d'un tenseur s'écrit (c.f. annexe C) :

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^k} (J \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_k), \tag{4.5}$$

avec J , le jacobien associé à la transformation entre les coordonnées Cartésiennes et curvilignes (dans le cas cylindrique $J = r$). Cette forme permet de retrouver les expressions (4.3).

Ainsi, en coordonnées cylindriques, la divergence d'un tenseur perd donc son caractère conservatif lorsque ses composantes sont considérées séparément. Le problème ne se pose pas pour la divergence d'un vecteur car, dans ce cas, aucun terme non conservatif n'apparaît. Ainsi, seules les équations d'évolution vectorielles, lorsqu'elles sont traitées composantes par composantes font apparaître ce problème de perte du caractère conservatif de la divergence.

Dans cette thèse, c'est le cas particulier de la géométrie axisymétrique qui nous intéresse. Les variables sont donc considérées comme indépendantes de θ ($\partial_\theta \equiv 0$). Les composantes de la divergence d'un tenseur en géométrie axisymétrique, (4.3) se simplifient :

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \mathbf{T})_r &= \frac{1}{r} \partial_r r T_{rr} + \partial_z T_{zr} - \frac{T_{\theta\theta}}{r} \\
(\nabla \cdot \mathbf{T})_\theta &= \frac{1}{r} \partial_r r T_{r\theta} + \partial_z T_{z\theta} + \frac{T_{\theta r}}{r} \\
(\nabla \cdot \mathbf{T})_z &= \frac{1}{r} \partial_r r T_{rz} + \partial_z T_{zz}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Dans le cadre d'une approximation volumes finis, la perte du caractère conservatif de la divergence d'un tenseur se révèle être une difficulté pour passer de la géométrie plane à la géométrie axisymétrique. En effet, il est nécessaire de discrétiser correctement ces termes non conservatifs et la présence des termes en r doit aussi être prise en compte.

Deux méthodes vont être proposées ici, pour traiter de ces deux difficultés liées à la géométrie axisymétrique. Dans un premier temps, une approximation sous forme de terme source est proposée. Cette méthode est usuelle pour modéliser une telle géométrie. Dans un second temps, une méthode permettant de conserver le caractère conservatif des équations et s'appuyant notamment sur l'approche proposée en [12], donnée en annexe C, sera développée.

4.1 Discrétisation sous forme de terme source

La méthode classique pour traiter une géométrie axisymétrique repose sur le développement des expressions des composantes de la divergence d'un tenseur. On retrouve alors des termes proches du cas Cartésien, complétés par des termes sources (e.g. [11]). Ainsi, dans le cas d'un tenseur, les composantes de la divergence données par (4.6) deviennent :

$$\begin{aligned} (\nabla.T)_r &= \partial_r T_{rr} + \partial_z T_{zr} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \\ (\nabla.T)_\theta &= \partial_r T_{r\theta} + \partial_z T_{z\theta} + \frac{T_{r\theta} + T_{\theta r}}{r} \\ (\nabla.T)_z &= \partial_r T_{rz} + \partial_z T_{zz} + \frac{T_{rz}}{r} \end{aligned} \quad (4.7)$$

De la même façon, la divergence d'un vecteur, obtenue à partir de (C.1), peut être développée sous la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_r v_r + \partial_z v_z + \frac{v_r}{r} = \nabla_{(r,z)} \cdot \mathbf{v} + \frac{v_r}{r}, \quad (4.8)$$

où l'opérateur $\nabla_{(r,z)}$ représente la divergence usuelle en coordonnées Cartésiennes.

En utilisant les expressions des divergences (4.7) et (4.8), le système d'Euler devient, en géométrie axisymétrique :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho &+ \nabla_{(r,z)} \cdot (\rho \mathbf{u}) &+ \frac{1}{r} \rho u_r &= 0 \\ \partial_t \rho u_r &+ \nabla_{(r,z)} \cdot \mathbf{T}_r &+ \frac{1}{r} \rho (u_r^2 - u_\theta^2) &= 0 \\ \partial_t \rho u_\theta &+ \nabla_{(r,z)} \cdot \mathbf{T}_\theta &+ \frac{2}{r} \rho u_r u_\theta &= 0 \\ \partial_t \rho u_z &+ \nabla_{(r,z)} \cdot \mathbf{T}_z &+ \frac{1}{r} \rho u_r u_z &= 0 \\ \partial_t \rho e &+ \nabla_{(r,z)} \cdot ((\rho e + p) \mathbf{u}) &+ \frac{1}{r} (\rho e + p) u_r &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

avec :

$$T = \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + pI = \begin{pmatrix} T_r \\ T_\theta \\ T_z \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Les termes conservatifs dans ce système sont calculés de la même façon qu'en coordonnées Cartésiennes. Ainsi, en utilisant une méthode de volumes finis, un solveur de Riemann permet de calculer les flux traversant la cellule de contrôle. La différence par rapport à la géométrie plane réside en la discrétisation des termes non conservatifs qui apparaissent dans le système (4.9).

Considérons le point du maillage i et la cellule duale associée, Ω_i . Les termes non conservatifs sont alors discrétisés par leur valeur en i , pondérée par l'aire de la cellule $|\Omega_i|$:

$$\int_{\Omega_i} \frac{1}{r} \rho u_r d\sigma_{\Omega_i} \simeq |\Omega_i| \frac{1}{r_i} \rho_i u_{r_i}; \quad \int_{\Omega_i} \frac{1}{r} \rho (u_r^2 - u_\theta^2) \simeq |\Omega_i| \frac{1}{r_i} \rho (u_{r_i}^2 - u_{\theta_i}^2) \text{ etc ...} \quad (4.11)$$

4.2 Discrétisation sous forme conservative

L'idée principale de cette seconde méthode est d'effectuer en premier lieu l'intégration sur le volume de contrôle afin de préserver le caractère conservatif de la divergence.

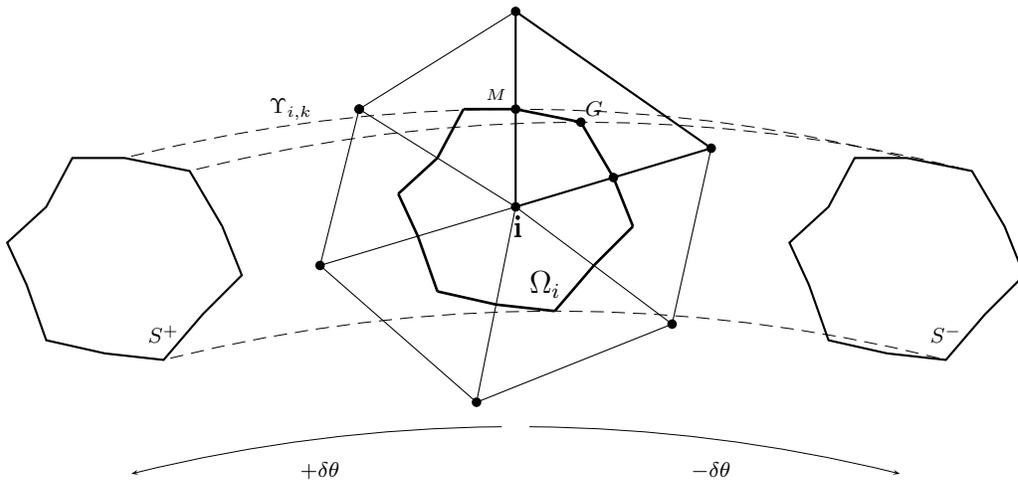


FIGURE 4.1 – Cellule de contrôle en trois dimensions.

Dans ce cas, il s'avère nécessaire d'effectuer l'intégration sur une cellule 3D, Ξ_i , de contour, Γ_i .

Cette cellule 3D est engendrée à partir de la cellule duale 2D, Ω_i par rotation d'angle $2\delta\theta$, autour de l'axe du tokamak. On considère que la cellule Ω_i est placée dans le plan $\theta = 0$. Un schéma de cette cellule est donné par la figure 4.1. Par un souci de visibilité, tous les bords de la cellule n'y sont pas représentés.

Le contour Γ_i de la cellule Ξ_i est composé de différentes parties. Les surfaces traversées par les flux azimutaux sont notées S_i^- et S_i^+ , respectivement placées dans les plans $-\delta\theta$ et $+\delta\theta$. Les autres surfaces dont les normales n'ont pas de composante azimutale, sont notées $\Upsilon_{i,k}$ et sont traversées par des flux que nous qualifierons par la suite de flux radiaux. Elles sont issues des différents segments composant la cellule duale. Par la rotation d'angle $2\delta\theta$, chacun de ses segments forme une surface tronconique. Ces notations sont reprises dans la figure 4.1.

Les calculs ci-après sont effectués sur l'équation vectorielle de la quantité de mouvement, puisque celle-ci s'avère critique par rapport aux équations scalaires. Avec les notations décrites précédemment, en utilisant le théorème de la divergence, l'intégration de l'équation sur la cellule Ξ_i donne :

$$\begin{aligned} & \int_{\Xi_i} \partial_t(\rho\mathbf{u})dV + \int_{\Gamma_i} T \cdot \mathbf{n}dS = 0 \quad (4.12) \\ \Leftrightarrow & \int_{\Xi_i} \partial_t(\rho\mathbf{u})dV + \int_{S_i^-} T \cdot \mathbf{n}dS + \int_{S_i^+} T \cdot \mathbf{n}dS + \sum_k \int_{\Upsilon_{i,k}} T \cdot \mathbf{n}dS = 0 \end{aligned}$$

Le vecteur \mathbf{n} représente le vecteur normal à la frontière considérée. Les différents termes vont être étudiés successivement, afin de souligner les points critiques pour la modélisation et pour l'implémentation numérique.

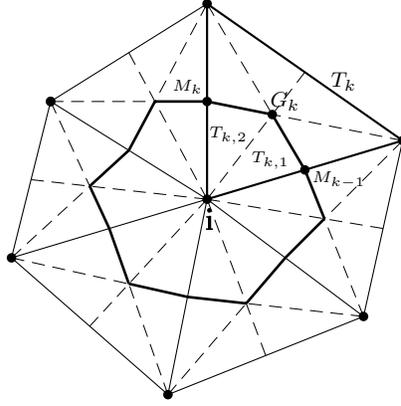
4.2.1 Terme en temps

Pour la géométrie plane, le terme en temps est pondéré par l'aire de la cellule duale :

$$|\Omega_i| = \int_{\Omega_i} drdz. \quad (4.13)$$

Celle-ci est en fait le polygone formé alternativement par les milieux des différents segments issus du point i et par les centres de gravités des triangles T_k auxquels le point i appartient. Par conséquent, l'aire de la cellule duale est calculée par :

$$\int_{\Omega_i} drdz = \sum_k \frac{1}{3}|T_k| \quad (4.14)$$

FIGURE 4.2 – Construction de la cellule duale Ω_i .

où $|T_k|$ est l'aire du triangle. Cette formule est obtenue sachant que les médianes du triangle T_k découpent celui-ci en 6 triangles de même aire, $T_{k,l}$ avec $l = 1 \dots 6$, comme le montre la figure 4.2.

Dans le cas d'une géométrie cylindrique, on peut exprimer $\partial_t(\rho \mathbf{u})$ dans le système de coordonnées local :

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) = \partial_t(\rho u_r) \mathbf{e}_r|_\theta + \partial_t(\rho u_\theta) \mathbf{e}_\theta|_\theta + \partial_t(\rho u_z) \mathbf{e}_z|_\theta \quad (4.15)$$

Chacun de ces vecteurs peut être ramené sur le système de coordonnées local en $\theta = 0$ avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r|_\theta &= \cos \theta \mathbf{e}_r|_0 + \sin \theta \mathbf{e}_\theta|_0 \\ \mathbf{e}_\theta|_\theta &= -\sin \theta \mathbf{e}_r|_0 + \cos \theta \mathbf{e}_\theta|_0 \\ \mathbf{e}_z|_\theta &= \mathbf{e}_z|_0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Le terme en temps peut être évalué en passant de la cellule dans l'espace physique, Ξ_i à celle dans l'espace de calcul, $\widehat{\Xi}_i = \Omega_i \times [-\delta\theta, +\delta\theta]$. Etant données les expressions

précédentes (4.15) et (4.16), le terme en temps devient alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\Xi_i} \partial_t(\rho \mathbf{u}) dV &= \int_{\Omega_i \times [-\delta\theta, +\delta\theta]} \partial_t(\rho \mathbf{u}) r dr dz d\theta \\
&= \int_{\widehat{\Xi}_i} (\partial_t(\rho u_r) \cos \theta - \partial_t(\rho u_\theta) \sin \theta) \mathbf{e}_r|_0 r dr dz d\theta \\
&+ \int_{\widehat{\Xi}_i} (\partial_t(\rho u_r) \sin \theta + \partial_t(\rho u_\theta) \cos \theta) \mathbf{e}_\theta|_0 r dr dz d\theta \\
&+ \int_{\widehat{\Xi}_i} \partial_t(\rho u_z) \mathbf{e}_z|_0 r dr dz d\theta \\
&= 2 \sin \delta\theta \int_{\Omega_i} \partial_t(\rho u_r) r dr dz \mathbf{e}_r|_0 \\
&+ 2 \sin \delta\theta \int_{\Omega_i} \partial_t(\rho u_\theta) r dr dz \mathbf{e}_\theta|_0 \\
&+ 2\delta\theta \int_{\Omega_i} \partial_t(\rho u_z) r dr dz \mathbf{e}_z|_0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Au final, les différentes composantes du terme en temps ne sont plus pondérées par l'aire de la cellule duale (4.13) mais par une aire pondérée par r :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Xi_i} \partial_t(\rho \mathbf{u}) dV \\
&= \int_{\Omega_i} r dr dz \left[2 \sin \delta\theta \left(\partial_t(\rho u_r)_i \mathbf{e}_r|_0 + \partial_t(\rho u_\theta)_i \mathbf{e}_\theta|_0 \right) + 2\delta\theta \partial_t(\rho u_z) \mathbf{e}_z|_0 \right]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Par analogie au calcul de $|\Omega_i|$ dans le cas 2D plan, l'aire pondérée qui intervient dans (4.18) peut être calculée de la façon suivante :

$$\int_{\Omega_i} r dr dz = \sum_k \frac{1}{6} |T_k| (r_{G_{T_{k,1}}} + r_{G_{T_{k,2}}}), \tag{4.19}$$

où $G_{T_{k,l}}$ représente le centre de gravité du sous-triangle $T_{k,l}$ et où les triangles $T_{k,1}$ et $T_{k,2}$ sont communs à la cellule duale Ω_i et au triangle T_k , c.f. fig. 4.2.

4.2.2 Calcul des flux azimutaux

Les termes se rapportant au calcul des flux azimutaux, à travers les surfaces S_i^- et S_i^+ sont maintenant considérés. De façon évidente, les normales associées à ces deux surfaces sont :

$$\mathbf{n}_{S_i^-} = -\mathbf{e}_\theta|_{-\delta\theta} \text{ et } \mathbf{n}_{S_i^+} = \mathbf{e}_\theta|_{\delta\theta}. \tag{4.20}$$

La notation $\mathbf{e}_\theta|_{-\delta\theta}$ signifie que le vecteur \mathbf{e}_θ est pris en l'angle $-\delta\theta$

Les composantes du tenseur sont notées :

$$T = T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (4.21)$$

Le flux azimuthal traversant la surface S_i^- peut être évalué :

$$\begin{aligned} \int_{S_i^-} T^- \cdot \mathbf{n} \, dS &= - \int_{S_i^-} T^- \cdot \mathbf{e}_\theta|_{-\delta\theta} \, dS \\ &= - \int_{S_i^-} (T_{r\theta}^- \mathbf{e}_r|_{-\delta\theta} + T_{\theta\theta}^- \mathbf{e}_\theta|_{-\delta\theta} + T_{z\theta}^- \mathbf{e}_z|_{-\delta\theta}) \, dS \end{aligned} \quad (4.22)$$

De la même façon, concernant la surface S_i^+ , on obtient le flux :

$$\int_{S_i^+} T^+ \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{S_i^+} (T_{r\theta}^+ \mathbf{e}_r|_{\delta\theta} + T_{\theta\theta}^+ \mathbf{e}_\theta|_{\delta\theta} + T_{z\theta}^+ \mathbf{e}_z|_{\delta\theta}) \, dS \quad (4.23)$$

En sommant ces deux dernières expressions sur le système de coordonnées pris en $\theta = 0$, sachant que les surfaces S_i^+ et S_i^- sont identiques à la surface Ω_i , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{S_i^-} T^- \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{S_i^+} T^+ \cdot \mathbf{n} \, dS & \\ &= \int_{\Omega_i} \left[((T_{r\theta}^+ - T_{r\theta}^-) \cos \delta\theta - (T_{\theta\theta}^+ + T_{\theta\theta}^-) \sin \delta\theta) \mathbf{e}_r|_0 \right. \\ &+ ((T_{r\theta}^+ + T_{r\theta}^-) \sin \delta\theta + (T_{\theta\theta}^+ - T_{\theta\theta}^-) \cos \delta\theta) \mathbf{e}_\theta|_0 \\ &+ \left. (T_{z\theta}^+ - T_{z\theta}^-) \mathbf{e}_z|_0 \right] \, dS \end{aligned} \quad (4.24)$$

Si on s'intéresse dans un premier temps aux termes en $\cos \delta\theta$ et à la composante en \mathbf{e}_z de cette expression, on retrouve les approximations des dérivées en θ de la divergence (4.3). En effet, en considérant une cellule duale de section carrée parallèle aux axes r et z et de volume $2r\delta\theta\delta z\delta r$, ces termes deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2r\delta\theta\delta z\delta r} \int_{\Omega_i} (T_{r\theta}^+ - T_{r\theta}^-) \cos \delta\theta \, \mathbf{e}_r|_0 \, dS &\approx \frac{1}{r} \partial_\theta T_{r\theta} \, \mathbf{e}_r|_0 \\ \frac{1}{2r\delta\theta\delta z\delta r} \int_{\Omega_i} (T_{\theta\theta}^+ - T_{\theta\theta}^-) \cos \delta\theta \, \mathbf{e}_\theta|_0 \, dS &\approx \frac{1}{r} \partial_\theta T_{\theta\theta} \, \mathbf{e}_\theta|_0 \\ \frac{1}{2r\delta\theta\delta z\delta r} \int_{\Omega_i} (T_{z\theta}^+ - T_{z\theta}^-) \, \mathbf{e}_z|_0 \, dS &\approx \frac{1}{r} \partial_\theta T_{z\theta} \, \mathbf{e}_z|_0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

compte-tenu de $|\Omega_i| = \delta z \delta r$ et de l'hypothèse $\delta\theta$ petit.

Les termes en $\sin \delta\theta$ correspondent aux termes non conservatifs de la divergence (4.3). Ainsi, sur la même cellule carrée, avec $|\Omega_i| = \delta z \delta r$ et $\delta\theta$ petit, on obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2r\delta\theta\delta z\delta r} \int_{\Omega_i} (T_{\theta\theta}^+ + T_{\theta\theta}^-) \sin \delta\theta \mathbf{e}_r|_0 dS &\approx -\frac{1}{r} \frac{(T_{\theta\theta}^+ + T_{\theta\theta}^-)}{2} \mathbf{e}_r|_0 \\ \frac{1}{2r\delta\theta\delta z\delta r} \int_{\Omega_i} (T_{r\theta}^+ + T_{r\theta}^-) \sin \delta\theta \mathbf{e}_\theta|_0 dS &\approx \frac{1}{r} \frac{(T_{r\theta}^+ + T_{r\theta}^-)}{2} \mathbf{e}_\theta|_0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Remarque 4.1 Pour $\delta\theta = \pi$, le volume considéré correspond à un tore et les termes en $\sin \delta\theta$ de (4.24) s'annulent alors.

Remarque 4.2 Dans le cas particulier de la géométrie axisymétrique qui nous intéresse ici ($T^+ = T^- = T$), l'équation (4.24) devient :

$$\int_{S_i^-} T \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_i^+} T \cdot \mathbf{n} dS = 2 \sin \delta\theta \left(\int_{\Omega_i} T_{r\theta} dS \mathbf{e}_\theta|_0 - \int_{\Omega_i} T_{\theta\theta} dS \mathbf{e}_r|_0 \right) \quad (4.27)$$

4.2.3 Calcul des flux radiaux

Les termes relatifs aux flux radiaux traversant les surfaces, $\Upsilon_{i,k}$ sont maintenant étudiés. Ces surfaces sont construites par la rotation de l'angle $2\delta\theta$ de chaque segment constituant la cellule duale. Ces surfaces ont donc une forme tronconique.

Ici, la force $\mathbf{F} = T \cdot \mathbf{n}$ que l'on obtient par le solveur de Riemann doit être ensuite appliquée sur l'ensemble de la surface tronconique. Pour ces surfaces, la normale est :

$$\mathbf{n} = \gamma \mathbf{e}_r + \beta \mathbf{e}_z. \quad (4.28)$$

La force \mathbf{F} est constante sur les systèmes de coordonnées locaux et peut donc être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (\gamma T_{rr} + \beta T_{rz}) \mathbf{e}_r|_\theta + (\gamma T_{\theta r} + \beta T_{\theta z}) \mathbf{e}_\theta|_\theta + (\gamma T_{zr} + \beta T_{zz}) \mathbf{e}_z|_\theta \\ &= F_r \mathbf{e}_r|_\theta + F_\theta \mathbf{e}_\theta|_\theta + F_z \mathbf{e}_z|_\theta \end{aligned} \quad (4.29)$$

La seconde écriture est privilégiée dans un premier temps pour simplifier l'écriture des calculs.

Chacun des vecteurs de ce système de coordonnées local peut s'exprimer en fonction du système de coordonnées en $\theta = 0$:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r|_\theta &= \cos \theta \mathbf{e}_r|_0 + \sin \theta \mathbf{e}_\theta|_0 \\ \mathbf{e}_\theta|_\theta &= -\sin \theta \mathbf{e}_r|_0 + \cos \theta \mathbf{e}_\theta|_0 \\ \mathbf{e}_z|_\theta &= \mathbf{e}_z|_0\end{aligned}\quad (4.30)$$

La force \mathbf{F} s'exprime alors par :

$$\mathbf{F} = (F_r \cos \theta - F_\theta \sin \theta) \mathbf{e}_r|_0 + (F_r \sin \theta + F_\theta \cos \theta) \mathbf{e}_\theta|_0 + F_z \mathbf{e}_z|_0 \quad (4.31)$$

Chaque surface tronconique est définie à partir de la rotation d'angle $2\delta\theta$ d'un segment. Nous allons introduire ici les coordonnées des extrémités de ce segment (r_1, z_1) et (r_2, z_2) avec $z_1 < z_2$. L'angle entre l'axe des z et le segment considéré sera noté α . Remarquons que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ d'où $\cos \alpha > 0$. Il est alors possible d'exprimer r en fonction de α et z :

$$r = -\tan \alpha (z - z_1) + r_1 \quad (4.32)$$

En prenant en compte ces notations, la force \mathbf{F} (4.31) est intégrée sur la surface tronconique :

$$\begin{aligned}\int_{z_1}^{z_2} \int_{-\delta\theta}^{\delta\theta} \mathbf{F} dS &= \int_{z_1}^{z_2} \int_{-\delta\theta}^{\delta\theta} \mathbf{F} r \frac{d\theta dz}{\cos \alpha} \\ &= \int_{z_1}^{z_2} \int_{-\delta\theta}^{\delta\theta} \mathbf{F} (-\tan \alpha (z - z_1) + r_1) \frac{d\theta dz}{\cos \alpha} \\ &= \frac{1}{\cos \alpha} \left(-\tan \alpha \frac{(z_2 - z_1)^2}{2} + r_1 (z_2 - z_1) \right) \int_{-\delta\theta}^{\delta\theta} \mathbf{F} d\theta\end{aligned}\quad (4.33)$$

En reprenant l'expression (4.31) de la force \mathbf{F} , on obtient :

$$\int_{-\delta\theta}^{\delta\theta} \mathbf{F} d\theta = 2 \sin \delta\theta (F_r \mathbf{e}_r|_0 + F_\theta \mathbf{e}_\theta|_0) + 2\delta\theta F_z \mathbf{e}_z|_0 \quad (4.34)$$

Le facteur obtenu dans (4.33) peut être réécrit sous la forme :

$$\frac{1}{\cos \alpha} \left(-\tan \alpha \frac{(z_2 - z_1)^2}{2} + r_1 (z_2 - z_1) \right) = \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (r_2 - r_1)^2} \frac{r_2 + r_1}{2} \quad (4.35)$$

Au final, en recoupant ces derniers calculs et la définition de \mathbf{F} (4.29), on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{r}_{i,k}} T \cdot \mathbf{nd}S &= \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (r_2 - r_1)^2} \frac{r_2 + r_1}{2} \times \\ &\left[2 \sin \delta\theta \left((\gamma T_{rr} + \beta T_{rz}) \mathbf{e}_r|_0 + (\gamma T_{\theta r} + \beta T_{\theta z}) \mathbf{e}_\theta|_0 \right) + 2\delta\theta (\gamma T_{zr} + \beta T_{zz}) \mathbf{e}_z|_0 \right]\end{aligned}\quad (4.36)$$

4.2.4 Equation de bilan des flux

En reportant les différents calculs menés précédemment dans (4.12), les projections de l'équation de bilan des flux sur $\mathbf{e}_r|_0$, $\mathbf{e}_\theta|_0$ et $\mathbf{e}_z|_0$, respectivement donnent alors :

$$2 \sin \delta\theta |\Omega_i|_r \partial_t (\rho u_r)_i + \int_{\Omega_i} \left((T_{r\theta}^+ - T_{r\theta}^-) \cos \delta\theta - (T_{\theta\theta}^+ + T_{\theta\theta}^-) \sin \delta\theta \right) dS \\ + 2 \sin \delta\theta \sum_{\Upsilon_{i,k}} \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (r_2 - r_1)^2} \frac{r_2 + r_1}{2} (\gamma T_{rr} + \beta T_{rz}) = 0$$

$$2 \sin \delta\theta |\Omega_i|_r \partial_t (\rho u_\theta)_i + \int_{\Omega_i} \left((T_{\theta\theta}^+ - T_{\theta\theta}^-) \cos \delta\theta + (T_{r\theta}^+ + T_{r\theta}^-) \sin \delta\theta \right) dS \\ + 2 \sin \delta\theta \sum_{\Upsilon_{i,k}} \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (r_2 - r_1)^2} \frac{r_2 + r_1}{2} (\gamma T_{\theta r} + \beta T_{\theta z}) = 0$$

$$2\delta\theta |\Omega_i|_r \partial_t (\rho u_z)_i + \int_{\Omega_i} (T_{z\theta}^+ - T_{z\theta}^-) dS \\ + 2\delta\theta \sum_{\Upsilon_{i,k}} \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (r_2 - r_1)^2} \frac{r_2 + r_1}{2} (\gamma T_{zr} + \beta T_{zz}) = 0$$

en notant $\mathbf{n} = \gamma \mathbf{e}_r + \beta \mathbf{e}_z$, la normale à la surface $\Upsilon_{i,k}$ et $|\Omega_i|_r$, l'aire pondérée : $|\Omega_i|_r = \int_{\Omega_i} r dr dz$.

Les calculs ont ici été menés dans le cas général de coordonnées cylindriques. Or, ici, le cas de la géométrie axisymétrique nous intéresse en particulier. Pour celle-ci, les termes concernant les flux azimutaux vont pouvoir être simplifiés grâce à l'indépendance en θ des variables ($T^+ = T^-$). Ainsi, par division des équations précédentes par $2 \sin \delta\theta$ ou $2\delta\theta$, on obtient :

$$|\Omega_i|_r \partial_t (\rho u_r)_i - \int_{\Omega_i} T_{\theta\theta} dS + \sum_{\Upsilon_{i,k}} \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (r_2 - r_1)^2} \frac{r_2 + r_1}{2} (\gamma T_{rr} + \beta T_{rz}) = 0$$

$$|\Omega_i|_r \partial_t (\rho u_\theta)_i + \int_{\Omega_i} T_{r\theta} dS + \sum_{\Upsilon_{i,k}} \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (r_2 - r_1)^2} \frac{r_2 + r_1}{2} (\gamma T_{\theta r} + \beta T_{\theta z}) = 0$$

$$|\Omega_i|_r \partial_t (\rho u_z)_i + \sum_{\Upsilon_{i,k}} \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (r_2 - r_1)^2} \frac{r_2 + r_1}{2} (\gamma T_{zr} + \beta T_{zz}) = 0$$

(4.37)

Notons qu'alors la dépendance en $\delta\theta$ disparaît.

Ce bilan de flux nous permet de relever les différences majeures par rapport à une géométrie plane. Tout d'abord, le facteur du terme en temps n'est plus calculé avec la formule (4.13) mais avec (4.19) prenant en compte la pondération en r . Ensuite, les termes de flux radiaux voient apparaître un nouveau facteur en $\frac{r_2+r_1}{2}$. Pour finir, le terme concernant les flux azimutaux doit être ajouté au bilan de flux total.

En conclusion, la méthode usuellement utilisée pour modéliser une géométrie axisymétrique consiste en premier lieu à projeter l'équation vectorielle et à ensuite intégrer les différentes composantes obtenues sur la cellule duale considérée, sachant que la première étape entraîne l'apparition de termes non conservatifs. Cette perte du caractère conservatif de la divergence dans le cas d'une équation d'évolution vectorielle est, dans cette méthode un point critique. La seconde méthode développée ici consiste à commencer par l'intégration sur une cellule 3D et ensuite d'effectuer la projection sur les différents vecteurs, conservant ainsi le caractère conservatif de la divergence.

4.3 Cas Test de Gresho

Des simulations numériques sur une géométrie axisymétrique ont été menées afin de valider les deux méthodes décrites précédemment. Dans ce but, un cas test s'appuyant sur celui de Gresho [33] a été utilisé. Il consiste à considérer une solution stationnaire du système d'Euler isotherme :

$$\begin{cases} \partial_t n + \nabla \cdot (n\mathbf{V}) = 0, \\ \partial_t (n\mathbf{V}) + \nabla \cdot (n\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) + \nabla n = 0. \end{cases} \quad (4.38)$$

Cette validation a été menée en particulier sur les équations des composantes de la vitesse V_r et V_θ qui font intervenir des termes non conservatifs, c.f. (4.3), ainsi que sur l'équation de densité. Le système que nous avons étudié est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_r (rnV_r) + \partial_\theta (nV_\theta) = 0, \\ \partial_t rV_r + \partial_r (r(nV_r^2 + n)) + \partial_\theta nV_rV_\theta = nV_\theta^2 + n, \\ \partial_t rV_\theta + \partial_r r(nV_\theta V_r) + \partial_\theta (nV_\theta^2 + n) = -nV_rV_\theta. \end{cases} \quad (4.39)$$

Dans le cas d'une géométrie axisymétrique, la propriété selon laquelle les différentes variables sont indépendantes de θ permet une simplification du système (4.39) :

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_r (rnV_r) = 0, \\ \partial_t rV_r + \partial_r (r(nV_r^2 + n)) = nV_\theta^2 + n, \\ \partial_t rV_\theta + \partial_r r(nV_\theta V_r) = -nV_rV_\theta. \end{cases} \quad (4.40)$$

Le cas test de Gresho consiste tout d'abord à choisir la composante V_r nulle, le système précédent devient alors :

$$\begin{cases} \partial_t n = 0, \\ \partial_t rV_r + \partial_r (rn) = nV_\theta^2 + n, \\ \partial_t rV_\theta = 0. \end{cases} \quad (4.41)$$

De façon évidente, chercher une solution stationnaire de ce problème revient à la condition :

$$r\partial_r n = nV_\theta^2 \quad (4.42)$$

Ainsi différentes solutions stationnaires sont envisageables telle que celle considérée dans [12] :

$$V_r = 0; V_\theta = 1 \text{ et } n(r) = n_0 r, \text{ où } n_0 = n(r = 1). \quad (4.43)$$

Cependant, ici, nous n'avons pas retenu cette solution car la linéarité de la densité risquait de favoriser fortement la méthode avec terme source, puisque dans ce cas, on intègre une constante sur la cellule.

La solution stationnaire considérée est non linéaire, à savoir :

$$V_r = 0; V_\theta(r) = \sqrt{r} \text{ et } n(r) = \exp(r). \quad (4.44)$$

Le domaine considéré est rectangulaire et le maillage non structuré utilisé est donné par la figure (4.3). Concernant les conditions aux limites, il était nécessaire de choisir celles-ci de telle façon qu'elles soient traitées de la même manière pour les deux méthodes. Des conditions aux limites de Dirichlet ont été choisies : dans les deux cas, le flux calculé aux différents bords est annulé, d'où $\partial_t n = \partial_t V_r = \partial_t V_\theta = 0$ et donc la valeur initiale est conservée.

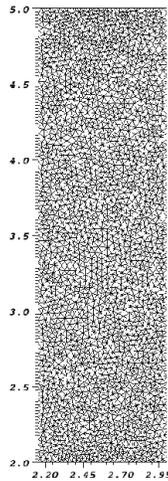


FIGURE 4.3 – Maillage du domaine, 2537 points, 4852 éléments

Les calculs ont montré qu'avec les deux méthodes, la solution stationnaire est préservée à condition d'utiliser un schéma d'ordre en espace suffisamment élevé. Ici, un schéma de type MUSCL (Monotonic Upstream Centered Scheme for Conservation Laws) est utilisé,

c.f. [47] où ce schéma a été introduit. Les profils de densité obtenus à un temps adimensionné de $t = 515$ pour les deux méthodes sont données par la figure (4.4). Ces profils sont bien confondus avec celui de la solution exacte. La même observation a pu être effectuée pour le profil de la composante azimutale de la vitesse, V_θ . Par ailleurs, pour les deux méthodes, la vitesse radiale, V_r , nulle à l'instant initial, est de l'ordre de l'erreur machine, soit 10^{-14} à $t = 515$.

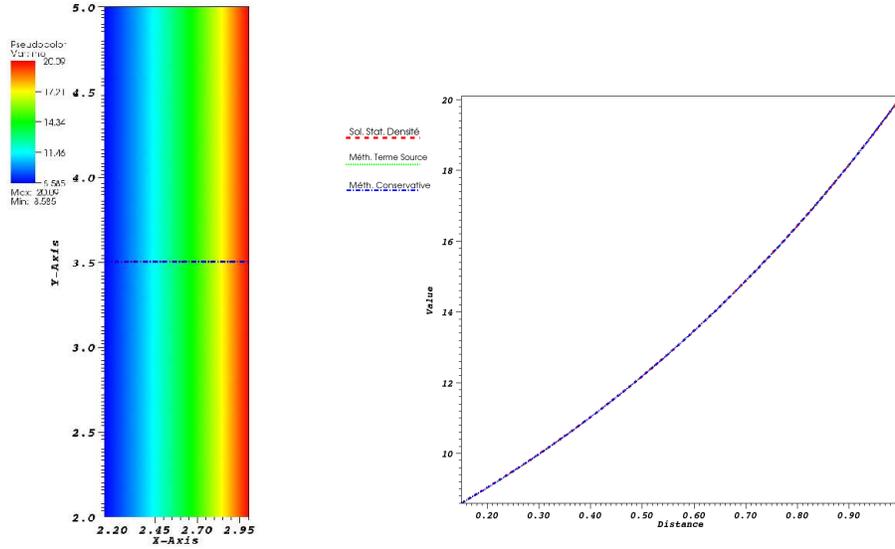


FIGURE 4.4 – Profils de densité obtenus avec chacune des méthodes à $t = 515$.

En conclusion, ce cas test a permis de valider la deuxième méthode proposée, qui repose sur une formulation conservative des équations. Elle a permis d'obtenir des résultats similaires à ceux de la méthode usuelle, reposant sur l'approximation des termes de courbure pour traiter une géométrie axisymétrique.

4.4 Diffusion et viscosité en axisymétrie

La modélisation de la géométrie axisymétrique a été présentée pour les termes de transport et deux méthodes ont été proposées. Les termes de diffusion et de viscosité vont maintenant être introduits. Tout d'abord, le système (3.1) qui nous intéresse est rappelé :

$$\begin{aligned}
 \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\
 \partial_t \rho \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{F} \\
 \partial_t \rho e + \nabla \cdot ((\rho e + p) \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{q} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Une différence importante entre les deux méthodes présentées, différence qui va impacter sur la modélisation des termes diffusif et visqueux, est la présence ou l'absence

du Jacobien dans le terme en temps. En effet, la divergence d'un tenseur en coordonnées curvilignes (4.3) fait intervenir l'inverse du Jacobien. Dans la première méthode, où les termes de courbure sont discrétisés en terme source, ce facteur $1/r$ est laissé tel quel. Par contre, pour la deuxième méthode, les équations considérées voient apparaître un facteur de pondération r dans le terme en temps, pour le calcul de l'aire de la cellule duale, (4.19). Il est nécessaire de prendre en compte cette différence entre les deux méthodes pour la discrétisation des termes diffusif et visqueux.

4.4.1 Diffusion

La discrétisation du terme diffusif dans le cas d'une géométrie axisymétrique a été abordée dans la partie (2.1.1) Ainsi, en s'appuyant sur la divergence du vecteur \mathbf{q} en coordonnées cylindriques, le terme diffusif à discrétiser dans la géométrie axisymétrique est donné par :

$$\begin{aligned}\partial_t \rho e &= -(\partial_r q_r + \partial_z q_z) - \frac{q_r}{r} + \dots \\ &= -\nabla_{(r,z)} \cdot \mathbf{q} - \frac{q_r}{r} + \dots,\end{aligned}\quad (4.46)$$

où $\mathbf{q} = K \nabla T$.

La formulation faible de l'équation de quantité de mouvement permet donc de calculer la contribution du terme de diffusion en chacun des noeuds ; les étapes du calculs ont été développées dans la partie (2.1.1). Le terme de diffusion devient alors sur un point i n'appartenant pas au bord :

$$-\int_{\Omega} \psi_i \nabla \cdot K \nabla T d\Omega = \int_{\Omega} K \nabla T \cdot \nabla \psi_i d\Omega \quad (4.47)$$

$$= \sum_{\tau \ni i} \sum_{j \in \tau} T_j \int_{\tau} K \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i d\tau \quad (4.48)$$

En absence de pondération par r de l'aire du triangle pour la première méthode, c.f. partie (4.1), la discrétisation des termes diffusifs donne :

$$\begin{aligned}\int_{\tau} K \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i d\tau &= \int_{\tau} d\tau \sum_{g,\tau} \omega_{g,\tau} K(x_{g,\tau}) \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i \\ &= |\tau| \sum_{g,\tau} \omega_{g,\tau} K(x_{g,\tau}) \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i,\end{aligned}\quad (4.49)$$

$$\begin{aligned}\int_{\tau} \frac{1}{r} (K \nabla \psi_j)_r \psi_i d\tau &= \int_{\tau} d\tau \sum_{g,\tau} \omega_{g,\tau} \frac{1}{r_{g,\tau}} (K(x_{g,\tau}) \cdot \nabla \psi_j)_r \psi_i(x_{g,\tau}) \\ &= |\tau| \sum_{g,\tau} \omega_{g,\tau} \frac{1}{r_{g,\tau}} (K(x_{g,\tau}) \cdot \nabla \psi_j)_r \psi_i(x_{g,\tau}).\end{aligned}\quad (4.50)$$

en notant $x_{g,\tau}$, les points de Gauss, $\omega_{g,\tau}$, les poids associés, $r_{g,\tau}$ leur abscisse et $|\tau|$, l'aire du triangle τ .

La méthode décrite en 4.2 entraîne la pondération par r de l'aire du triangle. En utilisant les mêmes notations, la discrétisation des termes diffusifs devient alors :

$$\int_{\tau} r K \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i d\tau = \int_{\tau} r d\tau \sum_{g,\tau} \omega_{g,\tau} K(x_{g,\tau}) \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i, \quad (4.51)$$

$$\int_{\tau} r \frac{1}{r} (K \nabla \psi_j)_r \psi_i d\tau = \int_{\tau} r d\tau \sum_{g,\tau} \omega_{g,\tau} \frac{1}{r_{g,\tau}} (K(x_{g,\tau}) \cdot \nabla \psi_j)_r \psi_i(x_{g,\tau}). \quad (4.52)$$

Or, en notant, G , le barycentre du triangle τ , on a l'égalité :

$$\int_{\tau} r d\tau = |\tau| r_G. \quad (4.53)$$

Pour le terme diffusif, la différence entre les deux méthodes provient donc du facteur r_G , qui apparaît dans le second cas.

4.4.2 Viscosité

Pour les fluides Newtoniens, le tenseur des contraintes visqueuses dépend du (double du) tenseur de déformation défini par :

$$W = \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} I. \quad (4.54)$$

En prenant en compte la dépendance en θ des vecteurs \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ , (4.4), le tenseur gradient $\nabla \mathbf{v}$ devient en coordonnées cylindriques :

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \partial_r v_r & \frac{1}{r}(\partial_\theta v_r - v_\theta) & \partial_z v_r \\ \partial_r v_\theta & \frac{1}{r}(\partial_\theta v_\theta + v_r) & \partial_z v_\theta \\ \partial_r v_z & \frac{1}{r} \partial_\theta v_z & \partial_z v_z \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

En particulier, dans le cas d'une géométrie axisymétrique, l'expression de ce tenseur gradient se simplifie ($\partial_\theta = 0$) :

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \partial_r v_r & -\frac{v_\theta}{r} & \partial_z v_r \\ \partial_r v_\theta & \frac{v_r}{r} & \partial_z v_\theta \\ \partial_r v_z & 0 & \partial_z v_z \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

Compte tenu qu'en coordonnées cylindriques, la divergence d'un vecteur (4.46) s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_r v_r + \partial_z v_z + \frac{v_r}{r}. \quad (4.57)$$

En utilisant les expressions (4.57) et (4.56), le tenseur de déformation (4.54), pour une géométrie axisymétrique, peut s'exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned}
 W &= W_{rz} + W_{axi} \text{ avec} \\
 W_{rz} &= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\partial_r v_r - \frac{2}{3}\partial_z v_z & \partial_r v_\theta & \partial_z v_r + \partial_r v_z \\ \partial_r v_\theta & -\frac{2}{3}(\partial_r v_r + \partial_z v_z) & \partial_z v_\theta \\ \partial_z v_r + \partial_r v_z & \partial_z v_\theta & \frac{4}{3}\partial_z v_z - \frac{2}{3}\partial_r v_r \end{pmatrix} \text{ et} \\
 W_{axi} &= + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\frac{v_r}{r} & -\frac{v_\theta}{r} & 0 \\ -\frac{v_\theta}{r} & -\frac{4}{3}\frac{v_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}\frac{v_r}{r} \end{pmatrix}. \quad (4.58)
 \end{aligned}$$

En s'appuyant cette fois sur ces expressions, les termes visqueux à discrétiser ici sont donnés par les équations :

$$\begin{aligned}
 \partial_t \rho u_r &= -\nabla_{(r,z)} \cdot \sigma_{\mathbf{r}} - \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \dots \\
 \partial_t \rho u_z &= -\nabla_{(r,z)} \cdot \sigma_{\mathbf{z}} - \frac{1}{r}\sigma_{rz} + \dots \\
 \partial_t \rho u_\theta &= -\nabla_{(r,z)} \cdot \sigma_\theta - \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} + \dots \\
 \partial_t \rho e &= -\nabla_{(r,z)} \cdot (\sigma \mathbf{u}) - \frac{1}{r}(\sigma \mathbf{u})_r + \dots \quad (4.59)
 \end{aligned}$$

le tenseur visqueux σ étant défini par

$$\sigma = (\sigma_{\mathbf{r}} \ \sigma_{\mathbf{z}} \ \sigma_\theta). \quad (4.60)$$

Ces équations peuvent encore être mises sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \partial_t \rho \mathbf{u} &= -\nabla_{(r,z)} \cdot \sigma - \frac{1}{r} \mathbf{V}_\sigma + \dots \\
 \partial_t \rho e &= -\nabla_{(r,z)} \cdot (\sigma \mathbf{u}) - \frac{1}{r}(\sigma \mathbf{u})_r + \dots \quad (4.61)
 \end{aligned}$$

où le vecteur \mathbf{V}_σ est donné par :

$$\mathbf{V}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \\ 2\sigma_{r\theta} \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

Dans les différentes formes de viscosité étudiées dans le cadre de ce travail, le tenseur des contraintes visqueuses est fonction du tenseur de déformation. Pour un fluide Newtonien, le tenseur est donné par :

$$\sigma = \eta W, \quad (4.63)$$

où η est la viscosité dynamique.

De même, la viscosité de Braginskii donnée par (1.83) et (1.84) dépend aussi du tenseur des taux de déformation. Le tenseur de viscosité peut s'écrire en particulier sous la forme suivante, où \mathbf{b} représente le vecteur unitaire du champ magnétique :

$$\sigma = f_B(W, \mathbf{b}) = f_B(W_{rz} + W_{axi}, \mathbf{b}). \quad (4.64)$$

La formulation faible des équations (4.61) peut être obtenue comme pour l'équation de la chaleur dans la partie (2.1.1). Considérant un point i de l'intérieur du système, les termes communs aux géométries planes et axisymétriques peuvent être discrétisés suivant :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \psi_i \nabla_{(r,z)} \cdot \sigma d\Omega &= \sum_{\tau \in i} \int_{\tau} \sigma \cdot \nabla \psi_i d\tau \\ &= \sum_{\tau \in i} |\tau| \sum_{g,\tau} \omega_{g,\tau} \sigma(x_{g,\tau}) \cdot \nabla \psi_i, \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \psi_i \nabla_{(r,z)} \cdot \sigma \mathbf{u} d\Omega &= \sum_{\tau \in i} \int_{\tau} \sigma \mathbf{u} \cdot \nabla \psi_i d\tau \\ &= \sum_{\tau \in i} |\tau| \sum_{g,\tau} \omega_{g,\tau} \sigma(x_{g,\tau}) \mathbf{u}(x_{g,\tau}) \cdot \nabla \psi_i. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Les termes propres à la géométrie axisymétrique sont donnés par :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \mathbf{V}_{\sigma} \psi_i d\Omega &= \sum_{\tau \in i} \int_{\tau} \frac{1}{r} \mathbf{V}_{\sigma} \psi_i d\tau \\ &= \sum_{\tau \in i} |\tau| \sum_{g,\tau} \omega_{g,\tau} \frac{1}{r_{g,\tau}} \mathbf{V}_{\sigma}(x_{g,\tau}) \psi_i(x_{g,\tau}), \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{r} (\sigma \mathbf{u})_r \psi_i d\Omega &= \sum_{\tau \in i} \int_{\tau} \frac{1}{r} (\sigma \mathbf{u})_r \psi_i d\tau \\ &= |\tau| \sum_{g,\tau} \omega_{g,\tau} \frac{1}{r_{g,\tau}} (\sigma(x_{g,\tau}) \mathbf{u}(x_{g,\tau}))_r \psi_i(x_{g,\tau}). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Dans le cas de la géométrie axisymétrique, il a été montré précédemment que le tenseur de déformation, c.f. (4.58), pouvait se décomposer : $W = W_{rz} + W_{axi}$. Le terme W_{rz} dépend des gradients des composantes de la vitesse et représente par conséquent un tenseur aux composantes constantes pour un triangle donné, ce qui n'est pas le cas pour W_{axi} .

En résumé, le tenseur de viscosité pris en un point de Gauss donné peut être évalué par la forme :

$$\sigma(x_{g,\tau}) = \eta(W_{rz} + W_{axi}(x_{g,\tau})) \text{ ou } \sigma(x_{g,\tau}) = f_B(W_{rz} + W_{axi}(x_{g,\tau}), \mathbf{b}(x_{g,\tau})) \quad (4.69)$$

dans les cas respectifs Navier-Stokes et Braginskii.

Le vecteur $\mathbf{V}_\sigma(x_g, \tau)$ peut aussi être évalué d'une façon analogue puisqu'il dépend directement des composantes du tenseur σ d'après sa définition (4.62).

Les discrétisations présentées ici correspondent à la première méthode de modélisation de la géométrie axisymétrique, décrite dans (4.1). De la même façon que dans le cas de la diffusion, la seule différence avec la seconde méthode est la pondération par r de l'aire du triangle, ce qui revient lors de la discrétisation à multiplier l'aire par r_G , abscisse du barycentre du triangle.

Chapitre 5

Simulations numériques

Les développements informatiques ont été effectués au sein du logiciel FluidBox-PlaTo [5]. On a utilisé une machine SMP comprenant 16 processeurs Quad-Core et 168 go de mémoire vive. Les différents résultats présentés ici ont été obtenus par des calculs séquentiels. Toutefois, FluidBox-PlaTo présente une architecture pour une parallélisation des calculs et donc moyennant certaines modifications, les développements numériques issus de ce travail pourraient être parallélisés.

5.1 Systèmes d'Euler et Navier-Stokes

Dans un premier temps, des simulations ont été menées sur le système (3.1) dans le but de comparer les résultats obtenus avec et sans terme diffusif. Cette partie s'appuie donc sur le système (3.1), en l'absence des termes d'équilibre :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + pI) + \nabla \cdot \sigma &= 0 \\ \partial_t \rho e + \nabla \cdot ((\rho e + p)\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\sigma \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{q} &= 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Le système obtenu est alors proche d'un système de Navier-Stokes ou bien d'Euler, en l'absence des termes diffusifs et visqueux. Des simulations numériques ont été menées pour des géométries planes et axisymétriques. Les résultats ont été obtenus avec une méthode volumes finis couplée à une méthode FEM P1 pour les termes de diffusion et à un schéma de Godunov, basé sur un solveur de Riemann de type HLLC [62], explicite en temps. Les résultats ont été comparés à ceux obtenus par éléments spectraux Q_4 , stabilisés par une méthode de viscosité entropique [34].

La géométrie considérée dans cette partie est circulaire, proche de celle du tokamak Tore-Supra. Le maillage est aligné sur les lignes de champ magnétique et est représenté par la figure (5.1). Il est constitué de 48 000 triangles et 24 360 points. Les conditions initiales considérées sont :

- vitesse nulle,
- masse volumique constante de $1,67 \cdot 10^{-7} \text{ kg/m}^3$,
- pression constante de $1,6 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$.

Les conditions aux limites sont des conditions de glissement au bord pour l'extérieur du tokamak, à l'exception du limiteur où on impose des conditions aux limites absorbantes avec un nombre de Mach $M = 1$ (Condition de Bohm). Au coeur du plasma, un flux entrant est imposé par l'intermédiaire de cellules fantômes (c.f. partie 3.2.2). La pression ainsi que la masse volumique sont données de façon cohérente avec les conditions initiales dans ces cellules fantômes. Une vitesse entrante normale de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 1,8 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ y est aussi imposée.

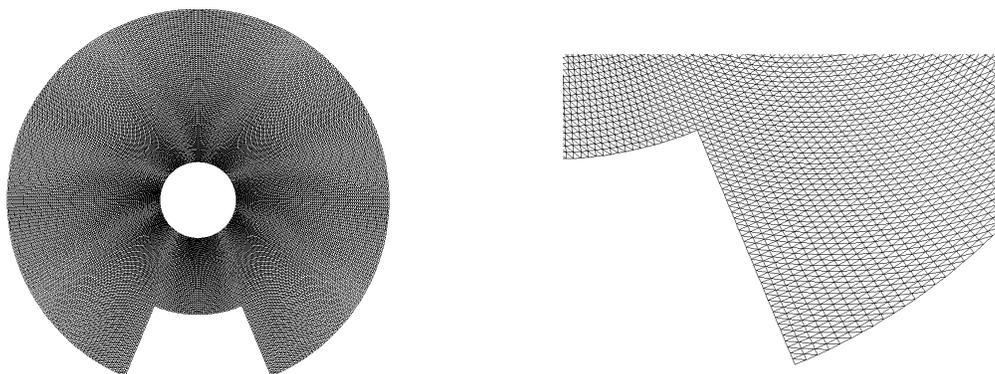


FIGURE 5.1 – Maillage aligné sur une géométrie de type Tore Supra : 48 000 triangles et 24 360 points.

5.1.1 Système Euler

Pour nos premiers tests, le système d'Euler axisymétrique a été considéré. Ainsi, les termes de diffusion sont négligés dans le système (5.1). Les résultats obtenus par la méthode de volumes finis sont comparés à ceux obtenus par la méthode d'éléments spectraux, avec un schéma RK4 explicite en temps ($dt = 2 \cdot 10^{-4}$). Les champs de nombre de Mach et de densité sont donnés ici à un temps final adimensionné de 1, c.f. fig. 5.2. Comme dicté par les conditions de Bohm, le nombre de Mach est de 1 au limiteur dans les deux cas. Au fur et à mesure de la simulation, un flux de matière apparaît entre le coeur du plasma où une vitesse est imposée et la paroi absorbante du limiteur. Si on compare les iso-densités ou les iso-Mach pour les deux méthodes, les résultats obtenus au même temps sont similaires.

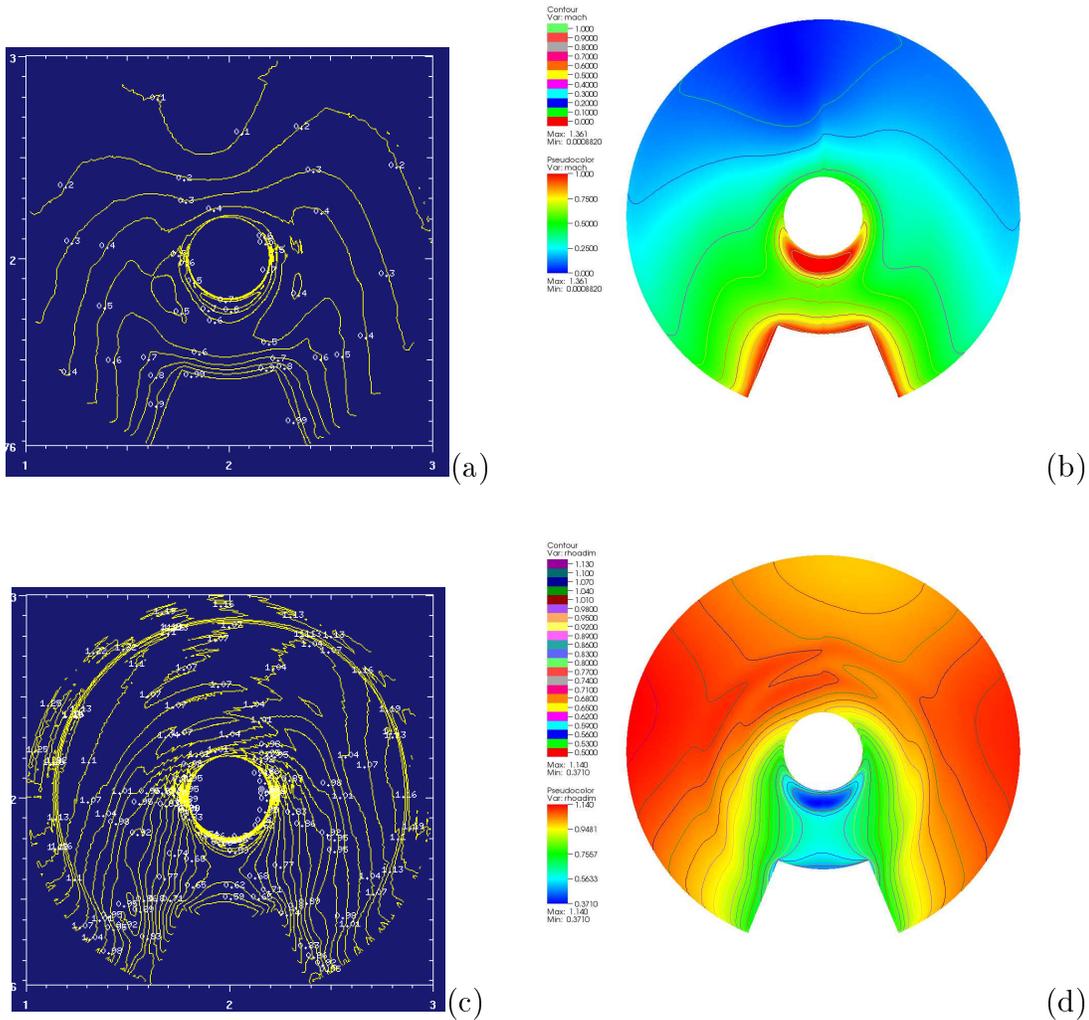


FIGURE 5.2 – **Système Euler.** Mach (a,b) et densité (c,d) à $t=1$, obtenus par des méthodes SEM (a,c) et FVM (b,d), pour Euler axisymétrique.

5.1.2 Systèmes Navier-Stokes et Braginskii

On considère maintenant un système Navier-Stokes axisymétrique, en prenant des viscosité et diffusion scalaires constantes et de valeurs adimensionnées 1.10^{-2} . Les résultats obtenus par la méthode de volumes finis, couplée à une méthode d'éléments finis P_1 pour les termes diffusifs sont comparés à ceux donnés par SEM Q_4 , avec dans les deux cas, un schéma RK4 explicite en temps ($dt = 4.10^{-5}$). Les profils de densité sont donnés pour les deux méthodes, à un temps final adimensionné de 1, c.f. fig. 5.3. Des phénomènes similaires par rapport au système d'Euler apparaissent, à savoir un flux de matière entre le coeur du plasma et le limiteur. Cependant, par rapport au système d'Euler, les fronts apparaissent

sensiblement lissés par la présence des termes diffusifs.

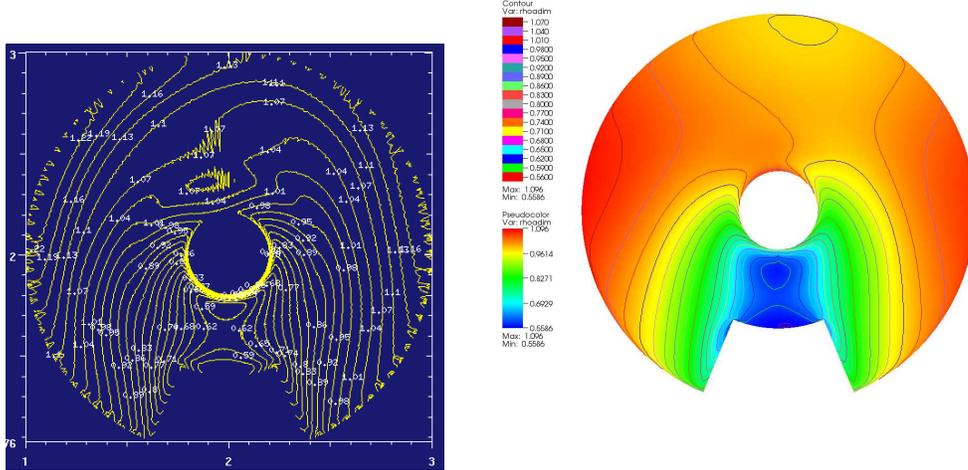


FIGURE 5.3 – **Système Navier-Stokes axisymétrique.** Comparaison des profils de densité à $t = 1$ pour une viscosité scalaire constante obtenus par des méthodes SEM (gauche) et FVM (droite).

Des résultats obtenus avec le code volumes finis, dans le cas de géométries plane ou axisymétrique, en considérant une viscosité scalaire constante ($\eta = 1.10^{-2}$) ou bien tensorielle (Braginskii, $\eta_0 = 1.10^{-2}$, $\eta_2/\eta_0 \approx 1.10^{-10}$ et $\eta_4/\eta_0 \approx 1.10^{-5}$) sont aussi présentés afin de mettre en évidence l'influence des termes de fermeture. Dans le cas plan, les profils de densité à $t = 1$ sont donnés fig. 5.4.a pour le cas d'une viscosité constante et, fig. 5.4.b, pour la viscosité de Braginskii. Notons que dans le cas plan, le troisième tenseur de la viscosité de Braginskii donnée par (1.84) n'influe pas. Les figures 5.4.c et 5.4.d donnent les densités pour ces deux formes de viscosité en géométrie axisymétrique.

Comme il se doit, on peut vérifier que les résultats obtenus en géométrie 2D plan sont symétriques alors qu'une dissymétrie apparaît dans le cas 3D axisymétrique à cause des termes de courbure. Pour ces deux géométries, nous pouvons voir en comparant les iso-densités que les viscosités constante et de Braginskii donnent des résultats similaires, signe que les phénomènes de transport sont prépondérants. On observe cependant quelques différences dans la partie supérieure du plasma : au dessus du coeur, les isocontours présentent des formes différentes.

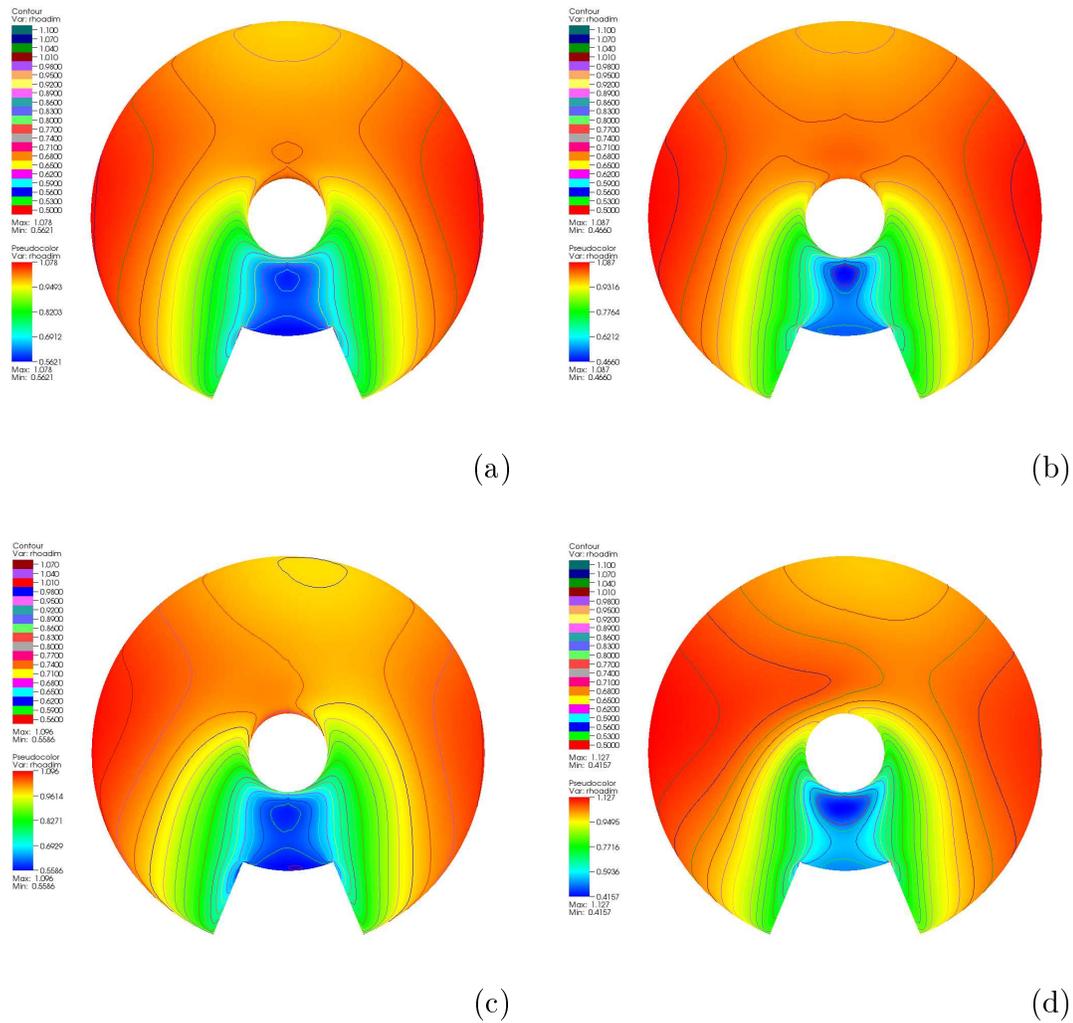


FIGURE 5.4 – **Systèmes Navier-Stokes et Braginskii.** Comparaison des profils de densité à $t = 1$ avec des viscosités scalaire constante (a,c) et de Braginskii (b,d), en 2D plan (a,b) et 3D axisymétrique(c,d) par méthode FVM.

5.2 Terme équilibre

Dans une seconde phase, des tests ont été effectués avec la méthode FVM pour une géométrie 2D plan, avec un schéma RK4 explicite en temps, pour un système d'Euler présentant un terme d'équilibre, \mathbf{F} , visant à préserver le confinement du plasma :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}) &= \mathbf{F} \\ \partial_t \rho e + \nabla \cdot ((\rho e + p) \mathbf{u}) &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Différentes méthodes pour approximer ce terme équilibre ont été proposées dans la partie 3.1. Ce terme d'équilibre dépend notamment du gradient de la pression à l'équilibre. Des résultats obtenus avec ces différentes méthodes sont présentés ici.

5.2.1 Approximation en terme force

Dans un premier temps, le terme équilibre a été approximé sous la forme d'un terme force, c.f. section 3.1.2. Cette méthode a été testée tout d'abord sur une géométrie circulaire proche de Tore Supra en considérant des conditions initiales analytiques. On s'est ensuite intéressé à la géométrie de JET avec la solution équilibre obtenue par le code JOREK.

Géométrie de type Tore Supra

Le modèle numérique a été testé pour la géométrie de type Tore Supra dont le maillage est donné figure 5.1. La méthode FVM, dans le cas 2D plan, couplée à un solveur de Riemann de type HLLC a été utilisée avec un schéma RK4 explicite en temps.

Une gaussienne est choisie comme condition initiale pour la pression et la densité :

$$\begin{cases} p &= 1,60 \cdot 10^4 \exp\left(-\frac{(x-2)^2 + (y-2)^2}{0,4^2}\right) \\ \rho &= 1,67 \cdot 10^{-7} \exp\left(-\frac{3}{5} \frac{(x-2)^2 + (y-2)^2}{0,4^2}\right). \end{cases} \quad (5.3)$$

La vitesse initiale est prise nulle.

La force \mathbf{F} du système (5.2) est calculée d'après cette condition initiale. En effet, à partir de l'expression de la pression, on en déduit :

$$\mathbf{F} = \nabla p = \begin{pmatrix} -\frac{2(x-2)p}{0,4^2} \\ -\frac{2(y-2)p}{0,4^2} \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Ce terme d'équilibre sera alors approximé sous la forme d'un terme force.

Comme précédemment, les conditions aux limites sont des conditions de glissement au bord, à l'exception du limiteur, où on impose des conditions aux limites absorbantes (cellules fantômes avec un état proche du vide, c.f. section 3.2.2), avec un nombre de Mach $M = 1$. Au coeur du plasma, la méthode des cellules fantômes est aussi utilisée, en imposant une vitesse nulle dans celles-ci. La pression ainsi que la masse volumique sont données de façon cohérente avec les conditions initiales dans ces cellules fantômes.

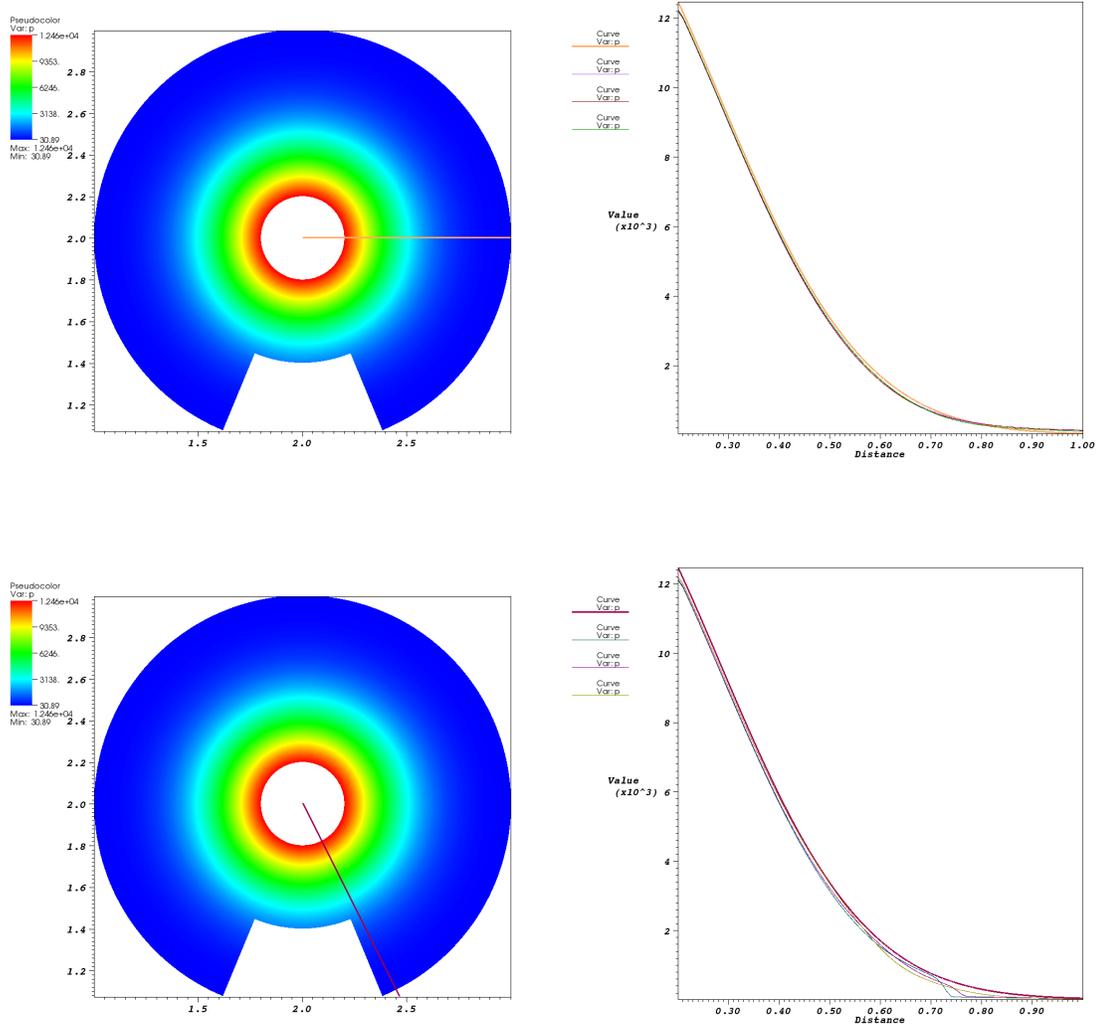


FIGURE 5.5 – Approximation en terme force, géométrie de type Tore-Supra. Profils de pression à $t=0;0.47;0.5;0.57$ à droite, le long des segments tracés sur les figures de gauche.

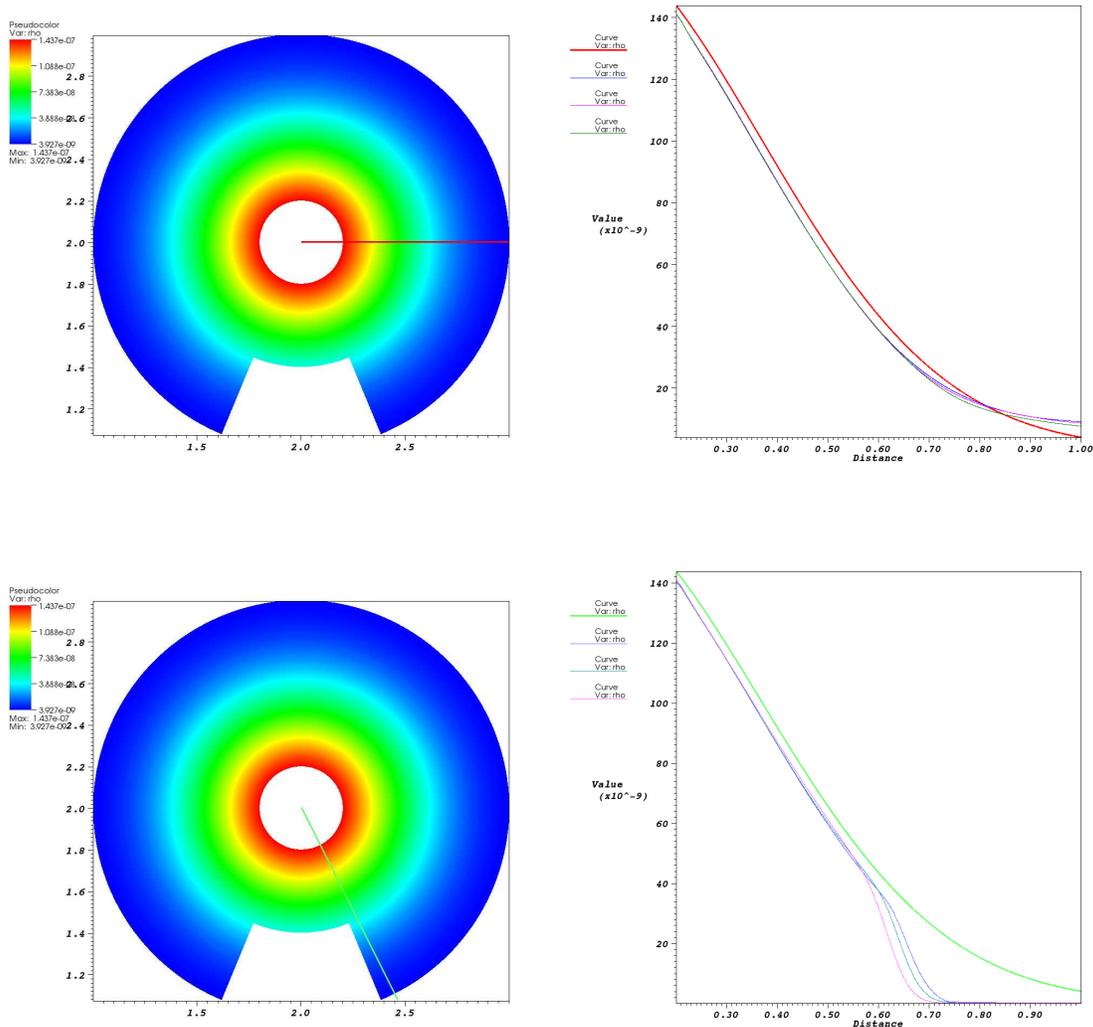


FIGURE 5.6 – Approximation en terme force, géométrie de type Tore-Supra. Profils de densité à $t=0; 0.47; 0.5; 0.57$ à droite, le long des segments tracés sur les figures de gauche.

Des profils de pression et de densité obtenus au fil de la simulation sont donnés figures 5.5 et 5.6. Tout d'abord, pour la pression, le profil le plus éloigné du limiteur est globalement maintenu. Celui situé à proximité du limiteur est conservé dans le coeur du plasma alors que les conditions de Bohm, en imposant un flux de matière vers la sortie, entraînent une chute de pression à proximité du limiteur. Des résultats similaires sont observés pour la densité. En effet, la gaussienne de densité est conservée mais on remarque une perte de matière au limiteur, ce qui est cohérent avec les conditions aux limites de Bohm. En

l'absence de réapprovisionnement en particules au niveau du coeur, le tokamak finirait par se vider.

Le champ de température est donné figure 5.7. On remarque que la température augmente fortement au niveau du limiteur, où les parois avec des conditions de glissement et de Bohm sont en contact. En effet, la condition de glissement au bord extérieur impose l'annulation du terme de transport, à travers la condition $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$. Au contraire, à proximité du limiteur, une vitesse apparaît imposée par les conditions de Bohm, ce qui entraîne une production d'énergie associée au terme d'équilibre : $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$.

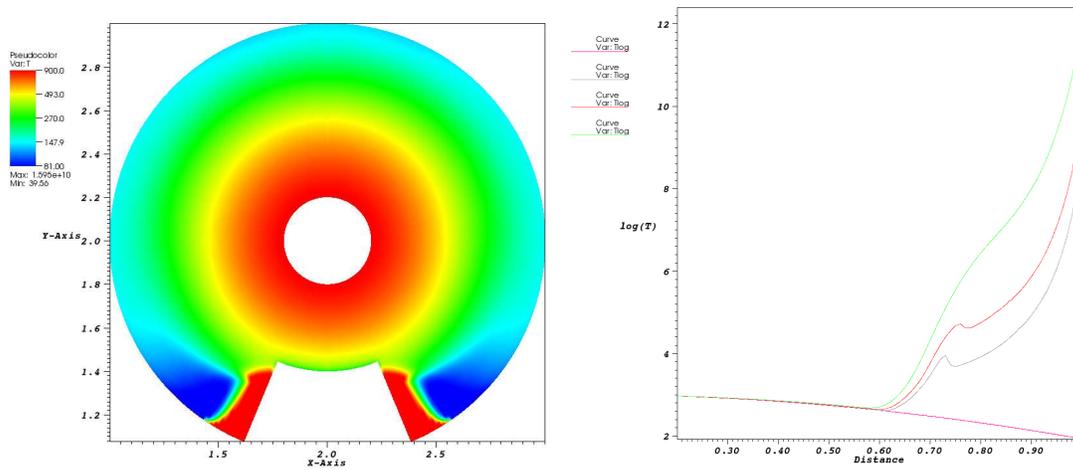


FIGURE 5.7 – **Approximation en terme force, géométrie de type Tore-Supra.** Gauche : Champ de température à $t = 0.47$. Droite : Profils de $\log(T)$ à $t=0; 0.47; 0.5; 0.57$ à proximité du limiteur.

Ce déséquilibre énergétique inclut l'apparition de vitesses supersoniques à proximité du limiteur (c.f. figure 5.8). Toutefois, la condition de Bohm est ici imposée sous la forme d'une paroi absorbante. Cette méthode permet d'imposer un écoulement sonique au niveau des limiteurs mais interdit un écoulement supersonique (c.f. partie 3.2). Par conséquent, même si les champs de pression et de densité semblent bien maintenus, la condition aux limites imposée au limiteur ne semble pas suffisante pour évacuer toute l'énergie produite.

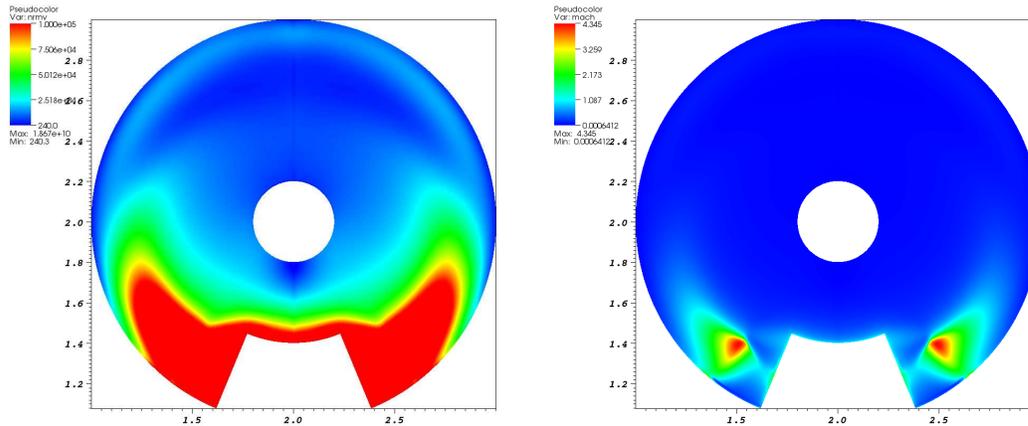


FIGURE 5.8 – **Approximation en terme force, géométrie de type Tore-Supra.** Gauche : norme de la vitesse à $t = 0.57$. Droite : Nombre de Mach à $t = 0.57$.

Solution équilibre sur géométrie JET

La méthode d'approximation sous forme d'un terme force a aussi été testée sur la géométrie de JET, i.e. une géométrie à configuration en point X. Le maillage aligné sur les lignes de champ magnétique est donné figure 5.9, il est composé de 6636 triangles et 3436 points. Une méthode FVM, en géométrie 2D plan, couplée avec un solveur de Riemann de type HLLC et un schéma explicite RK4 en temps, est utilisée.

Les conditions initiales de pression et de densité sont les solutions issues d'un équilibre et sont données par la figure 5.10 ; la vitesse initiale est nulle. Le terme force $\mathbf{F} = \nabla p_{eq}$ est obtenu en chaque point du maillage par l'intermédiaire des fonctions de base de chacun des triangles.

Des conditions aux limites similaires à la géométrie de type TORE-SUPRA sont utilisées :

- conditions de glissement au bord extérieur,
- conditions aux limites de Bohm, imposées par des conditions absorbantes aux plaques du divertor,
- cellules fantômes au coeur avec l'état suivant : vitesse nulle, pression et densité identiques à l'intérieur du système.

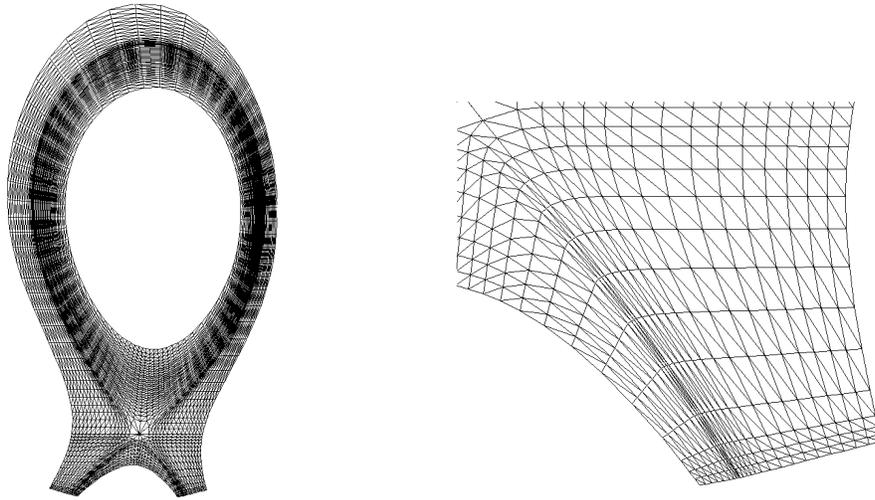


FIGURE 5.9 – Maillage aligné sur les lignes de champs du tokamak JET : 6636 triangles et 3436 points.

La figure 5.11 présente l'évolution d'un profil radial de pression et montre que même si la forme du profil est conservée, la pression ne cesse d'augmenter au fil du calcul, ce qui n'est pas physique. Par ailleurs, on observe sur la figure 5.12 que le champ de densité n'est également pas conservé. Ainsi, dans cette géométrie à configuration à point X, l'approximation utilisée ici du terme équilibre ne permet pas de conserver numériquement le confinement du plasma. Ce déséquilibre numérique provient de la différence de discrétisation entre le terme $\mathbf{F} = \nabla p_{eq}$ évalué en terme force et celui en ∇p calculé par le solveur de Riemann.

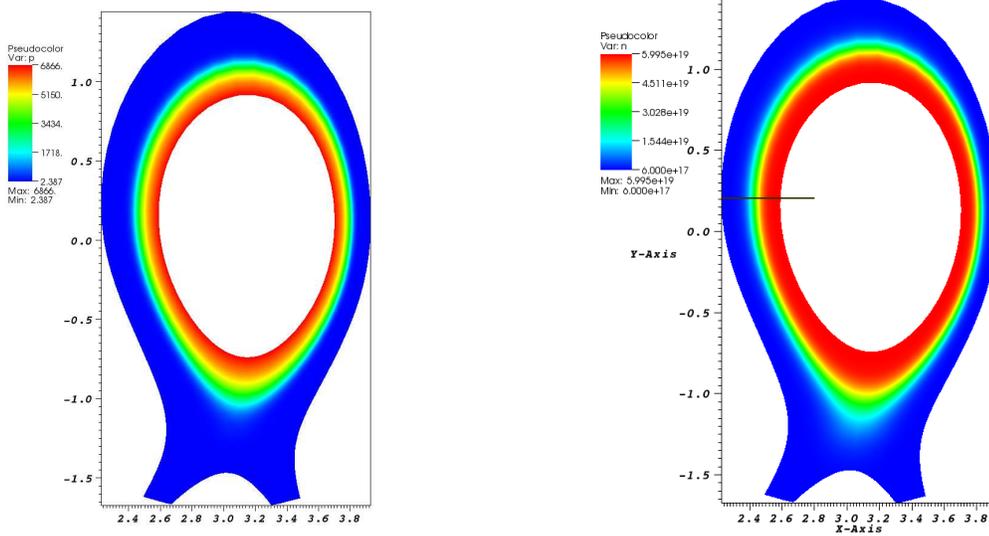


FIGURE 5.10 – Gauche : Condition initiale de pression. Droite : Condition initiale de densité.

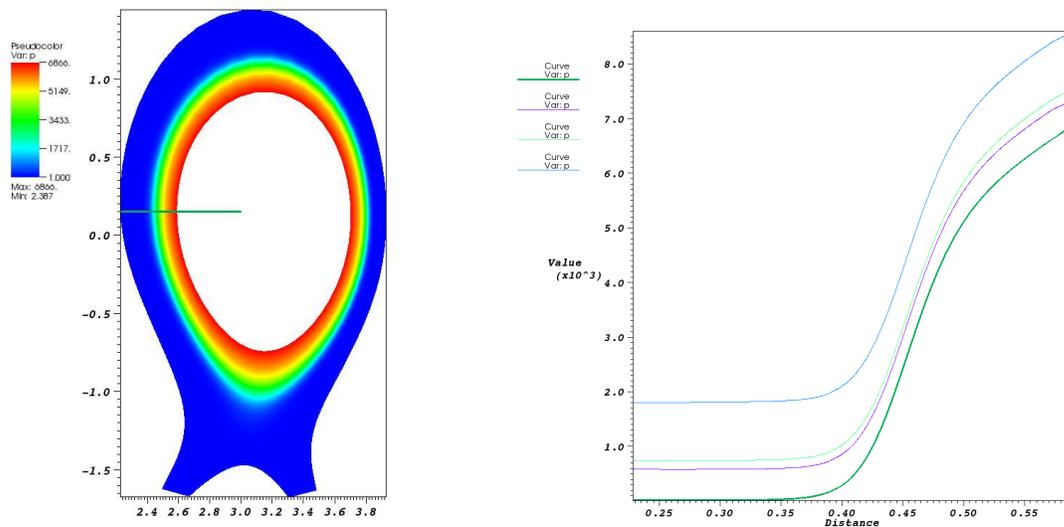


FIGURE 5.11 – **Approximation en terme force, géométrie JET.** Profils de pression à $t=0;1.7;7.3;14.7$ à droite, le long du segment donné par la figure de gauche.

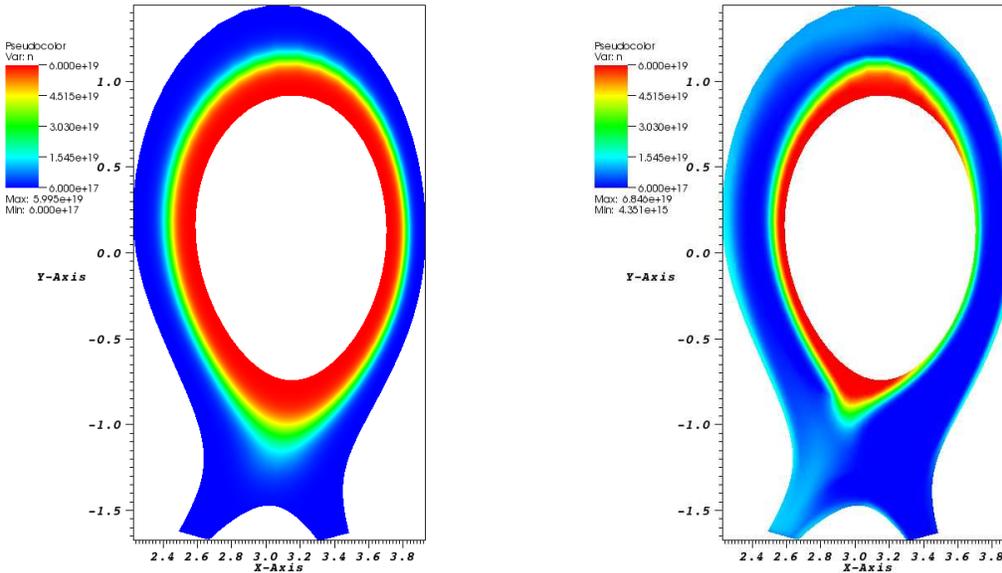


FIGURE 5.12 – **Approximation en terme force, géométrie JET.** Champs de densité à $t = 0$ (gauche) et à $t = 1.7$ (droite).

5.2.2 Nouveau solveur de Riemann

La deuxième méthode considérée pour approximer le terme équilibre est l'intégration de ce terme au sein du solveur de Riemann (c.f. partie 3.1.3). Cette méthode a été testée sur la configuration JET qui posait problème avec l'approximation sous forme d'un terme source. Le calcul a été mené avec une méthode volumes finis couplée au nouveau solveur de Riemann, en géométrie plane, avec un schéma en temps explicite RK4. Le maillage est aligné sur les lignes de champ magnétique et est constitué de 30000 points et 59000 triangles.

Maintien du confinement du plasma

Des conditions aux limites de glissement sont utilisées partout pour ce cas test et sont imposées par l'intermédiaire de cellules fantômes. Les conditions initiales considérées sont identiques à celles utilisées précédemment (fig. 5.10).

La figure 5.13 compare les profils de pression à l'instant initial et au temps $t = 20$. On observe ici que les deux profils sont confondus. Par ailleurs, le champ de vitesse obtenu au même temps est aussi donné figure 5.13. La norme de la vitesse poléoïdale est de l'ordre de 10^{-10} , soit de l'ordre de l'erreur machine, la vitesse de référence étant de l'ordre de $10^5 \text{ m}^2/\text{s}$. Par conséquent, ce premier test semble plutôt encourageant : l'intégration du

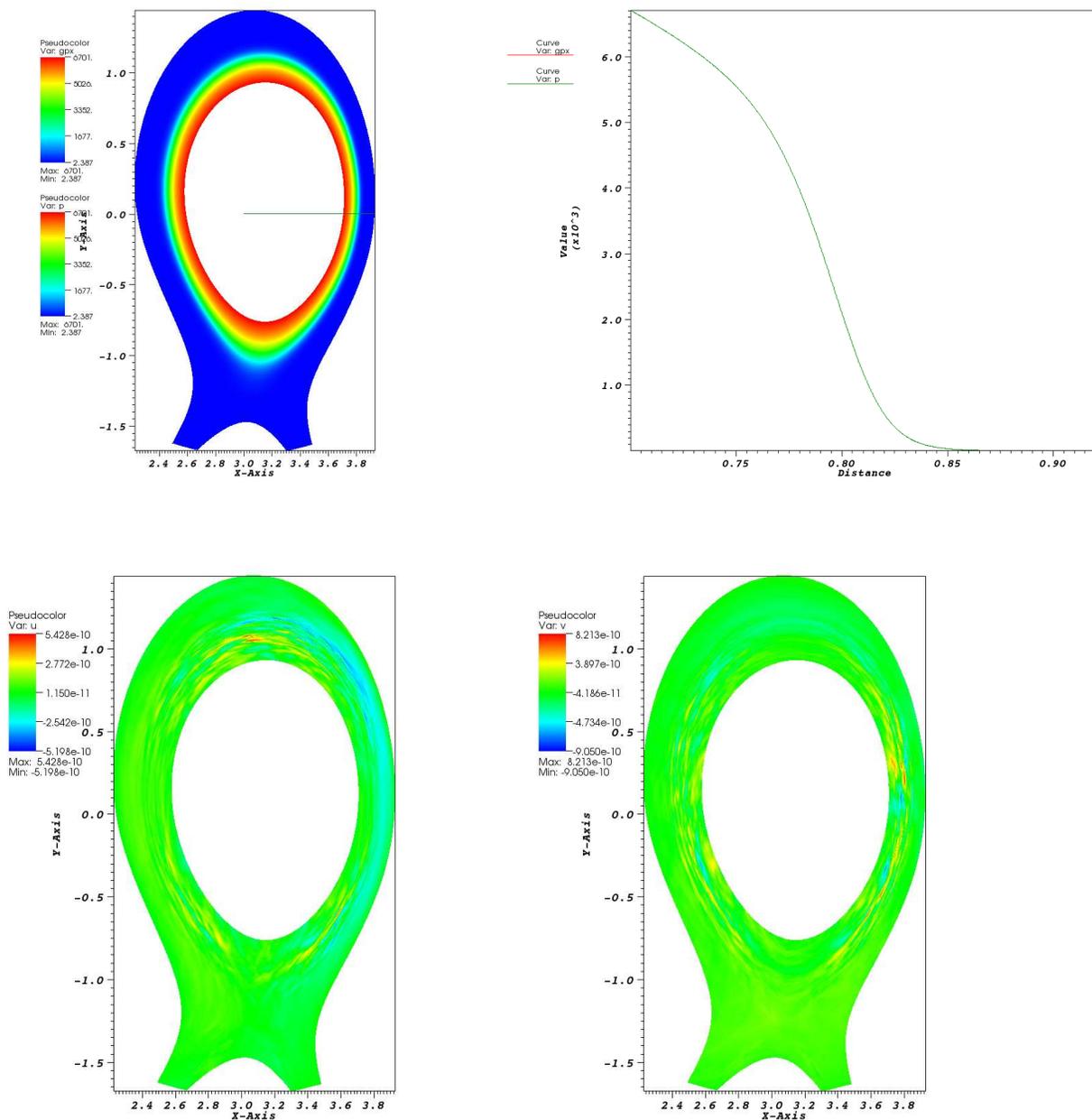


FIGURE 5.13 – Nouveau solveur de Riemann, maintien du confinement du plasma. Haut : Profils de pression à $t = 20$ et de p_{eq} à droite, le long du segment de la figure de gauche. Bas : Composantes horizontale (gauche) et verticale (droite) de la vitesse à $t = 20$ (200000 it.)

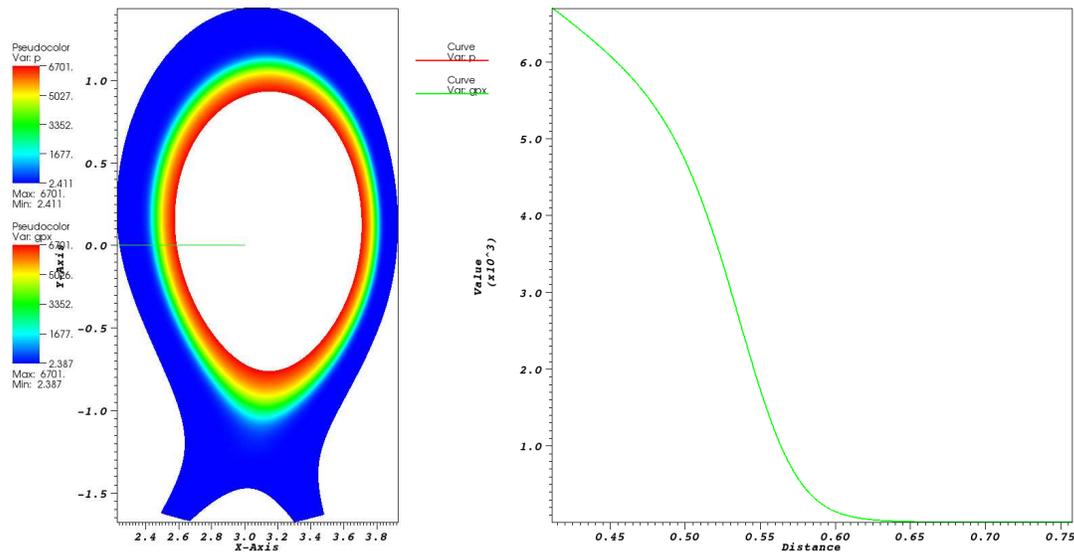


FIGURE 5.14 – **Nouveau solveur de Riemann, perturbation du plasma.** Profils de pression à $t = 12.4$ et de p_{eq} , à droite, le long du segment donné par la figure de gauche.

terme équilibre à l'intérieur du solveur de Riemann permet de préserver le confinement du plasma.

Un second test a été effectué sous des conditions analogues au calcul qui vient d'être décrit mais avec une pression initiale perturbée par rapport à celle d'équilibre. Une perturbation homogène de l'ordre de 1% est utilisée. Au temps $t = 12.4$, la figure 5.14 montre que le profil est revenu à la condition d'équilibre. Ainsi, la perturbation mise en place ne trouble pas l'équilibre du plasma. La configuration considérée apparaît ainsi stable.

Confinement du plasma avec condition de Bohm

Le calcul est mené en présence des conditions aux limites de Bohm. Le maillage considéré est le même que précédemment. Les conditions aux limites sont de type glissement au coeur du plasma, ainsi qu'au bord extérieur à l'exception des plaques du divertor. Des conditions aux limites de Bohm sont imposées sur ces dernières par la méthode du flux, comme proposée dans le paragraphe 3.2.2.

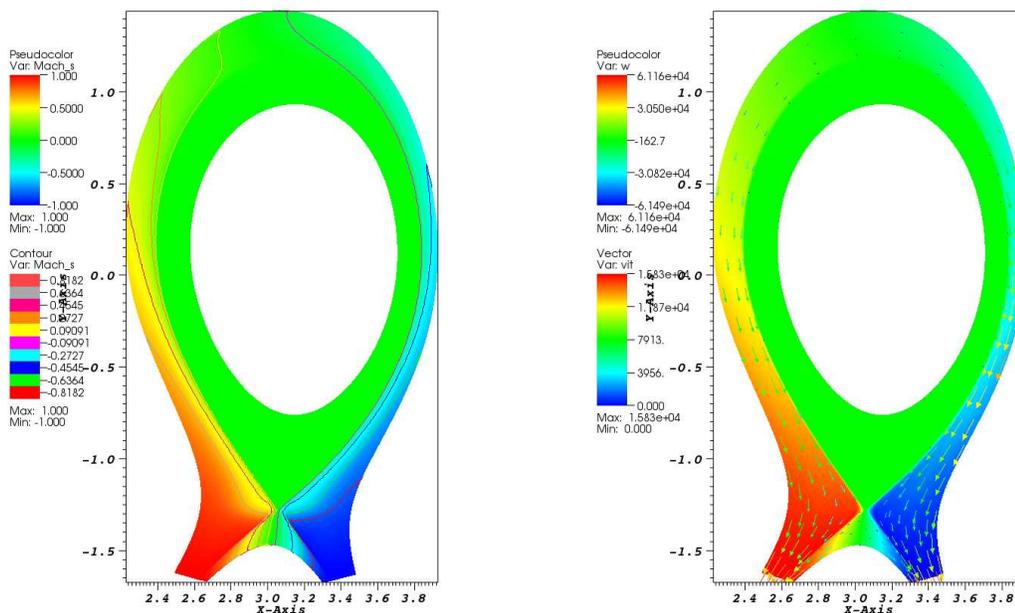


FIGURE 5.15 – Gauche : Mach signé à la condition initiale. Droite : champ de vitesse azimutal et vecteurs de vitesse poloïdale à la condition initiale.

Les conditions initiales utilisées ici sont les mêmes que précédemment pour la densité et la pression (c.f. fig. 5.10). La condition initiale de vitesse est construite à partir des conditions aux limites de Bohm, comme décrit dans la partie 3.2. Ainsi, à l'intérieur de la séparatrice, la vitesse est nulle. A l'extérieur, la vitesse est purement colinéaire au champ magnétique. Elle est construite à partir des conditions aux limites de Bohm et varie linéairement le long d'une ligne de champ magnétique (c.f. section 3.2.2). Cette condition initiale de vitesse et le champ de Mach associé sont donnés figure 5.15.

La méthode FVM utilise le solveur de Riemann incluant le terme équilibre avec un schéma en temps explicite RK4. La géométrie considérée est 3D axisymétrique mais les

termes croisés de la divergence d'un tenseur sont dans un premier temps négligés, assimilant la géométrie à un cylindre (« géométrie slab »).

Le champ de vitesse au cours de la simulation est donné figure 5.16. Une zone de circulation apparaît au niveau du point X dans un premier temps, probablement due à la géométrie torique du tokamak. Ce phénomène de recirculation s'estompe au fil du calcul, laissant place à un champ de vitesse colinéaire au champ de magnétique, la condition aux limites de Bohm imposant un flux de matière en direction des plaques du divertor.

La figure 5.17 présente l'évolution du nombre de Mach au cours du calcul. Les iso-Mach $M = 1$ et $M = -1$ sont en particulier représentés. Ils montrent l'apparition de vitesses supersoniques à proximité des plaques. Ce phénomène est notamment expliqué dans [24]. Remarquons qu'aucune couche limite ne se développe au niveau des plaques, la méthode du flux imposé satisfait donc bien l'inéquation $M \geq 1$, voulue par la condition aux limites de Bohm.

La figure 5.19 présente l'évolution d'un profil de densité. Malgré la présence des conditions de Bohm qui imposent un flux de matière en direction du divertor, le champ de densité est maintenu dans le coeur du plasma, en raison de la présence du terme d'équilibre. De façon évidente, en prolongeant le calcul, la SOL aura tendance à se vider, le plasma étant attiré par les conditions de Bohm. Toutefois, ici, aucun mécanisme de réapprovisionnement du plasma n'est présent. Dans l'esprit de ce qui se fait pour les modèles fondés sur l'approximation en vitesse de dérive [60], celui-ci pourrait être modélisé par un terme de diffusion de densité perpendiculaire au champ magnétique, ce qui permettrait à la SOL de récupérer de la matière provenant du coeur du plasma.

Dans un second temps, un calcul similaire a été mené en 3D axisymétrique, en présence donc des termes croisés de la divergence des tenseurs. Des résultats pour la vitesse et le Mach sont présentés figure 5.18. On peut observer qu'en présence de ces termes radiaux, le maintien du confinement du plasma semble davantage problématique. En effet, au niveau du point X, un flux de matière est observé, engendrant donc un déséquilibre du plasma.

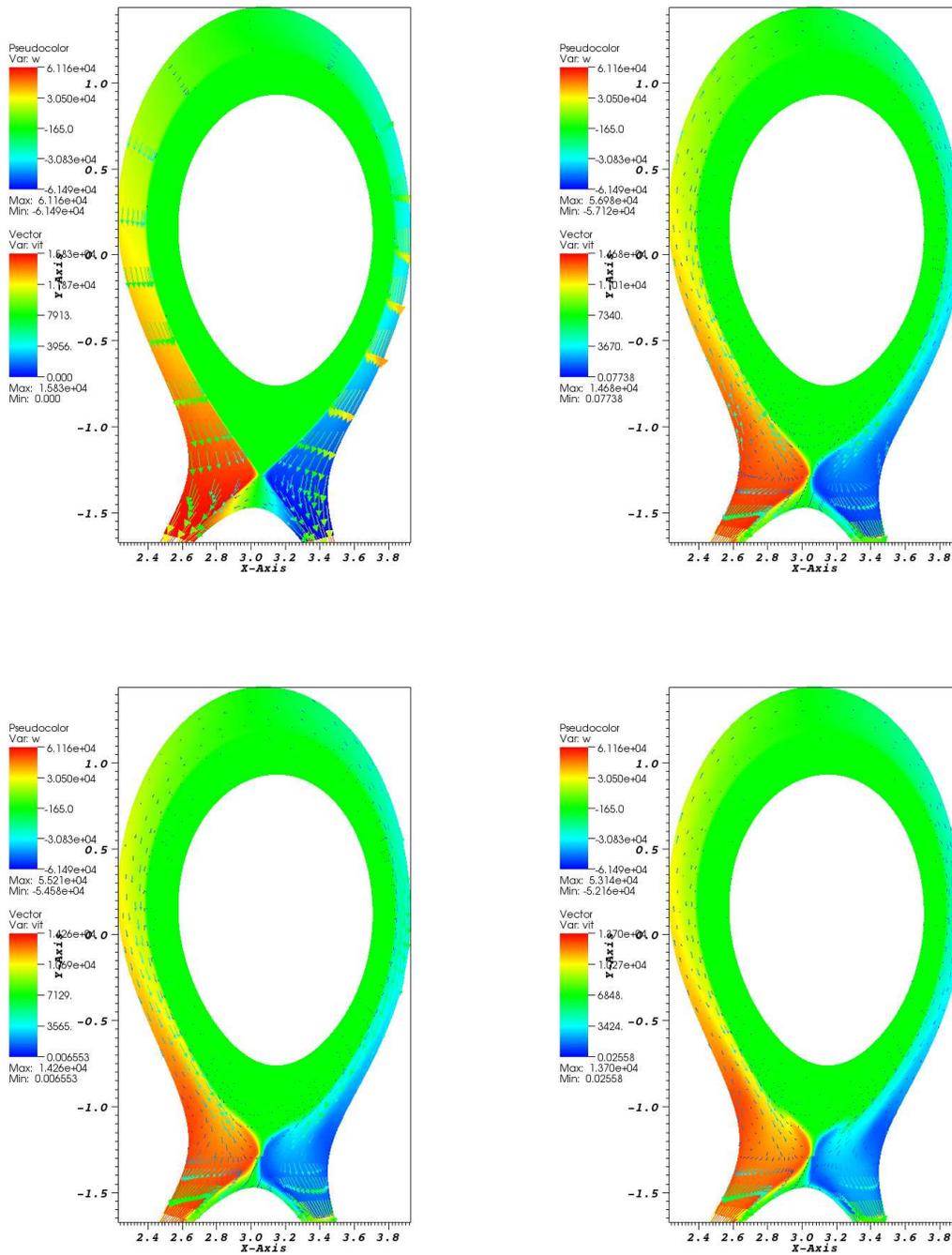


FIGURE 5.16 – Nouveau solveur de Riemann, confinement du plasma avec condition de Bohm. De haut en bas et de gauche à droite : champ de vitesse azimutal et vecteurs de vitesse poloidale à $t=0$; 6.61; 10.74; 16.52.

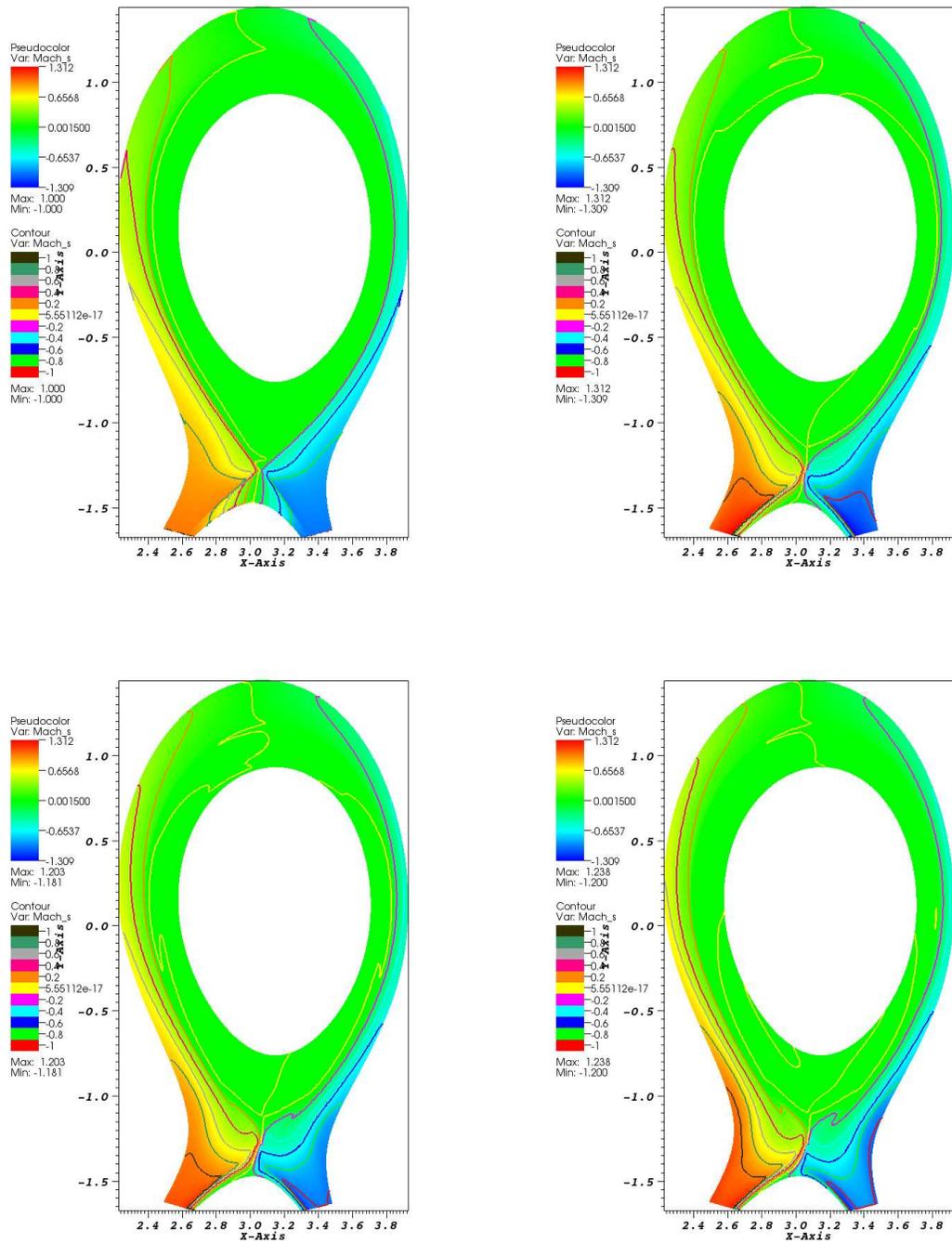


FIGURE 5.17 – Nouveau solveur de Riemann, confinement du plasma avec condition de Bohm. De haut en bas et de gauche à droite : champ de nombre de Mach signé à $t=0 ; 6.61 ; 13.21 ; 20.65$.

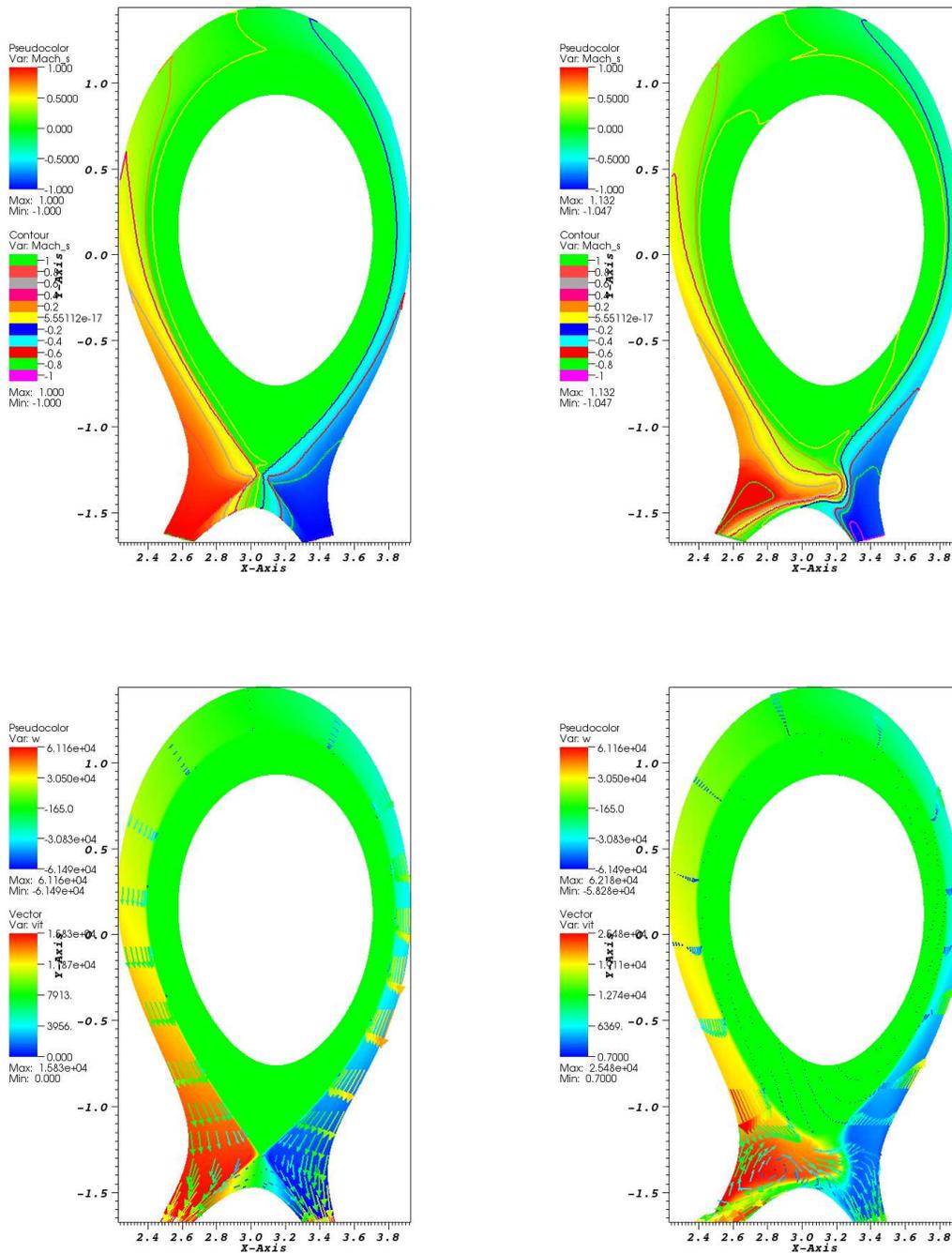


FIGURE 5.18 – Nouveau solveur de Riemann, condition de Bohm, géométrie axisymétrique. Haut : nombre de Mach à $t = 13.21; 20.65$. Bas : champ de vitesse azimutal et vecteurs de vitesse polioïdale à $t = 13.21; 20.65$.

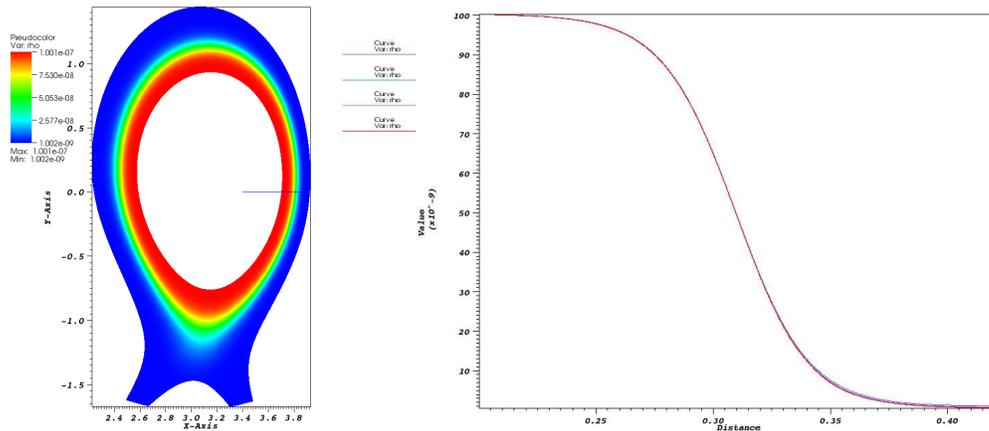


FIGURE 5.19 – **Nouveau solveur de Riemann, confinement du plasma avec condition de Bohm.** Profils de densité à $t = 0; 5.8; 11.6; 20.6$ à gauche, le long du segment donné par la figure de droite.

5.3 Perturbations de l'équilibre

Deux problèmes majeurs ont été révélés par les derniers tests.

- Les conditions de Bohm provoquent un flux de matière en direction des plaques du divertor sans qu'aucun mécanisme de réapprovisionnement ne vienne compenser cette perte.
- Dans le cas de la géométrie axisymétrique toroïdale, un déséquilibre du plasma apparaît au niveau du point X avec le nouveau solveur de Riemann.

C'est pourquoi une dernière méthode d'approximation a été proposée dans le paragraphe 3.1.4. Elle consiste à évaluer numériquement les termes d'équilibre sur la quantité de mouvement et sur l'énergie mais aussi sur la densité, ce qui permet de modéliser une source de matière réalimentant le plasma. Si le système est physiquement stable, en l'absence de perturbation, l'équilibre est alors parfaitement préservé.

Différents types de perturbations ont été utilisés afin d'évaluer leur impact sur l'équilibre du plasma. Ainsi, le terme d'équilibre est évalué numériquement à partir des quantités non perturbées mais ce sont les champs perturbés qui sont pris comme conditions initiales.

Les conditions aux limites considérées ici sont les mêmes que précédemment :

- condition de Bohm aux plaques par la méthode du flux imposé,
- condition de glissement au bord extérieur, zone privée comprise,
- condition de glissement au coeur du plasma.

Les calculs ont été menés sur une géométrie axisymétrique avec une méthode volume finis, couplée à un solveur de Riemann de type HLLC. Le schéma est d'ordre 2 en espace et explicite en temps (RK4). Le maillage est le même que précédemment.

À l'équilibre, les conditions de pression et de densité considérées sont données fig. 5.10. Les conditions initiales de vitesse et de Mach sont obtenues de façon analytique, la vitesse parallèle varie linéairement suivant les lignes de champ magnétique. Elles sont données fig. 5.20.

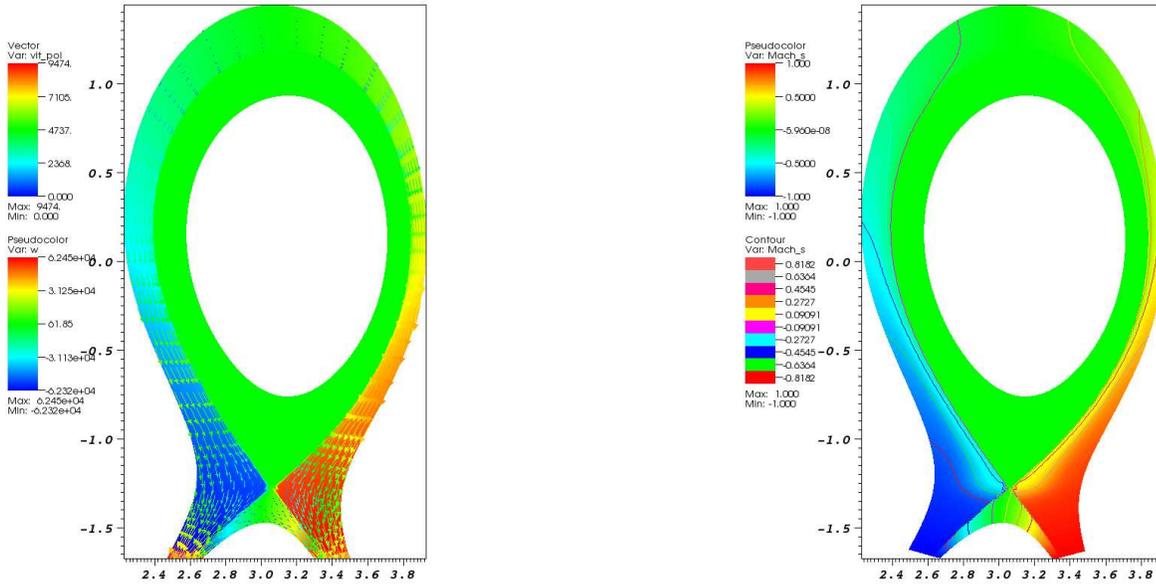


FIGURE 5.20 – Gauche : champ de vitesse azimuthal et vecteurs de vitesse poloïdale à la condition initiale. Droite : nombre de Mach à la condition initiale.

5.3.1 Perturbation homogène de la densité

Dans un premier temps, une perturbation homogène de la densité, de l'ordre de 1%, a été imposée :

$$\rho_0 = \rho_{eq}(1 + 0.01a), \quad (5.5)$$

où a est un réel aléatoire, de densité de probabilité uniforme, compris entre -1 et 1 . La pression à l'équilibre ainsi que la vitesse sont conservées mais la température est modifiée conformément à la perturbation de la densité :

$$T_0 = \frac{p_{eq}m_i}{\rho_0 e}, \quad (5.6)$$

où m_i est la masse ionique et e , la charge électronique.

Les résultats obtenus suite à cette perturbation sont donnés figure 5.21. Les fluctuations de pression les plus importantes se développent dans un premier temps au niveau de la séparatrice et se propagent ensuite dans la SOL. Cela correspond au fait qu'à la séparatrice, le terme permettant le maintien du plasma est le plus important. Concernant la norme de la vitesse, des remarques similaires peuvent être émises. En effet, les fluctuations les plus importantes sont observées au niveau de la séparatrice et dans la SOL. Cependant, de faibles fluctuations de vitesses apparaissent aussi dans le coeur du plasma. On peut supposer que celles-ci tendent à remettre le plasma dans les conditions d'équilibre. Pour chacune des visualisations, on peut remarquer que les fluctuations sont en particulier importantes au niveau du point X. En effet, dans cette zone, le maintien du confinement est délicat car 4 zones distinctes sont limitrophes : le coeur, la zone privée, le bord côté champ fort et celui côté champ faible.

5.3.2 Perturbation localisée de densité

Surdensité localisée sans modification de la vitesse

Dans un second temps, une perturbation localisée de la densité a été considérée :

$$\rho_0 = \rho_{eq} + \bar{\rho} \exp\left(-\frac{(x-2,3)^2 + (y-0,1)^2}{2(0,04)^2}\right) \quad (5.7)$$

avec $\bar{\rho} = 9,5 \cdot 10^{-8}$. Les conditions de vitesse et de pression sont les mêmes que précédemment mais le champ de température est modifié (c.f. éq. (5.6)).

Cette perturbation consiste donc à imposer une surdensité isobare, localement dans la SOL, de forme gaussienne. Celle-ci est représentée fig. 5.22.

Rappelons que le calcul ayant été mené sur une géométrie axisymétrique, la perturbation introduite dans la SOL modélise en fait un anneau de surdensité dans le tore.

La figure 5.23 présente les résultats obtenus pour les champs de densité et de vitesse poloïdale au cours du calcul. Les différentes visualisations montrent l'évolution de la perturbation le long des lignes de champ magnétique. En effet, la perturbation est entraînée par la vitesse poloïdale initiale. Par ailleurs, un phénomène de recirculation apparaît à l'avant de la perturbation et suit le pic de densité qui est transporté. Toutefois, cette perturbation reste localisée dans la SOL, n'atteignant pas la séparatrice. Elle n'affecte donc pas le coeur du tokamak.

Surdensité localisée avec modification de la vitesse

Ce dernier test de perturbation de l'équilibre est proche du précédent. En effet, la même perturbation de la densité est mise en place (éq. (5.7) et (5.6)). La pression est celle de l'équilibre. Par contre, la surdensité est cette fois affectée d'une vitesse poloïdale

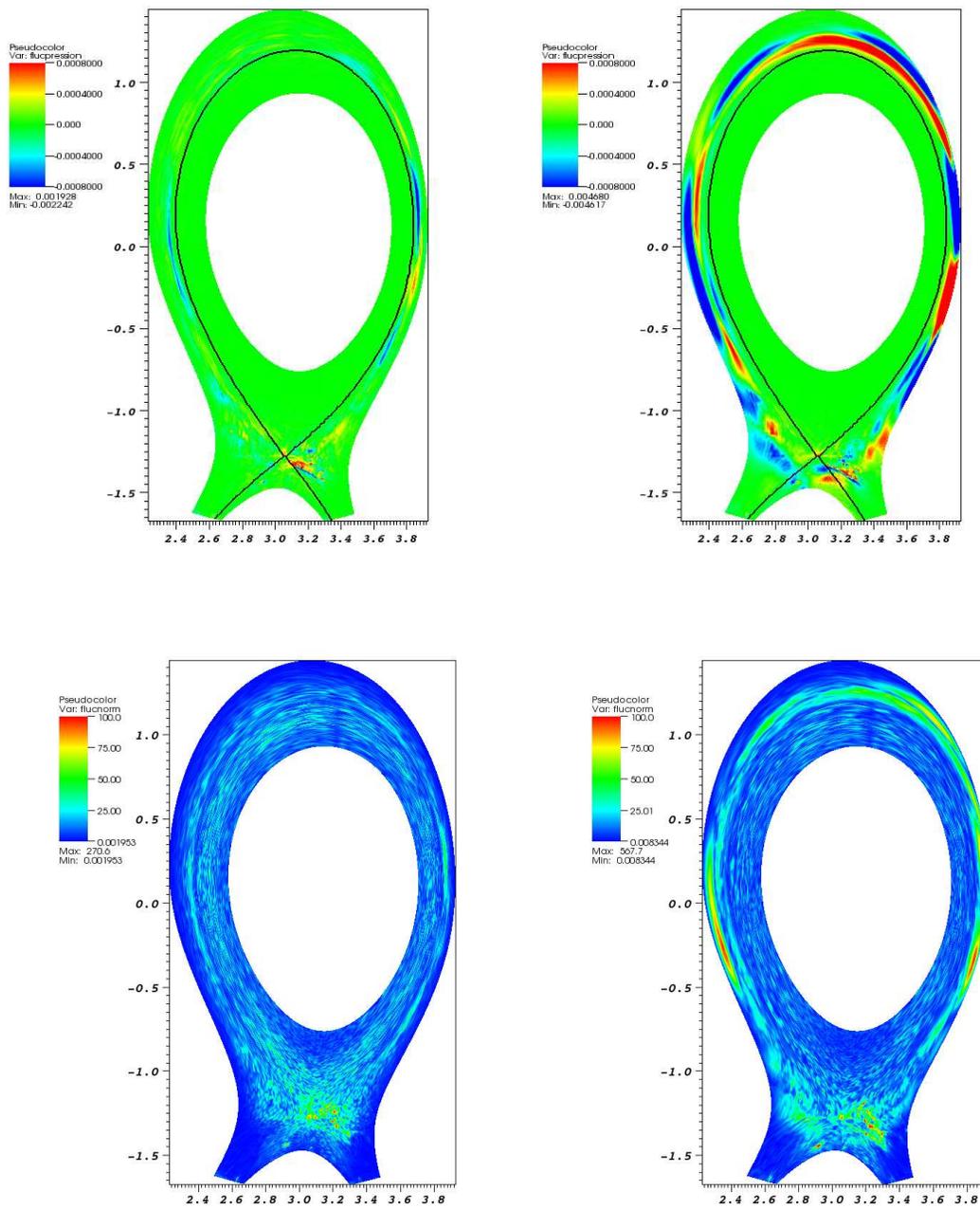


FIGURE 5.21 – **Perturbation homogène de la densité.** Haut : fluctuation de pression relative à $t = 0.072, 0.196$. Bas : fluctuation de la norme de la vitesse à $t = 0.072, 0.196$.

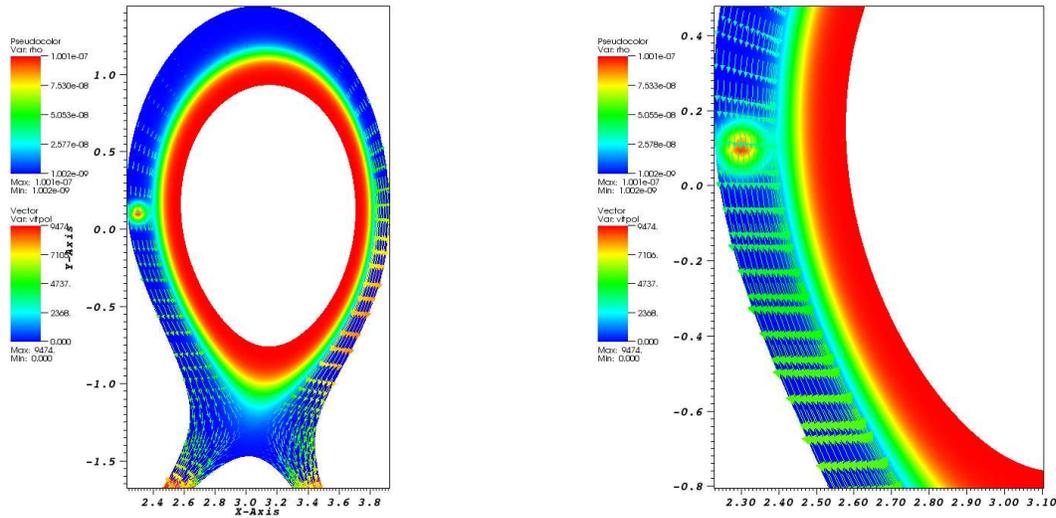


FIGURE 5.22 – **Surdensité localisée sans modification de la vitesse.** Conditions initiales de la vitesse poloïdale et du champ de densité, en présence d’une perturbation locale.

radiale, comme le montre la première vignette de la figure 5.24. Le reste du champ de vitesse est le même que précédemment.

La figure 5.24 présente les résultats de la simulation pour la densité et la vitesse poloïdale. Dans un premier temps, on remarque que la vitesse radiale affectée à la surdensité entraîne celle-ci en direction de la séparatrice. Toutefois, le terme d’équilibre, plus important à ce niveau, stoppe la progression radiale de la matière. La surdensité commence alors à se propager suivant les lignes de champ magnétique, entraînée par la vitesse poloïdale. Ainsi, même en présence d’une vitesse radiale, cette perturbation de l’équilibre ne traverse pas la séparatrice et n’impacte donc pas le coeur.

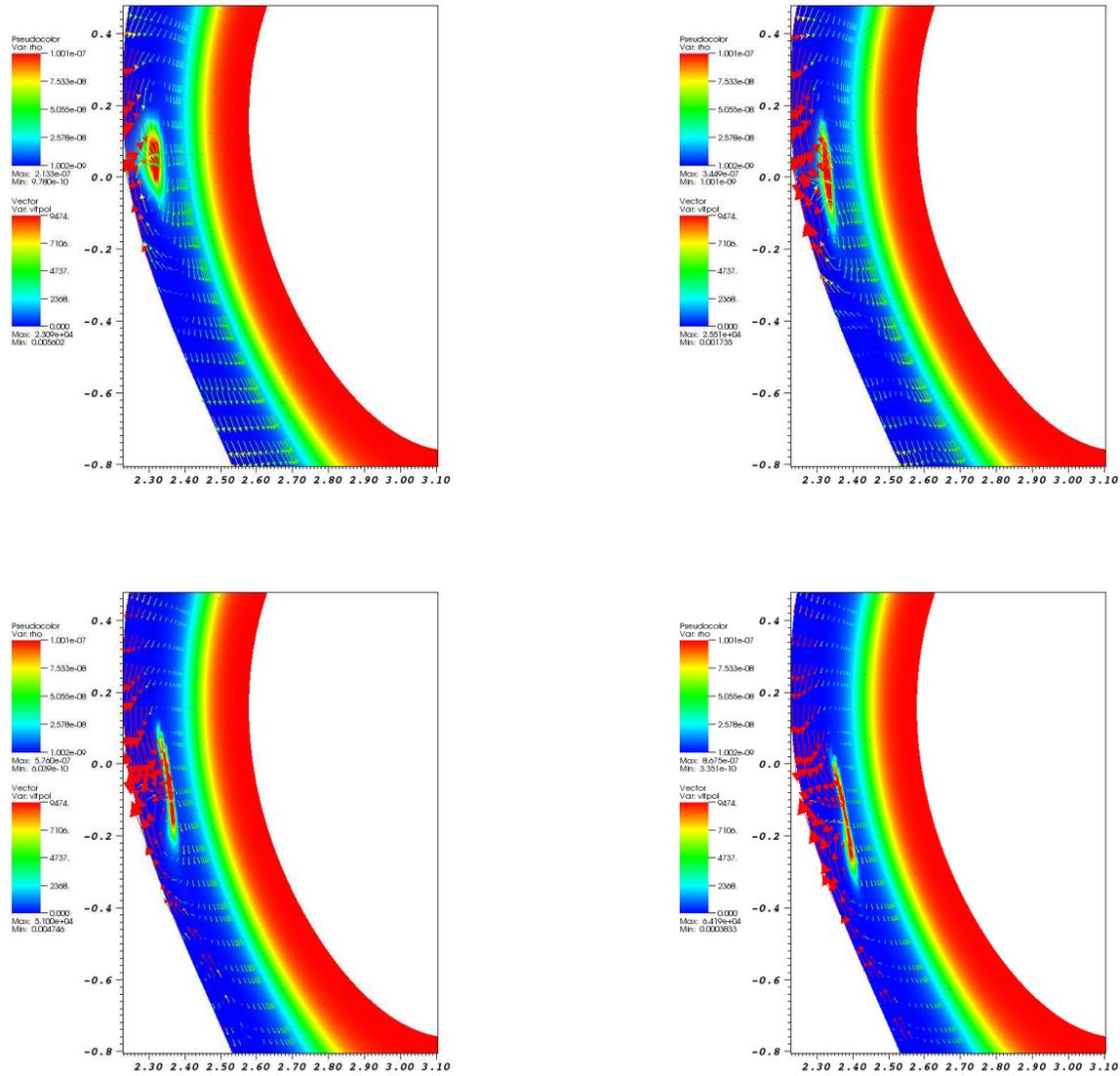


FIGURE 5.23 – Surdensité localisée sans modification de la vitesse. De haut en bas et de gauche à droite : Densité et vitesse poloïdale à $t = 1.24, 2.27, 3.72, 5.37$.

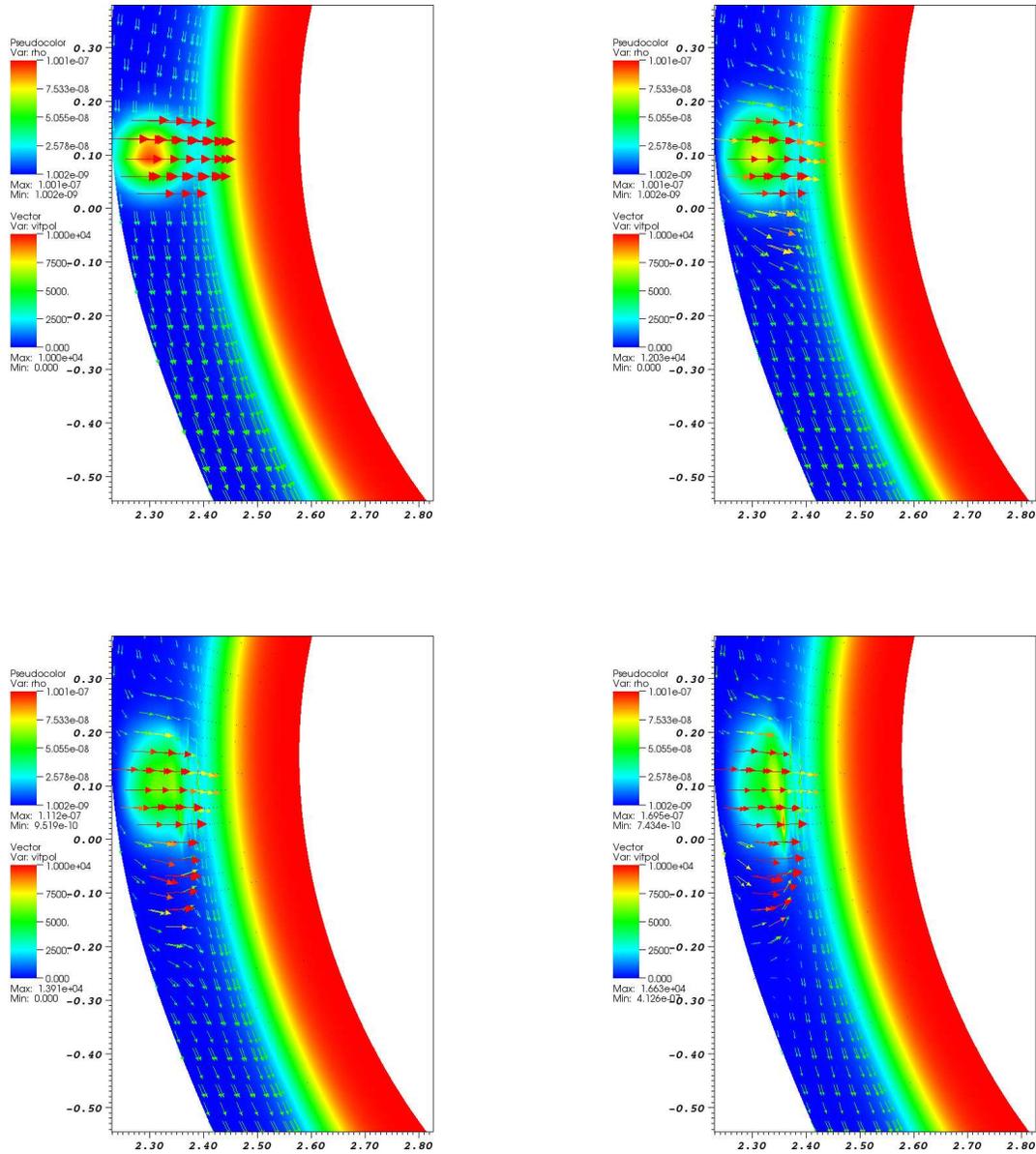


FIGURE 5.24 – Surdensité localisée avec modification de la vitesse. De haut en bas et de gauche à droite : Densité et vitesse poloidale à $t = 0, 0.09, 0.19, 0.29$.

5.4 Injection de pellets

Le but de cette section est de présenter des résultats obtenus pour la modélisation d'injections de pellets. En effet, le phénomène de fusion nucléaire repose sur la réaction D-T. Afin de prolonger la production d'énergie, il est nécessaire de réalimenter le tokamak en Deutérium et Tritium au fur et à mesure du processus. Il existe plusieurs méthodes pour procéder à cette réalimentation. Un premier procédé, le Gaz Puff [54] consiste à injecter des particules dans la chambre à vide, celles-ci peuvent ensuite pénétrer le plasma et être ionisées. Ce système est toutefois moins efficace que les injections de pellets [49], à savoir l'injection à grandes vitesses des glaçons de D-T. Ceux-ci sont protégés par leur couche externe qui disparaît dans le plasma de bord, permettant ainsi au deutérium et au tritium de pénétrer dans le coeur du plasma.

Une modélisation de ce procédé est notamment proposée dans [56] sous la forme de termes sources :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= m(t, \rho) \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}) &= \mathbf{F} \\ \partial_t \rho e + \nabla \cdot ((\rho e + p) \mathbf{u}) &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + T m(t, \rho) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Le terme source de matière est modélisé ici sous la forme :

$$m(t, \rho) = \frac{\rho}{C} \exp\left(-\frac{(t - 0.3)^2}{2(0.15)^2}\right) \exp\left(-\frac{(x - 2.44)^2 + (y - 0.1)^2}{2(0.02)^2}\right) \quad (5.9)$$

avec x et y , les coordonnées radiale et verticale et $C = 10^3$.

Notons que la présence du terme source de masse implique un terme supplémentaire dans l'équation de l'énergie.

Remarquons que ce terme source est localisé en espace, sous la forme d'une gaussienne centrée dans le coeur du plasma, où a lieu usuellement la propagation du pellet. Cette gaussienne déborde aussi à l'extérieur de la séparatrice. Par ailleurs, l'injection de matière est progressive et limitée dans le temps : l'injection est maximale à $t = 0.3$ et quasiment terminée à $t = 0.6$.

Les calculs ont été menés en géométrie axisymétrique avec une méthode volumes finis, couplée à un solveur de Riemann de type HLLC. Le schéma est d'ordre 2 en espace et explicite en temps de type RK4. Le terme d'équilibre est calculé numériquement, comme dans les dernières simulations présentées.

Les conditions aux limites considérées ici sont identiques aux calculs précédents :

- condition de Bohm aux plaques par la méthode du flux imposé,
- condition de glissement sur le bord extérieur, zone privée comprise,
- condition de glissement au coeur du plasma.

5.4.1 Vitesse analytique linéaire

Les conditions initiales considérées sont les conditions de l'équilibre, qui permettent de calculer le terme de compensation numérique. Elles sont données figures 5.10 et 5.20. Le maillage est le même que précédemment (environ 30000 noeuds et 59000 triangles). Le temps de calcul est d'environ $26h$ pour 30000 itérations ($t_{final} = 1.24$). Notons qu'ici la perturbation va provenir de la présence des termes sources et non plus de la modification des conditions initiales.

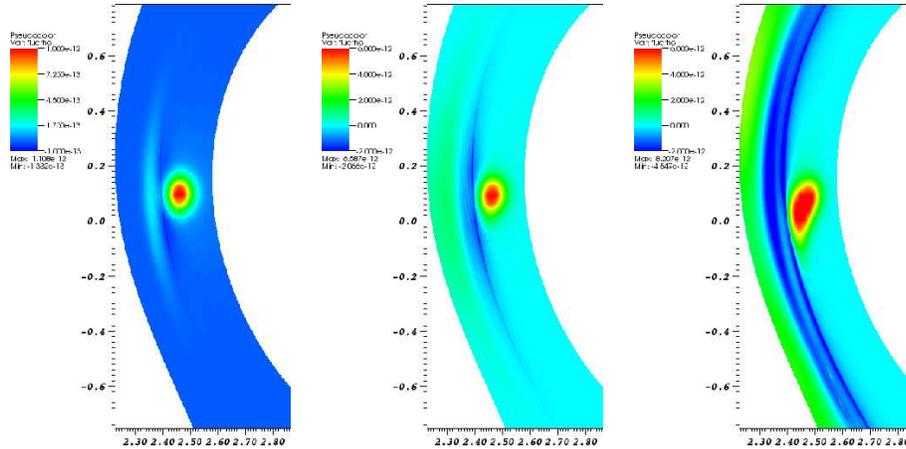


FIGURE 5.25 – **Pellet, vitesse analytique linéaire.** De gauche à droite : fluctuation de densité à $t = 0.1, 0.31, 0.72$.

Les fluctuations de densité sont présentées figure 5.25. Celles-ci se manifestent sous la forme d'une gaussienne, ce qui est cohérent avec le terme source mis en place. La gaussienne considérée impactant la séparatrice et le bord du plasma, une fluctuation de densité apparaît à l'extérieur de la séparatrice et se propage dans la SOL, entraînée par la vitesse poloïdale. Une zone de sous densité apparaît alors au niveau de la séparatrice.

Comme présenté figure 5.26, des fluctuations de pression apparaissent et tendent à se propager dans le plasma. Aux troisième et quatrième visualisations, l'injection est quasiment terminée. La surpression se répand alors, aussi bien dans la SOL que dans le coeur. La matière injectée paraît donc se propager dans le reste du tokamak, permettant ainsi son réapprovisionnement.

La figure 5.27 présente les fluctuations de la norme de la vitesse. Comme pour les autres quantités, elles apparaissent à l'endroit de l'injection de matière. Elles s'amplifient notamment dans la SOL où les vitesses initiales sont plus importantes. Une fois l'injection terminée, cette fluctuation de vitesse se propage dans le bord du plasma. La figure 5.26 présente aussi la vitesse poloïdale. Nous pouvons remarquer que l'orientation des vecteurs semble peu impactée par cet apport de matière. Par conséquent, l'injection du pellet ne semble perturber que légèrement le plasma et n'impacte pas son équilibre global.

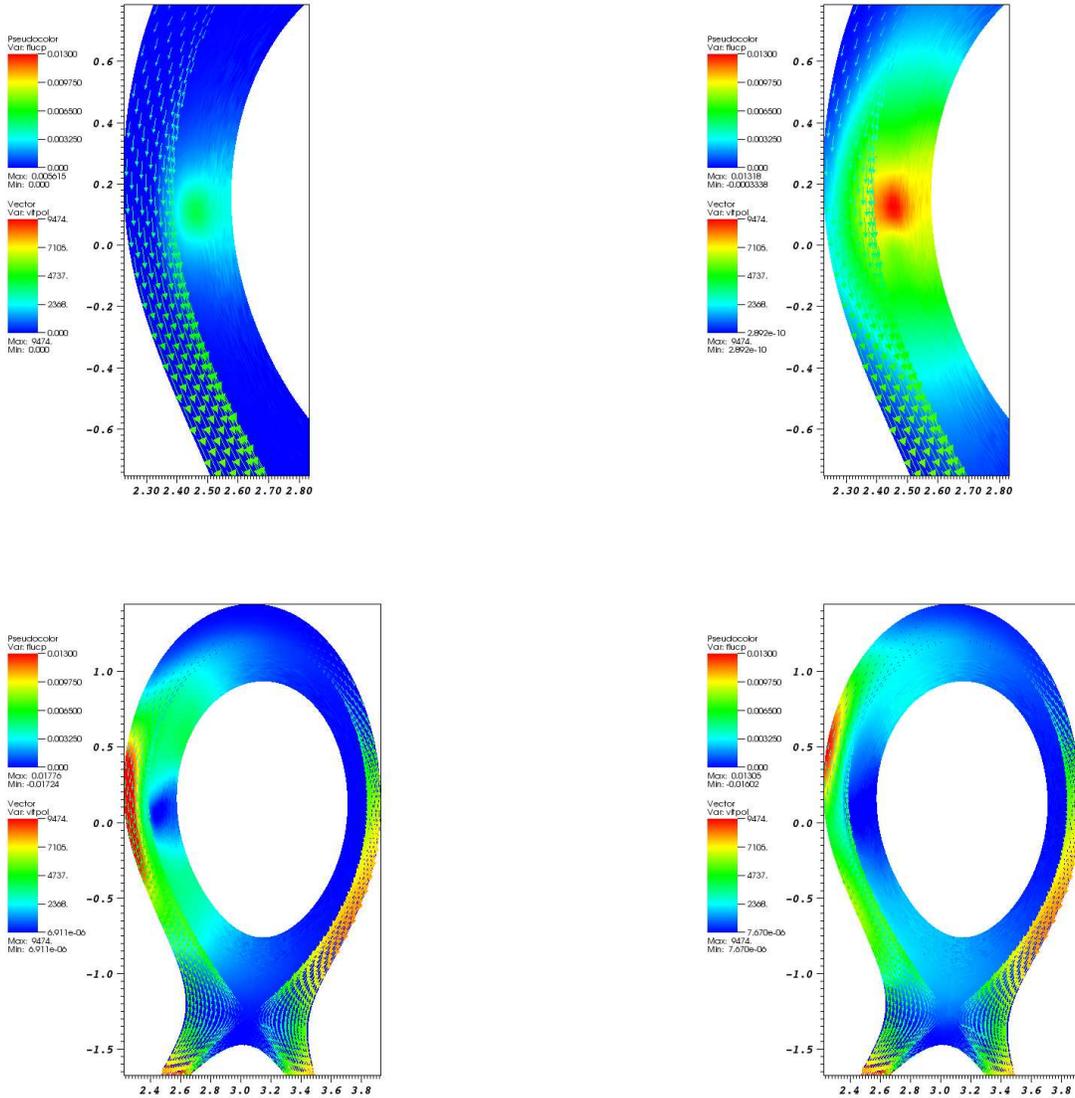


FIGURE 5.26 – Pellet, vitesse analytique linéaire. De haut en bas et de gauche à droite : fluctuation de pression à $t = 0.1, 0.31, 0.56, 0.72$.

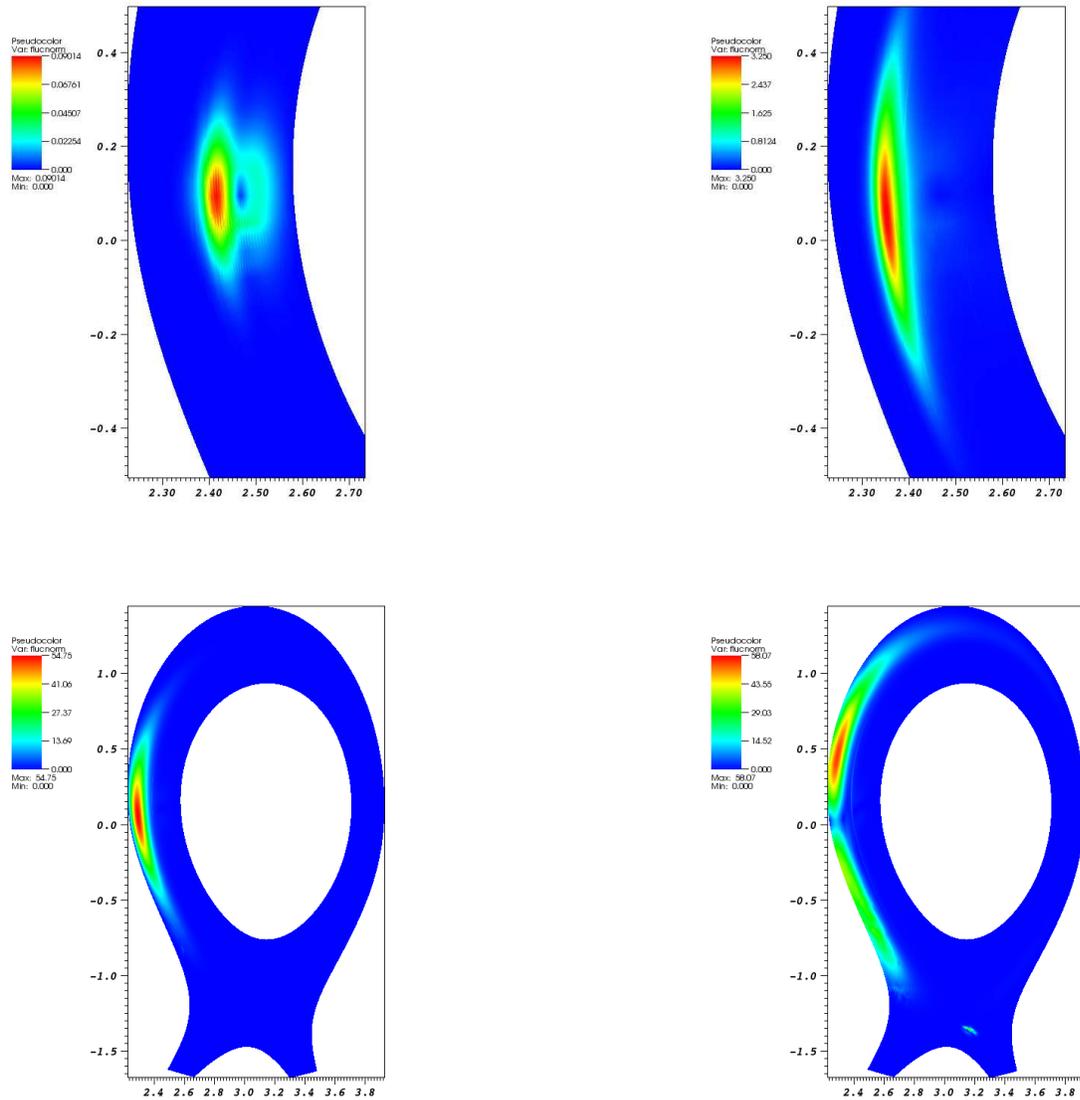


FIGURE 5.27 – Pellet, vitesse analytique linéaire. De haut en bas et de gauche à droite : Fluctuation de la norme de la vitesse à $t = 0.02, 0.1, 0.31, 0.56$.

5.4.2 Vitesse à l'équilibre

Maillage aligné sur les lignes de champ

Le cas test considéré ici est similaire à celui présenté précédemment excepté pour les conditions initiales. Les champs magnétique, de pression et de densité correspondent à un équilibre différent. La vitesse n'est plus calculée de façon analytique et ne varie plus linéairement suivant les lignes de champ magnétique. En particulier, la croissance de la vitesse se produit dans la partie divertor, ce qui semble être davantage conforme à la physique. Cette condition a été obtenue avec un code VF, densité-quantité de mouvement parallèle, fondé sur l'approximation en vitesse de dérive, en présence notamment d'un terme de diffusion de densité perpendiculaire à \mathbf{B} , [10]. Avec cette nouvelle vitesse, le critère de Bohm est également satisfait. Les conditions initiales de densité, pression, Mach et vitesse sont données figure 5.28. Le maillage considéré ici est toujours aligné sur les lignes de champ magnétique et comporte 3564 points et 6834 triangles (c.f. fig 5.33). Le temps de calcul est de 33min pour 7500 itérations ($t_{final} = 1.14$).

Pour cette simulation, on considère le même terme source (c.f. éq. 5.9) pour modéliser l'injection du pellet. La figure 5.29 montre la fluctuation de densité au cours du calcul. Un phénomène similaire à la simulation précédente se produit, avec apparition de matière à l'endroit du pellet, toujours modélisée par un terme source de forme gaussienne centrée dans le coeur du plasma mais traversant la séparatrice. Aussi, la surdensité qui est injectée à l'extérieur de la séparatrice se propage dans le bord, advectée par la vitesse. Toutefois, on peut remarquer que cette propagation semble être plus lente que dans le cas d'une vitesse variant linéairement suivant les lignes de champ. Ceci est cohérent avec le fait qu'au niveau du pellet, la vitesse est moins importante pour cette simulation que pour la précédente, la variation de vitesse se situant dans la partie divertor. A la fin de l'injection, la matière ajoutée commence à se propager dans le coeur.

La figure 5.30 présente les fluctuations de vitesse au cours du calcul. Celles-ci apparaissent à l'endroit de l'injection du pellet. Toutefois, au cours de la simulation, les maximas de ces fluctuations se déplacent vers le bord extérieur du plasma, les vitesses étant plus importantes à l'extérieur de la séparatrice que dans le coeur du plasma. Ces fluctuations de vitesse se propagent ensuite suivant les lignes de champ magnétique, à l'extérieur du plasma. Remarquons que comme pour la simulation précédente, l'injection de matière, qui est modélisée par terme source, n'engendre que de faibles perturbations du plasma et n'a pas d'impact sur son équilibre global.

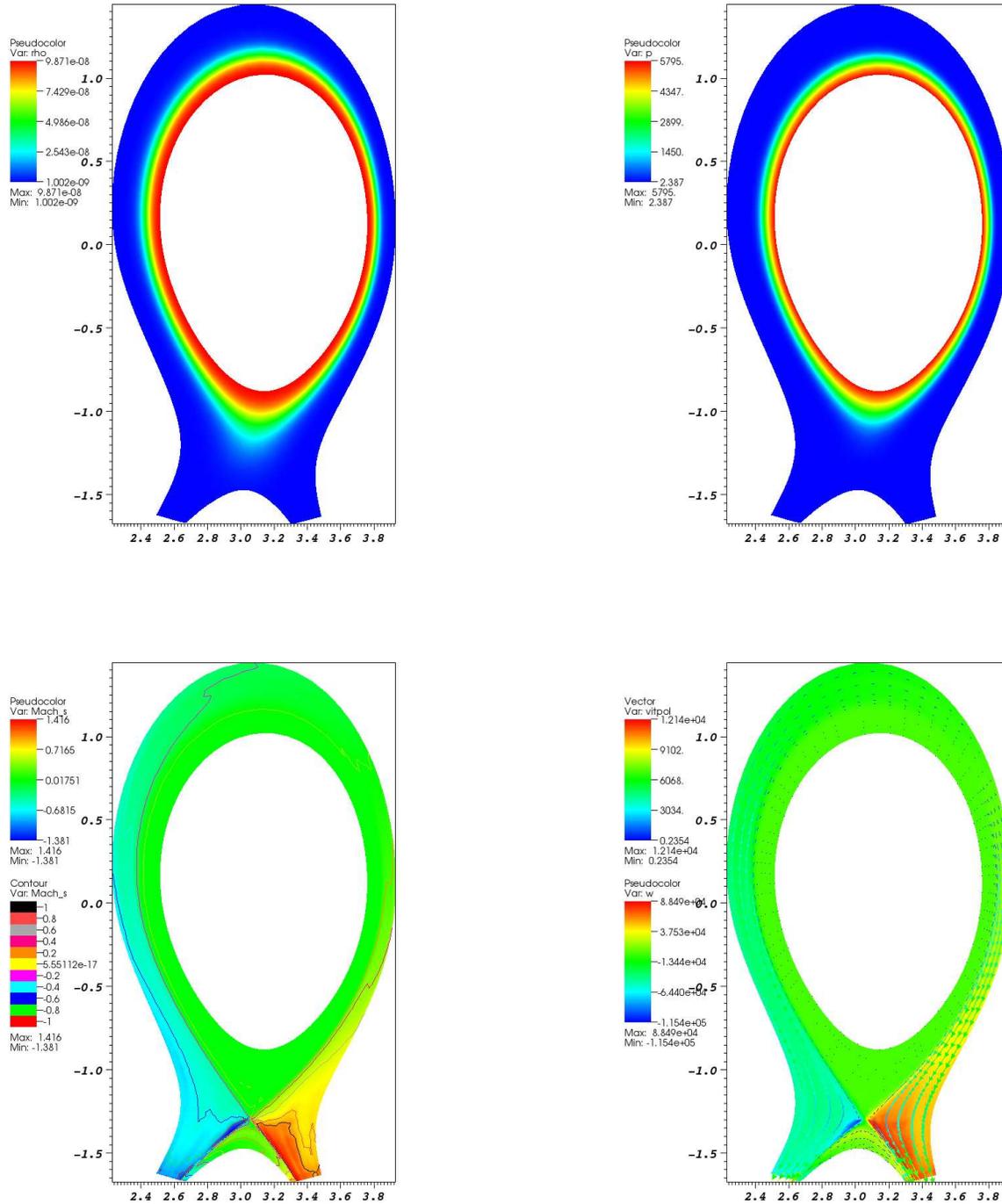


FIGURE 5.28 – Pellet, vitesse à l'équilibre. De haut en bas et de gauche à droite : conditions initiales de densité, pression, nombre de Mach et vitesse.

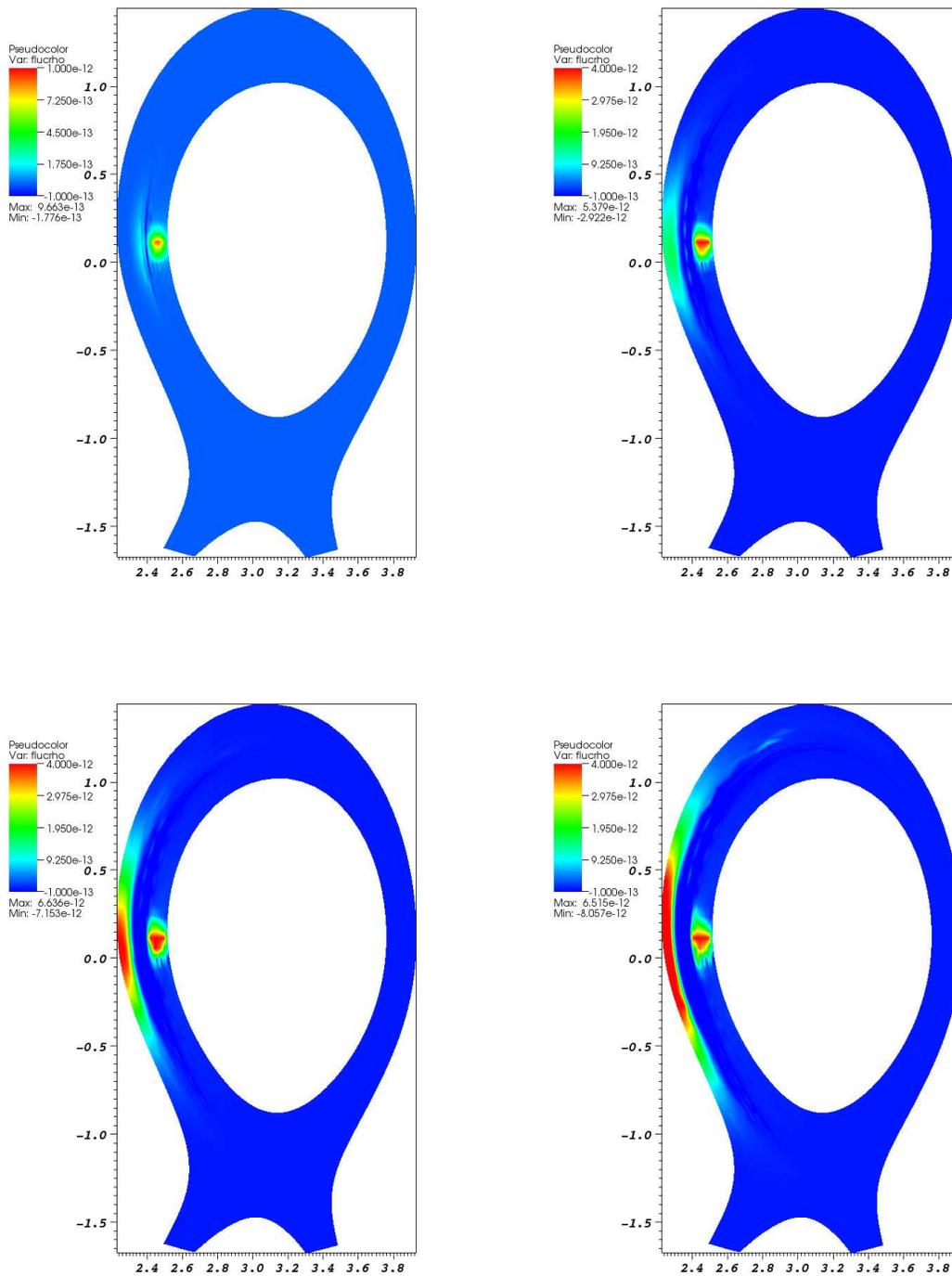


FIGURE 5.29 – Pellet, vitesse à l'équilibre. De haut en bas et de gauche à droite : fluctuation de densité à $t = 0.02, 0.3, 0.42, 0.57$.

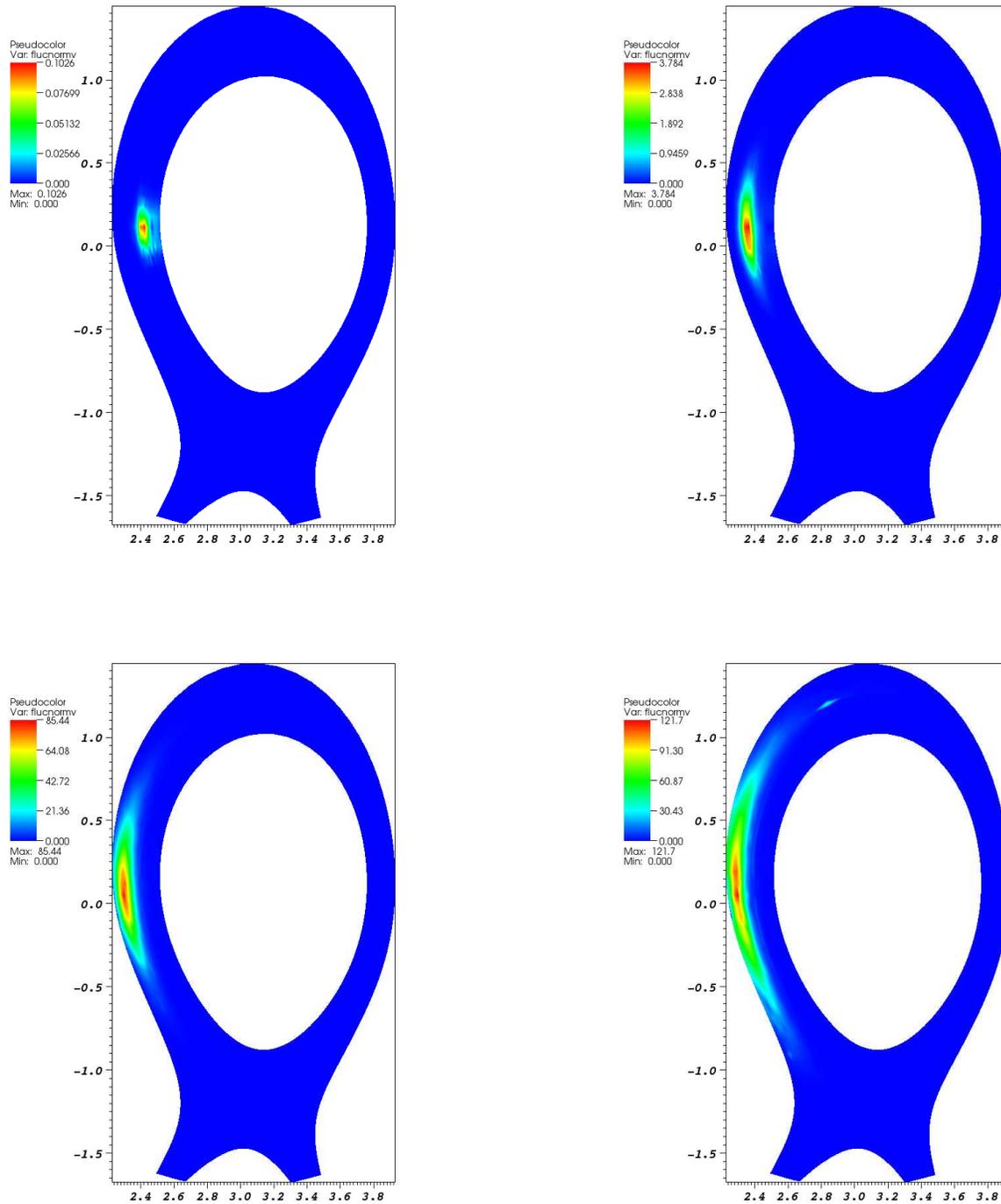


FIGURE 5.30 – Pellet, vitesse à l'équilibre. De haut en bas et de gauche à droite : fluctuation de la norme de la vitesse à $t = 0.02, 0.1, 0.28, 0.47$.

Le calcul mené pour ce nouveau test est le même que précédemment mais l'amplitude du terme source modélisant l'injection de pellet est augmentée :

$$m(t, \rho) = \frac{\rho}{C} \exp\left(-\frac{(t - 0.3)^2}{2(0.15)^2}\right) \exp\left(-\frac{(x - 2.44)^2 + (y - 0.1)^2}{2(0.02)^2}\right) \quad (5.10)$$

avec $C = 1$.

L'injection est donc 1000 fois plus importante que précédemment. Les conditions initiales sont inchangées par rapport aux dernières simulations.

La figure 5.31 présente la fluctuation de densité à différents instants avec cette injection plus importante. La dynamique générale reste la même : de la matière apparaît à l'endroit de l'injection. Une partie de la matière injectée se trouve à l'extérieur de la séparatrice et au cours du calcul, elle se propage suivant les lignes de champ magnétique, advectée par le champ de vitesse. Notons que de façon évidente, cette injection plus importante de matière par rapport aux simulations présentées précédemment entraînent des fluctuations de densité plus fortes, le rapport 1000 étant retrouvé.

Enfin, la figure 5.32 présente les fluctuations de pression et de vitesse. Une surpression apparaît à l'endroit de l'injection de pellet et se propage dans le reste du plasma, traversant la séparatrice. Toutefois, dans ce cas, on note que cette fluctuation de pression modifie très sensiblement le profil de vitesse poloïdale. En effet, à l'instant initial, le champ de vitesse est parallèle au champ magnétique mais les résultats présentés montrent que dans le plan poloïdale, la vitesse devient perpendiculaire aux lignes de champ magnétique. En effet, la forte perturbation liée à l'injection se déplace en direction du bord extérieur et une fois que celui-ci est atteint, la perturbation se propage dans le plasma, modifiant les profils de vitesse. L'équilibre global du plasma semble alors être fortement perturbé. Ceci souligne le fait que l'injection de matière doit être dosée afin d'éviter de perturber le confinement du plasma.

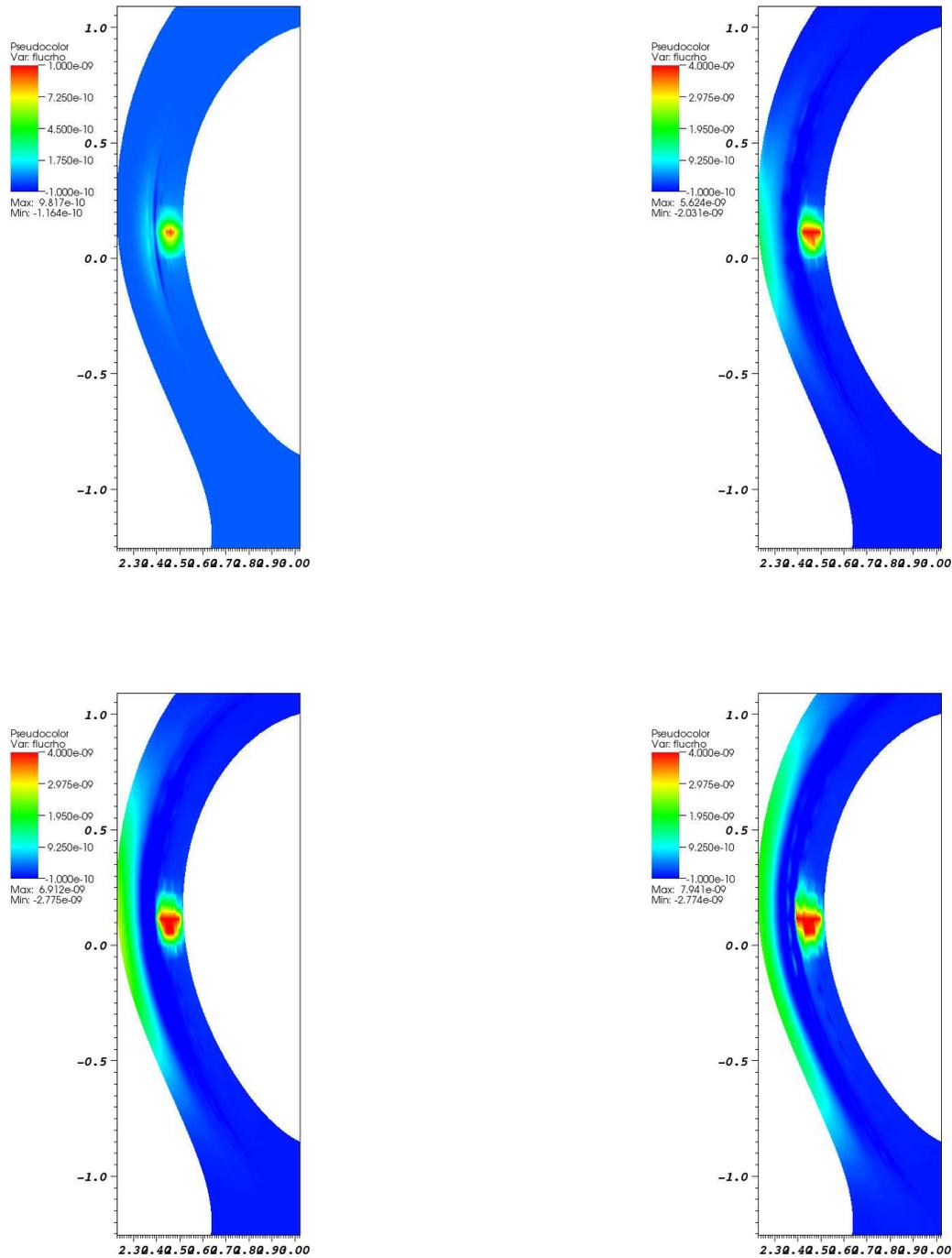


FIGURE 5.31 – Pellet d’amplitude plus importante, vitesse à l’équilibre. De haut en bas et de gauche à droite : fluctuation de densité à $t = 0.01, 0.3, 0.42, 0.57$.

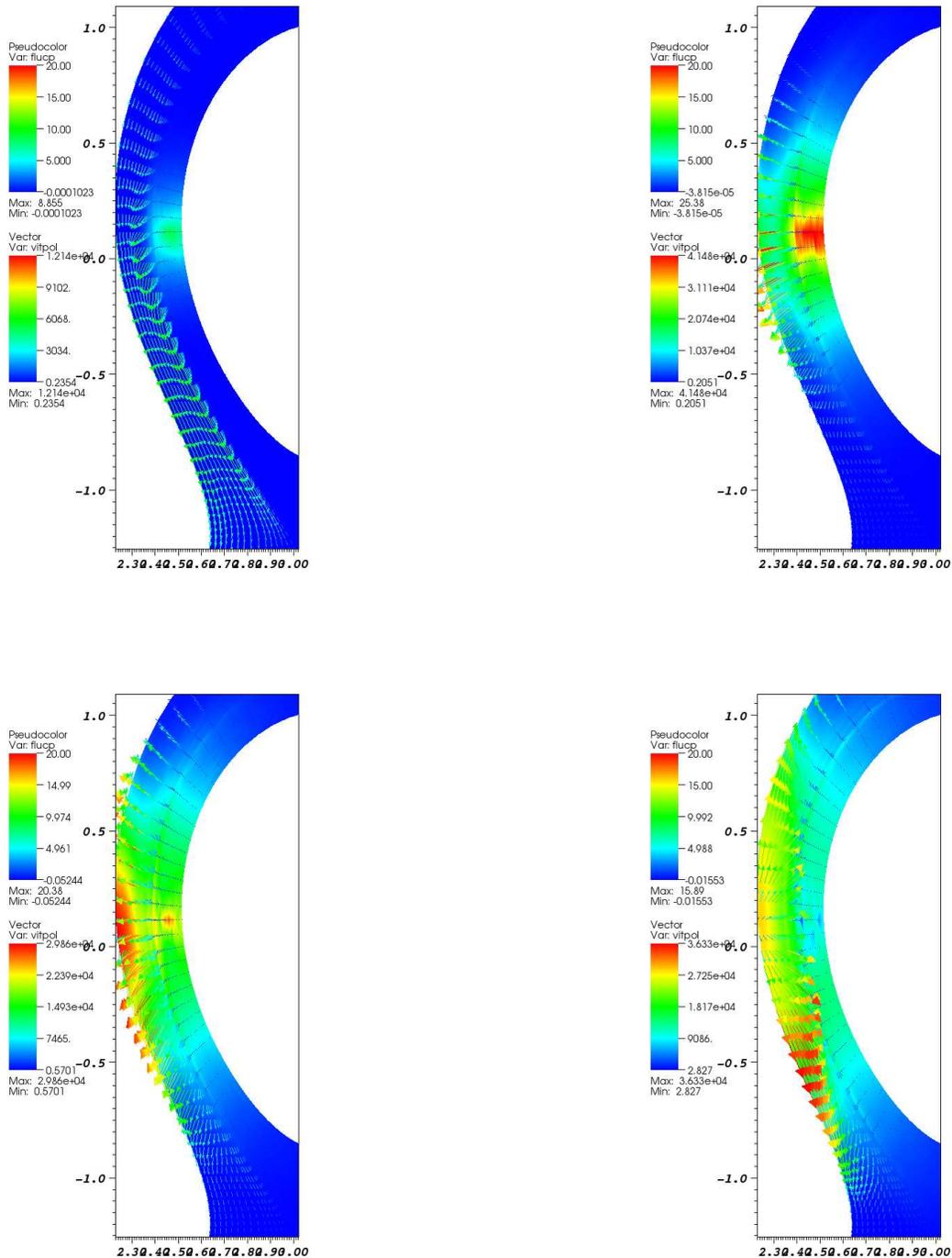


FIGURE 5.32 – Pellet d’amplitude plus importante, vitesse à l’équilibre. De haut en bas et de gauche à droite : fluctuation de pression et vecteurs de vitesse poloidale à $t = 0.01, 0.3, 0.42, 0.57$.

Maillage raffiné localement

L'un des avantages de la méthode volumes finis telle qu'implémenter dans FluidBox-PlaTo est d'être utilisable sur des maillages non-structurés. Ainsi, le maillage aligné sur les lignes de champ magnétique utilisé précédemment a pu être raffiné localement à l'endroit de l'injection de pellets. Les conditions initiales sont les mêmes que précédemment. Ce raffinement et l'interpolation de la condition initiale ont été respectivement obtenus par les logiciels mmg2d et mshint [16]. Ce maillage raffiné est donné fig. 5.33 et comporte 5358 points et 10359 triangles.

Le terme source modélisant l'injection de pellet reste analogue aux tests précédents :

$$m(t, \rho) = \frac{\rho}{C} \exp\left(-\frac{(t - 0.3)^2}{2(0.15)^2}\right) \exp\left(-\frac{(x - 2.44)^2 + (y - 0.1)^2}{2(0.02)^2}\right) \quad (5.11)$$

avec $C = 10^4$.

Comme précédemment, les calculs ont été menés en géométrie axisymétrique avec une méthode volumes finis, couplée à un solveur de Riemann de type HLLC. Le schéma est d'ordre 1 en espace et explicite en temps de type RK4. Ici, le temps de calcul est de 12 minutes pour 4500 itérations ($t_{final} = 1.03$).

La fig. 5.34 présente la fluctuation de densité à différents temps. La première visualisation montre le début de l'injection du pellet. Avec ce maillage raffiné localement, la gaussienne modélisant le terme source est mieux définie par rapport au maillage aligné sur les lignes de champ. Ensuite, le maximum de fluctuation de densité se déplace en direction du bord du plasma, en traversant la séparatrice. Une zone de sous densité apparaît au niveau de la séparatrice alors que la matière injectée se trouvant dans le bord se propage, advectée par la vitesse de la SOL.

Les fluctuations de pression sont montrées figure 5.35. Comme pour la densité, la fluctuation de pression apparaît au niveau de l'injection de pellet. Mais au cours de la simulation, cette surpression se propage dans le reste de la géométrie. En effet, elle traverse notamment la séparatrice en direction de la SOL. Cette évolution de la surpression nous confirme que la matière injectée par pellet se propage bien dans le système et en particulier dans le coeur, comme souhaité.

La figure 5.36 donne l'évolution de la fluctuation de la norme de la vitesse et des composantes poloïdales du vecteur vitesse. Au début de la simulation, le maximum de fluctuation de vitesse apparaît à l'endroit de l'injection et traverse ensuite la séparatrice pour atteindre la SOL, où les vitesses sont plus importantes. Remarquons que la direction des vecteurs vitesses est peu impactée par cette injection de matière.

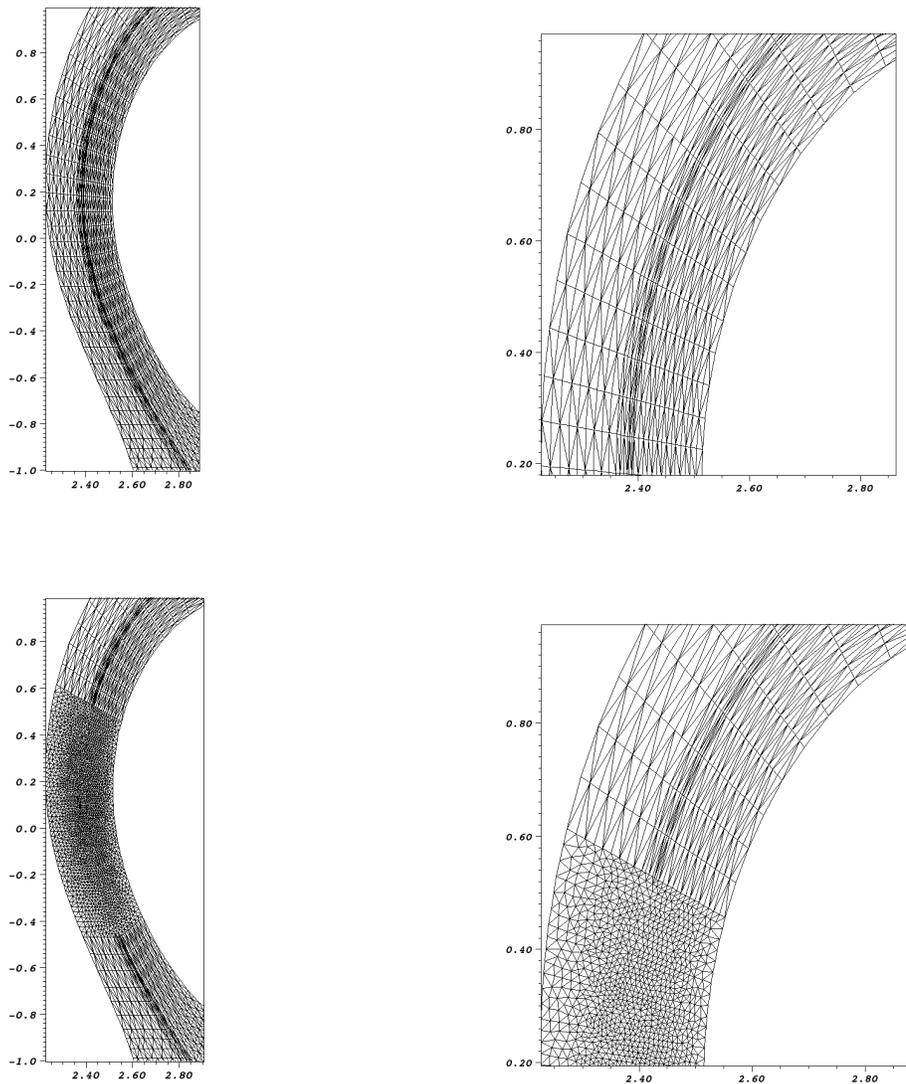


FIGURE 5.33 – **Maillages pour la vitesse à l'équilibre.** Haut : Zooms du maillage aligné classique, 3564 points et 6834 triangles. Bas : Zooms du maillage raffiné localement, 5358 points et 10359 triangles.

Au final, on peut remarquer que la dynamique générale après l'injection de pellet obtenue sur ce maillage raffiné localement est semblable à celle du maillage aligné. En effet, le confinement global du plasma semble être peu impacté par cette perturbation.

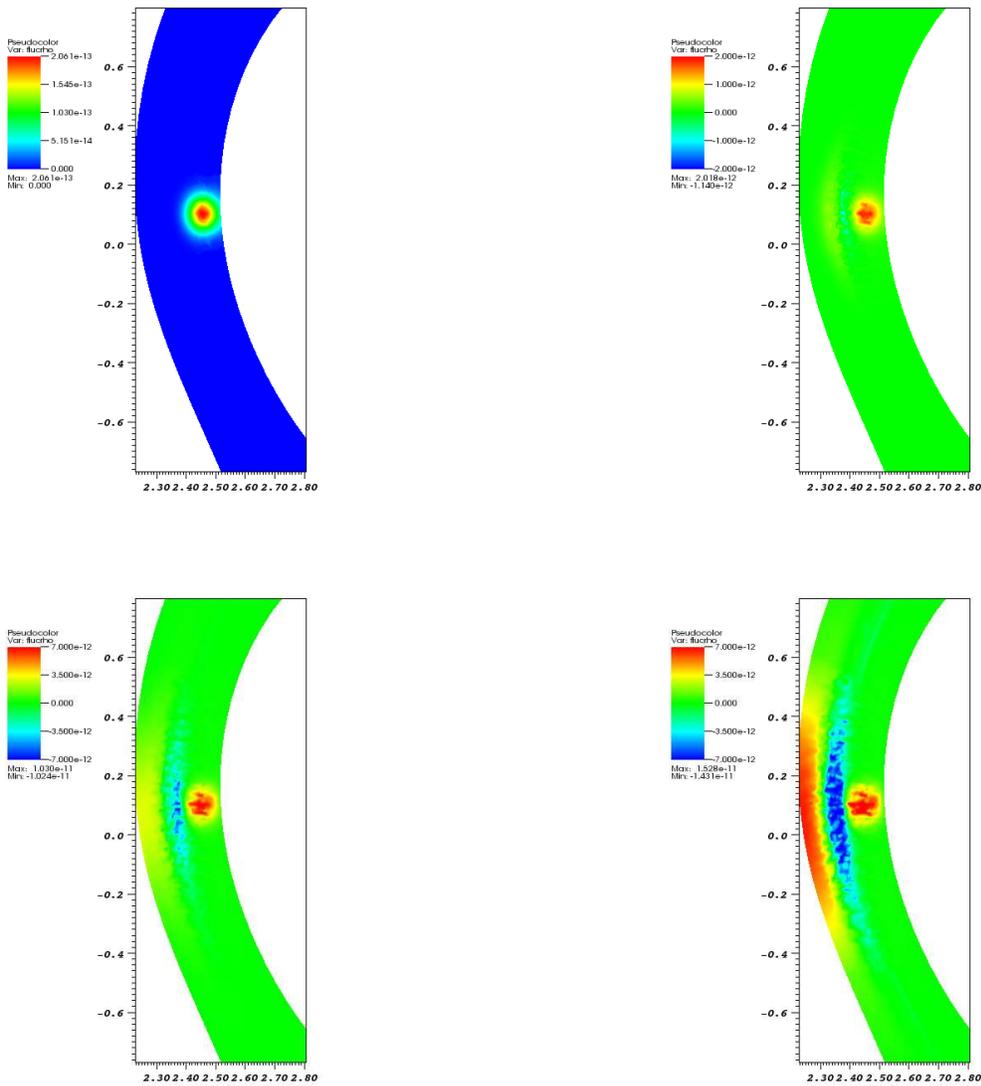


FIGURE 5.34 – Pellet, maillage raffiné localement. De haut en bas et de gauche à droite : fluctuation de densité à $t = 0.02, 0.14, 0.34, 0.50$.

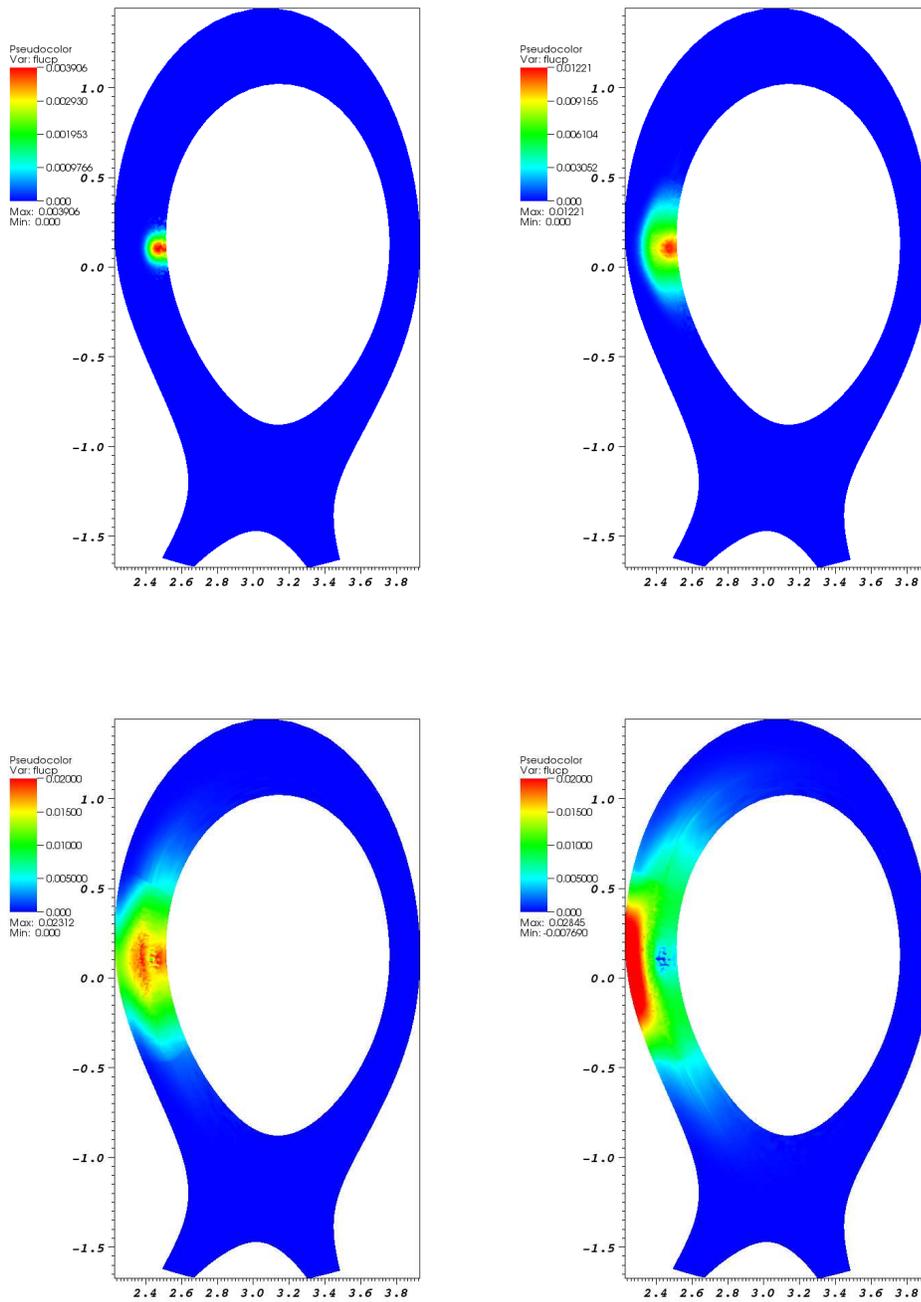


FIGURE 5.35 – Pellet, maillage raffiné localement. De haut en bas et de gauche à droite : fluctuation de la pression à $t = 0.02, 0.14, 0.34, 0.50$.

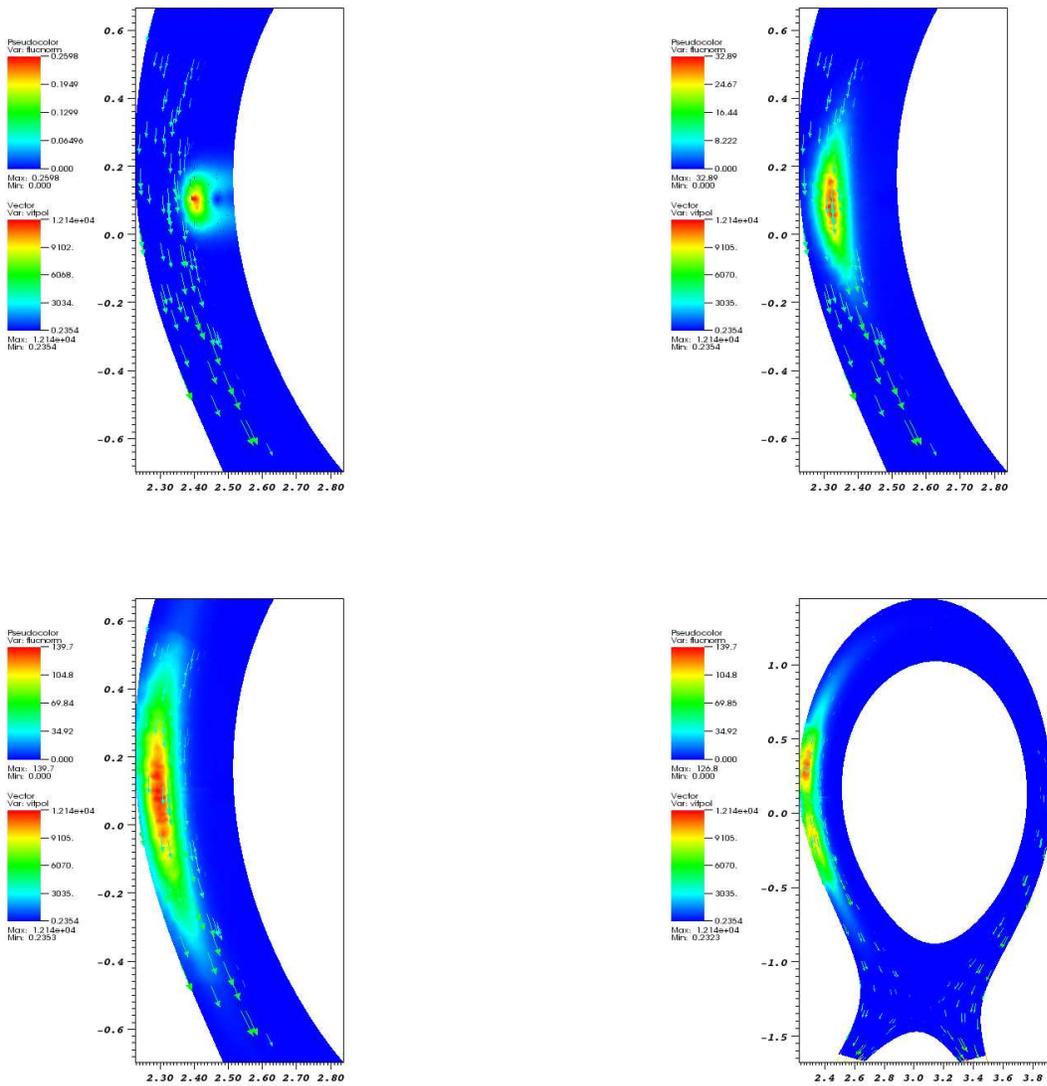


FIGURE 5.36 – Pellet, maillage raffiné localement. De haut en bas et de gauche à droite : fluctuation de la norme de la vitesse et vecteurs de vitesse poloidale à $t = 0.02, 0.14, 0.34, 0.50$.

Conclusion

Dans le cadre de la Fusion par Confinement Magnétique, la production d'énergie nécessite de confiner le plasma dans des chambres toriques, les tokamaks, afin de favoriser les réactions Deutérium-Tritium. L'essentiel des réactions se produisent dans le coeur du plasma. Toutefois, le bord du plasma joue aussi un rôle important. En effet, le contact plasma-paroi peut engendrer l'apparition d'impuretés dans le reste du tokamak et ainsi limiter les performances de la machine. Les interactions plasma-paroi doivent donc être optimisées afin de préserver le confinement et d'éviter la détérioration des composants solides. Par ailleurs, afin de prolonger la production d'énergie, il est nécessaire d'envisager des méthodes qui permettent la réalimentation du plasma et qui doivent passer par le bord du tokamak. Ce travail a ainsi porté sur la simulation du plasma de bord dans les tokamaks.

Dans une première section, le modèle fluide sur lequel s'appuie le travail a été présenté. Différentes approches de modélisation du plasma peuvent être utilisées : descriptions microscopique, cinétique ou encore fluide. La première est trop coûteuse pour des simulations numériques. Les approches cinétique et fluide dérivent de cette description particulière. Le choix de la méthode utilisée dépend donc des phénomènes à observer ou encore de la zone du tokamak étudiée. L'utilisation d'une méthode fluide est appropriée dans le cas du plasma de bord, où les collisions sont importantes.

Cette approche fluide dérive de l'équation de Boltzmann et est couplée avec les relations de fermeture de Braginskii. Ainsi, les termes de diffusion et de viscosité ne présentent pas les formes usuelles de la mécanique des fluides mais se caractérisent par une forte anisotropie suivant les lignes de champ magnétique. Toutefois, des évaluations numériques des coefficients montrent des diffusions et des viscosités importantes pour des températures de l'ordre de 100eV, ce qui pose alors le problème de la pertinence de ces relations de fermeture dans ces conditions.

Dans la section 2, des simulations numériques ont été menées afin d'étudier les effets d'anisotropie de la diffusion suivant les lignes de champ magnétique. Un problème modèle, portant sur une équation de chaleur présentant une densité de flux thermique non-linéaire en température et fortement anisotrope suivant \mathbf{B} , a été considéré avec une méthode d'éléments finis P_1 . Les résultats obtenus ont notamment été comparés à des résultats éléments spectraux. De façon évidente, les éléments finis P_1 entraînent une diffusion numérique im-

portante par rapport à la méthode SEM. Toutefois, l'utilisation de maillages alignés sur les lignes de champ permettent de limiter cette diffusion.

Un problème de rayonnement avec diffusion non-linéaire et anisotrope a ensuite été étudié sur des géométries circulaire et de type ITER. Ce rayonnement est modélisé par un terme puits de chaleur non-linéaire. Les simulations ont montré que suivant les rayonnements étudiés, ceux-ci peuvent avoir un impact sur le coeur du plasma et par conséquent sur le confinement. C'est le cas en particulier pour un anneau radiatif. Au contraire, un rayonnement plus localisé (comme dans le cas du spot) disparaît naturellement sans impacter le coeur.

La section 3 a présenté le modèle utilisé dans la suite du travail : un modèle de type Navier-Stokes avec terme de forçage stationnaire. Ce modèle est approximé par une méthode volumes-éléments finis. Le terme de forçage permet d'assurer le confinement du plasma dans le tokamak. Une première difficulté ici est de d'évaluer ce terme, en l'absence d'information sur le courant : plusieurs méthodes ont été proposées et les résultats correspondants ont été donnés section 5. A l'équilibre, ce terme de forçage est égal au gradient de pression. Ainsi, une première méthode consiste à approximer celui-ci sous la forme d'un terme source. Cependant, cette méthode ne s'est pas avérée concluante, les simulations numériques présentant un déséquilibre artificiel, provoqué par la différence de discrétisation entre le gradient de pression inclu dans le solveur de Riemann et celui calculé par terme source. L'implémentation d'un nouveau solveur de Riemann incluant le terme de forçage a ensuite été proposée, en utilisant un schéma de relaxation. Toutefois, même si les simulations paraissent concluantes en géométrie plane, le passage à la géométrie axisymétrique provoque de nouveau un déséquilibre numérique du confinement à l'endroit du point X. La dernière méthode consiste à évaluer numériquement le flux correspondant à ce terme de forçage. Ce dernier procédé a l'avantage de permettre une réalimentation globale du plasma, équivalente à la perte de matière qui s'échappe par les limiteurs ou les plaques de neutralisation.

Une deuxième difficulté ici est la modélisation des conditions de Bohm pour imposer la sortie des particules à la vitesse sonique, voire supersonique aux limiteurs ou aux plaques de neutralisation, suivant la configuration considérée. L'idée retenue est d'imposer un flux, sur les points du bord concerné, dépendant de la vitesse du son et des vitesses des points voisins afin d'imposer un nombre de Mach : $M \geq 1$. Des conditions aux limites glissantes sont utilisées pour le reste de la géométrie (parois et coeur du plasma).

Une étude a été menée pour la modélisation volumes finis dans une géométrie cylindrique dans la section 4. La difficulté ici est de discrétiser les termes de courbure, propres à ce système de coordonnées, qui apparaissent dans les équations vectorielles. Usuellement, la méthode est de projeter l'équation vectorielle et ensuite d'intégrer chacun des termes. Le caractère conservatif de l'équation est alors perdu, les termes de courbure étant considérés comme des termes sources. La seconde approche proposée ici consiste à considérer comme volume élémentaire, la cellule engendrée par la rotation autour de l'axe du tokamak d'une

cellule bidimensionnelle. Ainsi, l'équation vectorielle conservative est intégrée sur ce volume 3D. Les termes propres à la géométrie cylindrique apparaissent alors naturellement lors de l'étape de la projection. Une application à la géométrie axisymétrique a été effectuée et des simulations sur un cas test ont montré que les deux méthodes étaient équivalentes, en géométrie axisymétrique.

La dernière section décrit les différentes simulations qui ont été menées. Des systèmes de types Euler, Navier-Stokes et Braginskii ont d'abord été considérés. Les résultats obtenus par la méthode volumes-éléments finis ont été comparés avec une méthode d'éléments spectraux, sur une géométrie de type Tore-Supra. Ces simulations montrent que les viscosités usuelle et de type Braginskii conduisent à des dynamiques générales similaires bien que les résultats présentent tout de même quelques différences.

Enfin, des simulations sur les injections de pellets ont été conduites. En effet, afin de prolonger la production d'énergie, il est nécessaire de réalimenter le plasma en matière. L'un des procédés consiste à injecter à grandes vitesses des glaçons de Deutérium-Tritium, la couche externe disparaissant dans le bord du plasma et permettant ainsi à la matière d'atteindre le coeur. Cette injection est modélisée par un terme source de matière localisé. Cette perturbation se traduit par des fluctuations de densité et de pression qui apparaissent à l'endroit de l'injection mais qui se propagent ensuite dans le système, traversant notamment la séparatrice. La matière injectée semble alors bien réalimenter le système.

Le modèle fluide utilisé ici pour simuler le plasma de bord du tokamak a été simplifié. Du point de vue de la modélisation, l'étape suivante serait de prendre en compte une équation sur le courant, permettant ainsi de calculer explicitement le terme de forçage à chaque instant. La configuration en point X pose aussi une difficulté géométrique car différentes zones sont limitrophes à cet endroit : la zone privée, les bords côtés à champs faible et fort et le coeur du plasma, provoquant des gradients intenses qui peuvent s'avérer délicats à traiter numériquement. Les simulations numériques ont été menées sur la base du logiciel FluidBox-PlaTo en mode séquentiel. Du point de vue de l'implémentation numérique, ce code possédant l'architecture pour une parallélisation des calculs, l'étape suivante serait de paralléliser les développements qui ont été menés.

Annexe A

Formulaire

Les formules de certains coefficients utiles en physique des plasmas sont données dans cette annexe. La grande majorité de ces expressions est tirée du formulaire NRL [40]. Par ailleurs, cette annexe rappelle aussi quelques identités vectorielles utilisées dans le cadre de cette thèse.

A.1 Quelques formules de coefficients

	SI	CGS
Masse	kg	g
Energie	J	erg
Temps	s	s
Densité	m^{-3}	cm^{-3}
Charge	C	statC
Champ magnétique	T	G

TABLE A.1 – Unités des systèmes SI et CGS

Les principales unités dans les systèmes SI et CGS sont données par le tableau A.1. Le tableau A.2 donne quelques constantes usuelles en unités SI et CGS. Par ailleurs, usuellement en physique des plasmas, on exprime la température en eV . Les principaux facteurs de conversion sont les suivants :

- $\text{Energie}[J].10^7 = \text{Energie}[\text{erg}]$
- $q[C].3.10^9 = q[\text{statC}]$
- $B[T].10^4 = B[G]$
- $n[cm^{-3}].10^6 = n[m^{-3}]$

– $T[\text{eV}] \cdot 11604 = T[\text{K}]$

	SI	CGS
Constante de Boltzmann k	$1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$	$1,60 \cdot 10^{-12} \text{ erg/eV}$
Charge élémentaire e	$1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$4,8032 \cdot 10^{-10} \text{ StatC}$
Vitesse de la lumière c	$2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	$2,9979 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$
Masse de l'électron m_e	$9,1094 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	$9,1094 \cdot 10^{-28} \text{ g}$
Masse du proton m_p	$1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	$1,6726 \cdot 10^{-24} \text{ g}$

TABLE A.2 – Constantes usuelles en unités SI et CGS

En utilisant les facteurs de conversion précédents et les constantes données dans le tableau A.2, certaines grandeurs caractéristiques des plasmas sont données ici, en unités CGS et SI (λ est le logarithme de Coulomb dont la valeur sera prise à 15 pour les calculs) :

– le temps de collision, temps moyen entre deux collisions pour une particule donnée :

$$\begin{aligned} \tau_i &= \frac{3\sqrt{m_i}(kT_i)^{3/2}}{4\sqrt{\pi}\lambda n_i e^4} \text{ en unités CGS, } T \text{ en eV et } k \text{ en erg/eV;} \\ &= 1,39 \cdot 10^6 \frac{T_i^{3/2}}{n_i} \text{ s avec } n_i \text{ en unités CGS, } T_i \text{ en eV;} \\ &= 1,11 \cdot 10^6 \frac{T_i^{3/2}}{n_i} \text{ s avec } n_i \text{ et } T_i \text{ en unités SI;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_e &= \frac{3\sqrt{m_e}(kT_e)^{3/2}}{4\sqrt{2\pi}\lambda n_e e^4} \text{ en unités CGS, } T \text{ en eV et } k \text{ en erg/eV;} \\ &= 2,29 \cdot 10^4 \frac{T_e^{3/2}}{n_e} \text{ s avec } n_e \text{ en unités CGS, } T_e \text{ en eV;} \\ &= 1,83 \cdot 10^4 \frac{T_e^{3/2}}{n_e} \text{ s avec } n_e \text{ et } T_e \text{ en unités SI;} \end{aligned}$$

– la pulsation cyclotronique*, le nombre de rotations par seconde d'une particule autour d'une ligne de champ :

$$\begin{aligned} \omega_{c,i} &= \frac{BZe}{m_i c} \text{ en unités CGS;} \\ &= 9,58 \cdot 10^3 BZ \text{ rad/s, avec } B \text{ en unités CGS;} \\ &= 9,58 \cdot 10^7 BZ \text{ rad/s, avec } B \text{ en unités SI;} \end{aligned}$$

*. La fréquence est obtenue facilement à partir de la pulsation : $f = \omega/2\pi$.

$$\begin{aligned}\omega_{c,e} &= \frac{Be}{m_e c} \text{ en unités CGS;} \\ &= 1,76 \cdot 10^7 B \text{ rad/s, avec } B \text{ en unités CGS;} \\ &= 1,76 \cdot 10^{11} B \text{ rad/s, avec } B \text{ en unités SI;} \end{aligned}$$

– la pulsation plasma *, pulsation caractéristique des ondes du plasma :

$$\begin{aligned}\omega_{p,i} &= \sqrt{\frac{4\pi n_i Z^2 e^2}{m_i}} \text{ rad/sec, en unités CGS;} \\ &= 1,32 \cdot 10^3 Z \sqrt{n_i} \text{ rad/sec, avec } n_i \text{ en unités CGS;} \\ &= 1,32 Z \sqrt{n_i} \text{ rad/sec, avec } n_i \text{ en unités SI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{p,e} &= \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}} \text{ rad/sec, en unités CGS;} \\ &= 5,64 \cdot 10^4 \sqrt{n_e} \text{ rad/sec, avec } n_e \text{ en unités CGS;} \\ &= 5,64 \cdot 10^1 \sqrt{n_e} \text{ rad/sec, avec } n_e \text{ en unités SI} \end{aligned}$$

– la vitesse thermique :

$$\begin{aligned}v_{T_i} &= \sqrt{\frac{kT_i}{m_i}} \text{ cm/s, en unités CGS;} \\ &= 9,78 \cdot 10^5 \sqrt{T_i} \text{ cm/s, avec } T \text{ en eV;} \\ &= 9,08 \cdot 10^1 \sqrt{T_i} \text{ m/s, avec } T \text{ en unités SI;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_{T_e} &= \sqrt{\frac{kT_e}{m_e}} \text{ cm/s, en unités CGS;} \\ &= 4,19 \cdot 10^7 \sqrt{T_e} \text{ cm/s, avec } T \text{ en eV;} \\ &= 3,89 \cdot 10^3 \sqrt{T_e} \text{ m/s, avec } T \text{ en unités SI;} \end{aligned}$$

– la longueur de Debye :

$$\begin{aligned}\lambda_D &= \sqrt{\frac{kT}{4\pi n e^2}} \text{ cm, en unités CGS;} \\ &= 7,43 \cdot 10^2 \sqrt{\frac{T}{n}} \text{ cm, avec } T \text{ et } n \text{ en unités CGS;} \\ &= 6,90 \cdot 10^1 \sqrt{\frac{T}{n}} \text{ m, avec } T \text{ et } n \text{ en unités SI;} \end{aligned}$$

– le rayon de Larmor ou gyroradius, amplitude du mouvement de la particule dans le plan transverse aux lignes de champ magnétique :

$$\begin{aligned}r_{L,i} &= \frac{v_{T_i}}{\omega_{c,i}} \text{ cm, en unités CGS;} \\ &= 1,02 \cdot 10^2 \frac{\sqrt{T_i}}{ZB} \text{ cm, avec } T \text{ et } B \text{ en unités CGS;} \\ &= 9,47 \cdot 10^{-7} \frac{\sqrt{T_i}}{ZB} \text{ m, avec } T \text{ et } B \text{ en unités SI;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{L,e} &= \frac{v_{T_e}}{\omega_{c,e}} \text{ cm, en unités CGS;} \\
&= 2,38 \frac{\sqrt{T_e}}{B} \text{ cm, avec } T \text{ et } B \text{ en unités CGS;} \\
&= 2,21 \cdot 10^{-8} \frac{\sqrt{T_e}}{B} \text{ m, avec } T \text{ et } B \text{ en unités SI;}
\end{aligned}$$

Le tableau A.3 présente les ordres de grandeur obtenus pour ces différentes formules pour des valeurs caractéristiques du bord et du coeur du plasma. Notons que les valeurs du coeur sont celles utilisées par Freidberg dans [21] et les formules précédentes permettent d'obtenir des valeurs similaires à [21].

	bord du plasma	coeur du plasma
Température en K	$5,80 \cdot 10^5$	$2,3208 \cdot 10^7$
Densité en m^{-3}	10^{19}	$2 \cdot 10^{20}$
B en T	5	5
τ_i en s	$4,90 \cdot 10^{-5}$	$6,20 \cdot 10^{-4}$
τ_e en s	$8,08 \cdot 10^{-7}$	$1,02 \cdot 10^{-5}$
$f_{c,i}$ en s	$1,31 \cdot 10^{-8}$	$1,31 \cdot 10^{-8}$
$f_{c,e}$ en s	$7,14 \cdot 10^{-12}$	$7,14 \cdot 10^{-12}$
$f_{p,i}$ en s	$1,51 \cdot 10^{-9}$	$3,36 \cdot 10^{-10}$
$f_{p,e}$ en s	$3,53 \cdot 10^{-11}$	$7,87 \cdot 10^{-12}$
λ_D en m	$1,66 \cdot 10^{-5}$	$2,35 \cdot 10^{-5}$
$r_{L,i}$ en m	$1,44 \cdot 10^{-4}$	$9,12 \cdot 10^{-4}$
$r_{L,e}$ en m	$3,36 \cdot 10^{-6}$	$2,13 \cdot 10^{-5}$

TABLE A.3 – Ordres de grandeurs des quantités caractéristiques du plasma.

A.2 Quelques identités vectorielles utiles

Soient f , un scalaire, \mathbf{u} , \mathbf{v} et \mathbf{w} des vecteurs et Π , un tenseur.

- $\nabla \cdot (f\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \mathbf{u}$
- $\nabla \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{v})$
- $\nabla \wedge \nabla \mathbf{u} = 0$
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$
- $\nabla \cdot (f\Pi) = \nabla f \cdot \Pi + f \nabla \cdot \Pi$
- $\nabla \cdot (\mathbf{v}\Pi) = \mathbf{v} \cdot \nabla \Pi + \Pi : \nabla \mathbf{v}$
- $\nabla \cdot \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$

Annexe B

Equations conservatives de la MHD

L'approche proposée par Kominsky [45] pour obtenir les équations conservatives de la MHD est donnée ici. Dans ce but, rappelons le système cinétique (1.43) obtenu pour chacune des espèces s , électron et ion :

$$\begin{aligned}\partial_t \rho_s + \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{u}_s) &= 0 \\ \partial_t \rho_s \mathbf{u}_s + \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{u}_s \mathbf{u}_s + P_s) &= Z_s e n_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{R}_s \\ \partial_t \rho_s e_s + \nabla \cdot (\rho_s e_s \mathbf{u}_s + P_s \cdot \mathbf{u}_s) &= -\nabla \cdot \mathbf{q}_s + Z_s e n_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_s + \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{u}_s + Q_s\end{aligned}\tag{B.1}$$

L'idée est donc de sommer ces équations sur les électrons et sur les ions afin d'obtenir un système mono-fluide. Dans cette annexe, nous nous noterons $\mathbf{u}\mathbf{v}$, le produit tensoriel.

B.1 Equation de continuité

Définissons dans un premier temps, la masse volumique et la quantité de mouvement totales :

$$\rho = \rho_e + \rho_i \text{ et } \rho \mathbf{u} = \rho_e \mathbf{u}_e + \rho_i \mathbf{u}_i.\tag{B.2}$$

De façon évidente, en sommant les équations de continuité du système (B.1) sur chacune des espèces (électron et ion), on obtient facilement :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.\tag{B.3}$$

B.2 Equation du mouvement

De la même façon, les équations sur la quantité de mouvement du système (B.1) sont additionnées :

$$\partial_t \rho \mathbf{u} + \sum_s \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{u}_s \mathbf{u}_s + P_s) = \sum_s Z_s e n_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \wedge \mathbf{B}) + \sum_s \mathbf{R}_s.\tag{B.4}$$

En rappelant que d'après (1.21), $\mathbf{R}_e + \mathbf{R}_i = 0$ et que d'après l'hypothèse de neutralité, $n_e = Zn_i$, cette équation devient alors :

$$\partial_t \rho \mathbf{u} + \sum_s \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{u}_s \mathbf{u}_s + P_s) = \mathbf{J} \wedge \mathbf{B}, \quad (\text{B.5})$$

où le courant \mathbf{J} est donné par : $\mathbf{J} = Zn_i e(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$.

Rappelons la définition du tenseur de pression P_s (1.35) :

$$P_s := \rho_s \langle \mathbf{v}'_s \mathbf{v}'_s \rangle, \quad (\text{B.6})$$

avec la vitesse \mathbf{v} (variable indépendante de l'équation de Boltzmann), décomposée en la vitesse moyenne \mathbf{u}_s , définie en (1.24), et une fluctuation \mathbf{v}'_s telle que $\langle \mathbf{v}'_s \rangle = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{u}_s + \mathbf{v}'_s$.

Une vitesse \mathbf{w}_s va être définie ici par :

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{w}_s + \mathbf{u} \quad (\text{B.7})$$

et nous allons introduire le tenseur de pression global P , sachant que $\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{u}_s + \mathbf{w}_s = \mathbf{v}'_s + \mathbf{w}_s$:

$$\begin{aligned} P &= \sum_s \rho_s \langle (\mathbf{v} - \mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \rangle \\ &= \sum_s \rho_s \langle \mathbf{v}'_s \mathbf{v}'_s \rangle + \sum_s \rho_s \mathbf{w}_s \mathbf{w}_s \\ &= \sum_s P_s + \sum_s \rho_s \mathbf{w}_s \mathbf{w}_s. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Remarquons ensuite, l'égalité suivante qui nous sera utile par la suite :

$$\sum_s \rho_s \mathbf{w}_s = \sum_s \rho_s (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}) = 0, \quad (\text{B.9})$$

d'après la définition de \mathbf{u} , c.f. (B.2).

En utilisant cette dernière égalité (B.9), le terme suivant devient :

$$\begin{aligned} \sum_s \rho_s \mathbf{u}_s \mathbf{u}_s &= \sum_s \rho_s (\mathbf{w}_s + \mathbf{u})(\mathbf{w}_s + \mathbf{u}) \\ &= \sum_s \rho_s \mathbf{w}_s \mathbf{w}_s + \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \sum_s \rho_s \mathbf{w}_s \\ &= \sum_s \rho_s \mathbf{w}_s \mathbf{w}_s + \rho \mathbf{u} \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

En reprenant les résultats (B.8) et (B.10), l'équation globale de quantité de mouvement est obtenue :

$$\partial_t \rho \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + P) = \mathbf{J} \wedge \mathbf{B}. \quad (\text{B.11})$$

B.3 Equation de l'énergie

Un raisonnement similaire peut être effectué concernant les équations d'énergie du système (B.1) :

$$\sum_s \partial_t \rho_s e_s + \sum_s \nabla \cdot (\rho_s e_s \mathbf{u}_s + P_s \cdot \mathbf{u}_s) = - \sum_s \nabla \cdot \mathbf{q}_s + \sum_s Z_s e n_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_s + \sum_s \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{u}_s + \sum_s Q_s \quad (\text{B.12})$$

Dans ce but, dans un premier temps, la pression scalaire globale correspondant au tenseur P , défini en (B.8) est introduite, sachant que $\langle \mathbf{v}'_s \rangle = 0$:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3} \sum_s \rho_s \text{Tr}(\langle (\mathbf{v}'_s + \mathbf{w}_s)(\mathbf{v}'_s + \mathbf{w}_s) \rangle) \\ &= \frac{\gamma - 1}{2} \sum_s \rho_s \langle (\mathbf{v}'_s + \mathbf{w}_s)^2 \rangle \\ &= \sum_s p_s + \frac{\gamma - 1}{2} \sum_s \rho_s \mathbf{w}_s^2. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

En utilisant (B.10) et (B.13), la somme des énergies permet d'introduire l'énergie totale ρe :

$$\begin{aligned} \sum_s \rho_s e_s &= \sum_s \frac{p_s}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \sum_s \rho_s \mathbf{u}_s^2 \\ &= \frac{p}{\gamma - 1} - \frac{1}{2} \sum_s \rho_s \mathbf{w}_s^2 + \frac{1}{2} \sum_s \rho_s \mathbf{w}_s^2 + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 \\ &= \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 \\ &= \rho e \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Nous allons maintenant considérer les autres termes de l'équation (B.12). Pour cela, les énergies $\rho_s e_s$ sont décomposées afin de faire apparaître les énergies internes et cinétiques correspondantes.

Ainsi, d'après (B.13), on obtient pour les énergies internes :

$$\begin{aligned} \sum_s p_s \mathbf{u}_s &= \mathbf{u} \sum_s p_s + \sum_s p_s \mathbf{w}_s \\ &= p \mathbf{u} - \mathbf{u} \frac{\gamma - 1}{2} \sum_s \rho_s \mathbf{w}_s^2 + \sum_s p_s \mathbf{w}_s \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Ensuite, le terme correspondant à l'énergie cinétique peut s'écrire sous la forme suiv-

ante, en s'appuyant sur (B.9) :

$$\begin{aligned} \sum_s \rho_s \mathbf{u}_s^2 \mathbf{u}_s &= \sum_s \rho_s (\mathbf{u}^2 \mathbf{u} + \mathbf{u}^2 \mathbf{w}_s + \mathbf{w}_s^2 \mathbf{u} + \mathbf{w}_s^2 \mathbf{w}_s + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_s) \mathbf{u} + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_s) \mathbf{w}_s) \\ &= \rho \mathbf{u}^2 \mathbf{u} + \sum_s \rho_s \mathbf{w}_s^2 \mathbf{u} + \sum_s \rho_s \mathbf{w}_s^2 \mathbf{w}_s + 2\mathbf{u} \cdot \sum_s \rho_s \mathbf{w}_s \mathbf{w}_s \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

En sommant les résultats (B.15) et (B.16) pour les énergies internes et cinétiques, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_s \rho_s e_s \mathbf{u}_s &= \frac{1}{\gamma - 1} \sum_s p_s \mathbf{u}_s + \frac{1}{2} \sum_s \rho_s \mathbf{u}_s^2 \mathbf{u}_s \\ &= \rho e \mathbf{u} + \frac{1}{\gamma - 1} \sum_s p_s \mathbf{w}_s + \frac{1}{2} \sum_s \rho_s \mathbf{w}_s^2 \mathbf{w}_s + \mathbf{u} \cdot \sum_s \rho_s \mathbf{w}_s \mathbf{w}_s \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Avec (B.8), le terme correspondant au tenseur de pression devient :

$$\sum_s P_s \mathbf{u}_s = \sum_s P_s \mathbf{u} + \sum_s P_s \mathbf{w}_s = P \mathbf{u} - \sum_s \rho_s \mathbf{w}_s \mathbf{w}_s \cdot \mathbf{u} + \sum_s P_s \mathbf{w}_s \quad (\text{B.18})$$

Comme pour le tenseur de pression global (B.8), définissons maintenant le flux de chaleur global :

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \frac{1}{2} \sum_s \rho_s \langle (\mathbf{v}'_s + \mathbf{w}_s)^2 (\mathbf{v}'_s + \mathbf{w}_s) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_s \rho_s (\langle \mathbf{v}'_s{}^2 \mathbf{v}'_s \rangle + \langle \mathbf{v}'_s{}^2 \rangle \mathbf{w}_s + \mathbf{w}_s^2 \langle \mathbf{v}'_s \rangle \\ &\quad + \mathbf{w}_s^2 \mathbf{w}_s + 2 \langle (\mathbf{v}'_s \cdot \mathbf{w}_s) \mathbf{v}'_s \rangle + 2 \langle \mathbf{v}'_s \rangle \cdot \mathbf{w}_s \mathbf{w}_s) \\ &= \sum_s (\mathbf{q}_s + \frac{1}{\gamma - 1} p_s \mathbf{w}_s + \frac{1}{2} \mathbf{w}_s^2 \mathbf{w}_s + \mathbf{w}_s \cdot P_s) \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

d'après la définition (1.40) et avec $\langle \mathbf{v}'_s \rangle = 0$.

En regroupant les formules (B.17), (B.18) et (B.19), on obtient au final :

$$\sum_s (\rho_s e_s \mathbf{u}_s + P_s \mathbf{u}_s + \mathbf{q}_s) = \rho e \mathbf{u} + P \mathbf{u} + \mathbf{q} \quad (\text{B.20})$$

Le terme concernant le champ électrique devient :

$$\sum_s Z_s e n_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_s = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = (\mathbf{J} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} \quad (\text{B.21})$$

car d'après la loi d'Ohm, dans le cas de la MHD idéale : $\mathbf{E} = -\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}$.

Au final, l'équation de l'énergie mono-fluide obtenue est :

$$\partial_t \rho e + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u} + P \cdot \mathbf{u}) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + (\mathbf{J} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} \quad (\text{B.22})$$

sachant que d'après (1.21), $Q_e + Q_i = 0$ et en négligeant $\sum_s \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{u}_s$.

Au final, les équations mono-fluides et conservatives de la MHD sont donc bien retrouvées et correspondent au système étudié dans ce travail :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + P) &= \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} \\ \partial_t \rho e + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u} + P \cdot \mathbf{u}) &= -\nabla \cdot \mathbf{q} + (\mathbf{J} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Annexe C

Finite Volume Method in Curvilinear Coordinates for hyperbolic conservation laws

Abstract

This paper deals with the design of finite volume approximation of hyperbolic conservation laws in curvilinear coordinates. Such coordinates are encountered naturally in many problems as for instance in the analysis of a large number of models coming from magnetic confinement fusion in tokamaks. In this paper we derive a new finite volume method for hyperbolic conservation laws in curvilinear coordinates. The method is first described in a general setting and then is illustrated in 2D polar coordinates. Numerical experiments show its advantages with respect to the use of Cartesian coordinates.

C.1 Introduction

We are concerned with the construction of finite volume methods in curvilinear coordinates for hyperbolic conservation laws. Such schemes are crucial when one is interested in capturing accurately the properties of the physical model under consideration in which coordinates system play an important role. The physical models of interest are for instance those describing charged particles motion in solar winds in the frame of astrophysical plasmas [26] or the transport of charged particles in a tokamak, a Magnetic Fusion Confinement device dedicated to the ignition of controlled thermonuclear fusion reactions on earth [26, 44, 63].

More precisely, in magnetized plasma, there are two distinct behaviours of particles, along and across magnetic field lines. This leads to highly anisotropic flows of the plasma. As a consequence, Cartesian coordinates do not constitute an appropriate system to describe the physics that takes place in the plasma. Instead, other systems of coordinates are preferred, as for instance field aligned coordinates systems [6, 17], Boozer coordinates or Hamada coordinates [36]. The field governing equations written in these generalized

curvilinear systems are generally not in strict conservation laws form : spatially varying metric coefficients multiply the differential terms and additional source terms appear in the equations. Therefore the design of a finite volume method is not as straightforward as it is in Cartesian coordinates and additionally important conservation properties can be lost by the discretisation. Another relevant question that arises in this context concerns the representation of vectors and the choice of the basis in which these vectors are expressed since in curvilinear coordinates, the basis are spatially dependent. For instance, the projection of a vector in the local basis of the corresponding coordinates system introduces source terms coming from the variations of local basis with respect to the variables of the chosen curvilinear coordinates, and the conservation laws form of the equation is therefore lost. From a numerical point of view, finding an appropriate approximation of this kind of terms that keeps the conservation properties of the system of equations remains a challenge, for this purpose it is useful to think about source terms in shallow water systems, or to Coriolis force term in geophysical equations [53].

Our approach consists in constructing the finite volume approximation of the considered equations in general curvilinear coordinates, without any preliminar projection when dealing with vector equations. Averaged quantities are carefully chosen so that the constructed finite volume scheme is capable of capturing the principal characteristics of the physical models. This approach allows to automatically approximate the non-conservative terms in a consistent manner independently of the curvilinear system used.

This paper is organized as follows. In section C.2, prerequisites on curvilinear coordinates are recalled. Finite volume methods in these curvilinear coordinates are designed in section C.3. Numerical tests using two-dimensional cylindrical coordinates as example are then considered in section C.4 in order to illustrate our approach. Finally, conclusion is given in section C.5.

C.2 Geometrical tools

Let us consider a physical model defined on a physical domain $\Omega(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^3$, where each point $M(\mathbf{x})$ of $\Omega(\mathbf{x})$ is localized by its Cartesian coordinates $\mathbf{x} = {}^t(x^1, x^2, x^3)$. Suppose now the physical model under consideration can be easily described in another coordinates systems, so that the physical model can be looked through the domain $\Omega(\boldsymbol{\xi})$, where $\boldsymbol{\xi} = {}^t(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$. The domain $\Omega(\boldsymbol{\xi})$ will be referred to as the computational domain, and the corresponding coordinates system $\boldsymbol{\xi}$ as curvilinear coordinates. Obviously, there exists an one-to-one map $\phi : \boldsymbol{\xi} \mapsto \mathbf{x}$, which is assumed to be at least a \mathcal{C}^1 -diffeomorphism,

which means that J the determinant of the Jacobian matrix M_J of ϕ defined by

$$M_J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{bmatrix}$$

is positive. To introduce the compact expressions of the gradient and the divergence operators, ∇ , $\nabla \cdot$, with respect to curvilinear coordinates $\boldsymbol{\xi}$ that will be used in this paper, it is useful to define the local covariant basis \mathbf{e}_k associated to the transformation ϕ given by

$$\mathbf{e}_k = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^k} = \frac{\partial x^1}{\partial \xi^k} \mathbf{i} + \frac{\partial x^2}{\partial \xi^k} \mathbf{j} + \frac{\partial x^3}{\partial \xi^k} \mathbf{k},$$

where $k = 1, 2, 3$, and \mathbf{i} , \mathbf{j} and \mathbf{k} are vectors of the canonical basis corresponding to the Cartesian coordinates system. The contravariant basis \mathbf{e}^k associated to \mathbf{e}_k is provided through the relations

$$\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^k,$$

where δ_j^k is the Krönecker tensor.

With these quantities, the gradient of the vector field $\mathbf{V}(\boldsymbol{\xi})$ is given by

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi^k} \otimes \mathbf{e}^k = \left(\frac{\partial V^i}{\partial \xi^k} + V^m \Gamma_{mk}^i \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^k.$$

(The Einstein summation convention is assumed through this paper.) Here Γ_{mk}^i are the Christoffel symbols given by

$$\frac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial \xi^k} = \Gamma_{mk}^i \mathbf{e}_i,$$

and represent the projection onto \mathbf{e}_i of the change of the vector \mathbf{e}_m according to ξ^k . The divergence of the vector field $\mathbf{V}(\boldsymbol{\xi})$ is defined as the contraction of the gradient

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi^k} \cdot \mathbf{e}^k = \left(\frac{\partial V^i}{\partial \xi^k} + V^m \Gamma_{mk}^i \right) \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k = \frac{\partial V^k}{\partial \xi^k} + V^k \Gamma_{ki}^i. \quad (\text{C.1})$$

By using the identity $\frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \xi^k} = \Gamma_{ki}^i$, one gets the compact expression

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{J} \frac{\partial (J \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}^k)}{\partial \xi^k}.$$

Considering a tensor field \mathbf{T} , its gradient is given by

$$\nabla \mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \xi^k} \otimes \mathbf{e}^k.$$

The above relation can be expanded as follows

$$\nabla \mathbf{T} = \left(\frac{\partial \mathbf{T}^{ij}}{\partial \xi^k} + \mathbf{T}^{mj} \Gamma_{mk}^i + \mathbf{T}^{im} \Gamma_{mk}^j \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^k. \quad (\text{C.2})$$

The divergence of the tensor field \mathbf{T} is given by

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \xi^k} \cdot \mathbf{e}^k.$$

Using relation (C.2) this leads to

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^k} (J \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^k).$$

We are now ready to design a finite volume methods in curvilinear coordinates for hyperbolic conservation laws.

C.3 Construction of finite volume schemes in curvilinear coordinates

Let us consider a general hyperbolic conservation law equations written in a coordinate free manner as

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{W}) = 0,$$

where \mathbf{W} is the state variable and $\mathbf{F}(\mathbf{W})$ is its flux.

Let us also consider a curvilinear transformation $\phi : \boldsymbol{\xi} \mapsto \mathbf{x}$, whose determinant of Jacobian is J . Using the results of the previous section and noting that $\partial_t J = 0$, it can be seen that in this coordinates system, the above equation becomes

$$\frac{\partial J \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(J \mathbf{F}(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{e}^k \right) = 0.$$

In order to see the contour of the problem, we will study separately the construction of finite volume method into two different cases. The first one deals with the scalar case, that is the state variable \mathbf{W} is a scalar and its flux $\mathbf{F}(\mathbf{W})$ is a vector. In a second step, we will consider the case where \mathbf{W} is a vector while its flux $\mathbf{F}(\mathbf{W})$ is a tensor.

C.3.1 Scalar equation

This corresponds to take $\mathbf{W} = S$ a scalar and $\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{V}$ a vector, then the hyperbolic equation becomes

$$\frac{\partial (J S)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(J \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}^k \right) = 0. \quad (\text{C.3})$$

Typical examples for instance are the equations of continuity and energy in fluid dynamics.

According to the finite volume philosophy, the discrete equations are simply obtained by integrating (C.3) on a control cell. To be more precise, let us consider a subdivision of the computational domain $\Omega(\xi)$ into control volumes $(\Omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Then integrating equation (C.3) over a cell Ω_i and dividing the result by the volume $|\Omega_i|$, one gets

$$\frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \frac{\partial(JS)}{\partial t} d\Omega + \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(J\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}^k \right) d\Omega = 0,$$

which can be rewritten as

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} JS d\Omega \right) + \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(J\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}^k \right) d\Omega = 0.$$

Introducing the average $S_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} JS d\Omega$ yields,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(S_i \right) + \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(J\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}^k \right) d\Omega = 0.$$

The flux term is also immediately tractable, since by the divergence theorem, one has

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(J\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}^k \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega_i} JV_k (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}^k) d\sigma(\Omega), \quad (\text{C.4})$$

where $\partial\Omega_i$ is the boundary of Ω_i , \mathbf{n} is the outward pointing unit vector normal to the surface $\partial\Omega_i$, and $d\sigma(\Omega)$ the Lebesgue measure on this surface. The right hand side of (C.4) is immediately calculable as soon as one has numerical fluxes [35, 25, 62]. For this case, it is readily seen that there is no difference between the construction of finite volume method in curvilinear coordinates system and in a Cartesian one.

C.3.2 Vectorial equation

This case deals with $\mathbf{W} = \mathbf{V}$ a vector and $\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{T}$ a tensor, then the hyperbolic equation turns into

$$\frac{\partial(J\mathbf{V})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(J\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^k \right) = 0. \quad (\text{C.5})$$

Momentum equation in fluid dynamics is such a kind of equations.

By using the same procedure as in scalar case, one gets the following discrete scheme,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} J\mathbf{V} d\Omega \right) + \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(J\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^k \right) d\Omega = 0, \quad (\text{C.6})$$

and at first glance, this case seems similar to the scalar one. However, since \mathbf{V} is a vector, it has to be stored component by component on a given basis. The traditional approach consists in taking the scalar product of equation (C.5) by the basis vectors \mathbf{e}^k (resp. \mathbf{e}_k)

and then to obtain scalar equations for the covariant components of the vector field \mathbf{V}^k (resp. contravariant components \mathbf{V}_k). Then these scalar equations are discretized using the results of section C.3.1. In the sequel, we will designate this method as the projection-integration method. This approach has one important shortcoming : because the basis vectors are spatially dependent, they do not commute with the differential operators and therefore source terms appear in the equations (see equation (C.22) for instance). The approximation of these terms is difficult and moreover it depends on the specific curvilinear system used.

We therefore advocate the use of the following procedure that we will be called the integration-projection method.

First we define an average basis in the cell Ω_i by :

$$\mathbf{e}_{i,k} = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} J \mathbf{e}_k d\Omega,$$

so that one obtains, assuming that $V_{i,k}$ is constant in a cell,

$$\frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} J \mathbf{V} d\Omega = V_{i,k} \mathbf{e}_{i,k}.$$

Here, $\mathbf{e}_{i,k}$ is the k th average vector in the cell Ω_i with respect to the chosen curvilinear coordinates, and by definition $V_{i,k}$ represents the average value of \mathbf{V} along the k th vector according to the corresponding curvilinear coordinates. The discrete finite volume approximation is then defined by

$$\frac{\partial}{\partial t} V_{i,k} + \frac{\mathbf{e}^{i,k}}{|\Omega_i|} \cdot \int_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(J \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^k \right) d\Omega = 0, \quad (\text{C.7})$$

where $(\mathbf{e}^{i,k})_k$ is the contravariant basis associated to $(\mathbf{e}_{i,k})_k$.

This procedure is quite simple and it allows for a general (and implicit) discretisation of the source terms. In the next section we detail it in the case of 2D polar coordinates.

C.4 Application to 2D polar coordinates

The construction of finite volume method proposed in section C.3 is illustrated in 2D polar coordinates.

C.4.1 2D polar coordinates and finite volume method

Let us consider 2D polar coordinates denoted by $(r, \theta) \in (0, +\infty[\times]0, 2\pi)$ related to Cartesian coordinates (x, y) by $(x, y) = \phi(r, \theta)$ as follows,

$$\begin{cases} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta. \end{cases}$$

We consider the usual orthonormal basis $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ of \mathbb{R}^2 , and then the covariant basis associated with the coordinates (r, θ) is given by

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

The determinant associated to the transformation ϕ is $J = r$ while the contravariant basis with respect to $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ is given by

$$\mathbf{e}^r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^\theta = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Working with the covariant vector \mathbf{e}_θ and the contravariant vector \mathbf{e}^θ leads to a scale factor r , it is then appropriate to consider their associated unit vectors,

$$\tilde{\mathbf{e}}_\theta = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta, \quad \tilde{\mathbf{e}}^\theta = r \mathbf{e}^\theta.$$

Then, for instance a vector \mathbf{V} can be written as $\mathbf{V} = V^r \mathbf{e}_r + V^\theta \tilde{\mathbf{e}}_\theta$.

Equipped with these notations, we can write down the expressions of gradient and divergence operators. The gradient of a scalar function S in polar coordinates writes

$$\nabla S = \partial_r S \mathbf{e}^r + \frac{1}{r} \partial_\theta S \tilde{\mathbf{e}}^\theta.$$

Let us write the vector \mathbf{V} as $\mathbf{V} = V^r \mathbf{e}_r + V^\theta \tilde{\mathbf{e}}_\theta$, its divergence is given by

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r} \partial_r (r V^r) + \frac{1}{r} \partial_\theta (r V^\theta) = \partial_r V^r + \frac{1}{r} V^r + \partial_\theta V^\theta.$$

Now, consider a tensor \mathbf{T} decomposed as

$$\mathbf{T} = T^{r,r} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + T^{r,\theta} \mathbf{e}_r \otimes \tilde{\mathbf{e}}_\theta + T^{\theta,r} \tilde{\mathbf{e}}_\theta \otimes \mathbf{e}_r + T^{\theta,\theta} \tilde{\mathbf{e}}_\theta \otimes \tilde{\mathbf{e}}_\theta.$$

The divergence of \mathbf{T} is given by the following formula,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} &= \frac{1}{r} \partial_r (r \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^r) + \frac{1}{r} \partial_\theta (r \mathbf{T} \cdot \tilde{\mathbf{e}}^\theta) \\ &= \frac{1}{r} \partial_r (r T^{r,r} \mathbf{e}_r + r T^{r,\theta} \tilde{\mathbf{e}}_\theta) + \frac{1}{r} \partial_\theta (r T^{\theta,r} \mathbf{e}_r + r T^{\theta,\theta} \tilde{\mathbf{e}}_\theta). \end{aligned}$$

Now, let $\mathbf{V} = V^r \mathbf{e}_r + V^\theta \tilde{\mathbf{e}}_\theta$ be a vector which temporal evolution is governed by,

$$\frac{\partial (J \mathbf{V})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi^k} (J \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^k) = 0, \quad (\text{C.8})$$

where \mathbf{T} is a tensor.

Applying the procedure developed in the previous section, one gets the following scheme,

$$\frac{\partial V_{i,r}}{\partial t} \mathbf{e}_{i,r} + \frac{\partial V_{i,\theta}}{\partial t} \mathbf{e}_{i,\theta} + \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(J \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^k \right) d\Omega = 0, \quad (\text{C.9})$$

where $V_{i,r}$ and $V_{i,\theta}$ are average values of V^r and V^θ , respectively in the cell Ω_i , while $\mathbf{e}_{i,r}$ and $\mathbf{e}_{i,\theta}$ are average vectors in the cell Ω_i ,

$$\mathbf{e}_{i,r} = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} r \mathbf{e}_r d\Omega, \quad \mathbf{e}_{i,\theta} = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} r \tilde{\mathbf{e}}_\theta d\Omega.$$

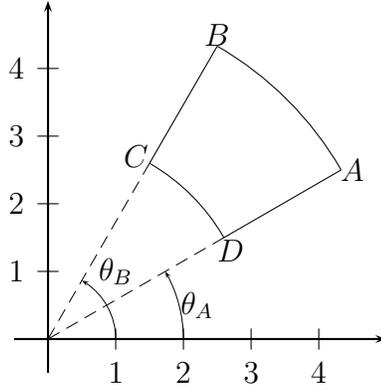


FIG 1: A cell in polar coordinates.

For simplicity, the tensor \mathbf{T} is assumed to be symmetric, *i.e.* $T^{r,\theta} = T^{\theta,r}$. We also chose a tensorial mesh so that the cell Ω_i can be localized by the segments product $[r_D, r_A] \times [\theta_A, \theta_B]$ (see Figure 1). Then the average vectors $\mathbf{e}_{i,r}$ and $\mathbf{e}_{i,\theta}$ can be expressed as

$$\mathbf{e}_{i,r} = \frac{1}{\theta_B - \theta_A} (\tilde{\mathbf{e}}_{\theta_A} - \tilde{\mathbf{e}}_{\theta_B}),$$

$$\mathbf{e}_{i,\theta} = \frac{1}{\theta_B - \theta_A} (\mathbf{e}_{r_B} - \mathbf{e}_{r_A}),$$

where

$$\mathbf{e}_{r_A} = \mathbf{e}_{r_D} = \begin{pmatrix} \cos \theta_A \\ \sin \theta_A \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_{\theta_A} = \tilde{\mathbf{e}}_{\theta_D} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_A \\ \cos \theta_A \end{pmatrix},$$

and

$$\mathbf{e}_{r_B} = \mathbf{e}_{r_C} = \begin{pmatrix} \cos \theta_B \\ \sin \theta_B \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_{\theta_B} = \tilde{\mathbf{e}}_{\theta_C} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_B \\ \cos \theta_B \end{pmatrix}.$$

Finally, for any scalar function $f = f(r, \theta)$, we use the following approximations :

$$\hat{f}_{r_D} \approx f(r_D, \theta), \quad \hat{f}_{r_A} \approx f(r_A, \theta), \quad \forall \theta \in [\theta_A, \theta_B],$$

$$\hat{f}_{\theta_A} \approx f(r, \theta_A), \quad \hat{f}_{\theta_B} \approx f(r, \theta_B), \quad \forall r \in [r_D, r_A].$$

Then equation (C.9) becomes,

$$\begin{aligned}
|\Omega_i| (\partial_t V_{i,r} \mathbf{e}_{i,r} + \partial_t V_{i,\theta} \mathbf{e}_{i,\theta}) + \left(r_A \hat{T}_{|r_A}^{r,r} - r_D \hat{T}_{|r_D}^{r,r} \right) (\mathbf{e}_{\theta_A} - \mathbf{e}_{\theta_B}) \\
+ \left(r_A \hat{T}_{|r_A}^{r,\theta} - r_D \hat{T}_{|r_D}^{r,\theta} \right) \left(\mathbf{e}_{r_B} - \mathbf{e}_{r_A} \right) \\
+ (r_D - r_A) \left(\hat{T}_{|\theta_B}^{r,\theta} \mathbf{e}_{r_B} + \hat{T}_{|\theta_B}^{\theta,\theta} \mathbf{e}_{\theta_B} - \hat{T}_{|\theta_A}^{r,\theta} \mathbf{e}_{r_A} - \hat{T}_{|\theta_A}^{\theta,\theta} \mathbf{e}_{\theta_A} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{C.10}$$

It is interesting to expand equation (C.10) on the pair of orthogonal vectors $\mathbf{e}_{i,r}$ and $\mathbf{e}_{i,\theta}$, which yields

$$\begin{aligned}
|\Omega_i| \partial_t V_{i,r} + (\theta_B - \theta_A) (r_A \hat{T}_{|r_A}^{r,r} - r_D \hat{T}_{|r_D}^{r,r}) \\
+ \frac{\theta_B - \theta_A}{2} \frac{\sin(\theta_B - \theta_A)}{1 - \cos(\theta_B - \theta_A)} (r_A - r_D) (\hat{T}_{|\theta_B}^{r,\theta} - \hat{T}_{|\theta_A}^{r,\theta}) \\
- (\theta_B - \theta_A) (r_A - r_D) \frac{\hat{T}_{|\theta_B}^{\theta,\theta} + \hat{T}_{|\theta_A}^{\theta,\theta}}{2} = 0,
\end{aligned} \tag{C.11}$$

$$\begin{aligned}
|\Omega_i| \partial_t V_{i,\theta} + (\theta_B - \theta_A) (r_A \hat{T}_{|r_A}^{r,\theta} - r_D \hat{T}_{|r_D}^{r,\theta}) \\
+ \frac{\theta_B - \theta_A}{2} \frac{\sin(\theta_B - \theta_A)}{1 - \cos(\theta_B - \theta_A)} (r_A - r_D) (\hat{T}_{|\theta_B}^{\theta,\theta} - \hat{T}_{|\theta_A}^{\theta,\theta}) \\
+ (\theta_B - \theta_A) (r_A - r_D) \frac{\hat{T}_{|\theta_B}^{r,\theta} + \hat{T}_{|\theta_A}^{r,\theta}}{2} = 0.
\end{aligned} \tag{C.12}$$

Equations (C.11)-(C.12) can be considered as results of integration over Ω_i followed by projections onto $\mathbf{e}_{i,r}$ and $\mathbf{e}_{i,\theta}$ of (C.8). This operation is referred to as integration-projection procedure.

It is convenient to compare equations (C.11)-(C.12) with the result of the traditional approach, that is projection-integration procedure applied to (C.8). The projection of (C.8) onto \mathbf{e}_r and \mathbf{e}_θ leads to,

$$\partial_t(r V_r) + \partial_r(r T^{r,r}) + \partial_\theta T^{r,\theta} = T^{\theta,\theta}, \tag{C.13}$$

and

$$\partial_t(r V_\theta) + \partial_r(r T^{r,\theta}) + \partial_\theta T^{\theta,\theta} = -T^{r,\theta}. \tag{C.14}$$

Equations (C.13)-(C.14) are no longer conservative since they own right hand side source terms, the conservative character of the original equation (C.8) is lost during the projection operation. This is due to variations of vectors \mathbf{e}_r and \mathbf{e}_θ with respect to θ . This kind of source terms does not appear if Cartesian coordinates are considered in lieu of polar coordinates.

Now, integrating (C.13)-(C.14) yield,

$$\begin{aligned}
|\Omega_i| \partial_t V_{i,r} + (\theta_B - \theta_A) (r_A \hat{T}_{|r_A}^{r,r} - r_D \hat{T}_{|r_D}^{r,r}) + (r_A - r_D) (\hat{T}_{|\theta_B}^{r,\theta} - \hat{T}_{|\theta_A}^{r,\theta}) \\
= \int_{\Omega_i} T^{\theta,\theta}(r, \theta) dr d\theta,
\end{aligned} \tag{C.15}$$

$$\begin{aligned}
|\Omega_i| \partial_t V_{i,\theta} + (\theta_B - \theta_A) (r_A \hat{T}_{|r_A}^{r,\theta} - r_D \hat{T}_{|r_D}^{r,\theta}) + (r_A - r_D) (\hat{T}_{|\theta_B}^{\theta,\theta} - \hat{T}_{|\theta_A}^{\theta,\theta}) \\
= - \int_{\Omega_i} T^{r,\theta}(r, \theta) dr d\theta.
\end{aligned} \tag{C.16}$$

The comparison of equation (C.11) with (C.15), and (C.12) with (C.16) is summarized in the following result.

Proposition 1 *The integration-projection procedure and projection-integration operation applied to vectorial equation written in 2D polar coordinates are equivalent if and only if the source terms are discretized as follows*

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_i} T^{\theta,\theta}(r, \theta) dr d\theta = (\theta_B - \theta_A) (r_A - r_D) \frac{\hat{T}_{|\theta_B}^{\theta,\theta} + \hat{T}_{|\theta_A}^{\theta,\theta}}{2} \\
+ \left(1 - \frac{\theta_B - \theta_A}{2} \frac{\sin(\theta_B - \theta_A)}{1 - \cos(\theta_B - \theta_A)} \right) (r_A - r_D) (\hat{T}_{|\theta_B}^{r,\theta} - \hat{T}_{|\theta_A}^{r,\theta}),
\end{aligned} \tag{C.17}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_i} T^{r,\theta}(r, \theta) dr d\theta = (\theta_B - \theta_A) (r_A - r_D) \frac{\hat{T}_{|\theta_B}^{r,\theta} + \hat{T}_{|\theta_A}^{r,\theta}}{2} \\
- \left(1 - \frac{\theta_B - \theta_A}{2} \frac{\sin(\theta_B - \theta_A)}{1 - \cos(\theta_B - \theta_A)} \right) (r_A - r_D) (\hat{T}_{|\theta_B}^{\theta,\theta} - \hat{T}_{|\theta_A}^{\theta,\theta}).
\end{aligned}$$

Moreover, this discretisation is consistent both on r and θ .

Note that the discrete version of each source term can be split into a centered (“traditional”) term and a viscous-like term. The expression of this viscous term is new to the best of our knowledge. Note specially that it couples the components of the tensor \mathbf{T} .

C.4.2 Tools for practical implementation

In this section we gather together tools that are important for practical implementation of a part or of the full model system composed of a continuity and momentum equations

$$\begin{cases} \partial_t n + \nabla \cdot (n\mathbf{V}) = 0, \\ \partial_t (n\mathbf{V}) + \nabla \cdot (n\mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + n\mathbf{I}) = 0. \end{cases} \tag{C.18}$$

Here, n is the density per unit mass, \mathbf{V} is the velocity and \mathbf{I} the unit tensor. Both the Cartesian version of system (C.18) and its counterpart in 2D polar coordinates are investigated, and the results obtained by both methods are compared.

The cells of the mesh used in Cartesian coordinates are quadrilaterals while they are curved ones in 2D polar coordinates system. In the two cases, we use the same nodes to construct the mesh, but we emphasize that the cells are different from one coordinates

system to another. In Figure 2 are displayed two such kinds of meshes where the number of radial cells $N_r = 3$ while those of azimuthal ones is $N_\theta = 6$. The radial and azimuthal mesh steps are denoted by Δr and $\Delta\theta$ accordingly, so that for a uniform mesh in azimuthal direction, one has $\Delta\theta = \frac{2\pi}{N_\theta}$.



FIG 2: Cartesian and polar meshes.

In finite volume method implementation, we need to know the value of areas of mesh cells. Consider a generic cell Ω_i in 2D polar coordinates localized by its four nodes A , B , C , and D as in Figure 1, the measure of this area is given by,

$$|\Omega_i|_{r,\theta} = \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta r \Delta\theta. \quad (\text{C.19})$$

If these nodes are used to construct a cell Ω_i in a Cartesian coordinates, the measure of the area of this cell will be

$$|\Omega_i|_{x,y} = \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta r \sin \Delta\theta. \quad (\text{C.20})$$

Now, by taking $\Delta\theta$ small *i.e.* $\Delta\theta \rightarrow 0$ in equation (C.20), one gets

$$|\Omega_i|_{r,\theta} \approx |\Omega_i|_{x,y},$$

which makes obvious the fact that for large N_θ , meshes obtained in Cartesian and 2D polar coordinates systems are approximately equal.

Next, we are interested in evaluating the integral of normal vectors along edges of mesh cells. The tricky one seems to be those corresponding to curved edges as shown in Figure 3. Thanks to the divergence theorem,

$$\oint \mathbf{n} dl = 0,$$

we deduce

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{n} dl = \int_{AB} \mathbf{n} dl,$$

which can be immediately calculated by knowing only the coordinates of the nodes A and B .

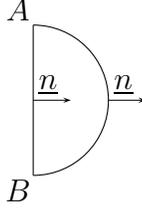


FIG 3: Normals.

We are now concerned with the construction of numerical fluxes for hyperbolic equations written in general curvilinear coordinates in 2D. Assume we have in our hand a numerical flux procedure, consult [35, 25, 62] for more details. The following is a possible algorithm that allows us to construct a numerical flux in general curvilinear coordinates of cells Ω_i and Ω_j :

- Write the vectorial quantities of cells Ω_i and Ω_j according to the orthogonal basis $(\mathbf{n}_{ij}, \boldsymbol{\tau}_{ij})$ of the intercell boundary $\partial\Omega_{ij}$ between the cells Ω_i and Ω_j , (\mathbf{n}_{ij} being the outward pointing unit vector normal to the $\partial\Omega_{ij}$ directed from the cell Ω_i to the cell Ω_j , $\boldsymbol{\tau}_{ij}$ is a unit vector orthogonal to \mathbf{n}_{ij}). Let $\overline{\Omega}_i$ and $\overline{\Omega}_j$ be the results of this step ;
- Compute the flux Φ_{ij} with the states $\overline{\Omega}_i$ and $\overline{\Omega}_j$ with respect to the intercell boundary $\partial\Omega_{ij}$ by using a chosen numerical flux [35, 25, 62] ;
- Project the flux Φ_{ij} onto the cells Ω_i and Ω_j to get fluxes Φ_i and Φ_j respectively, according to

$$\begin{aligned} \Phi_i &= (\Phi_{ij} \cdot \mathbf{e}_{i,r}) \mathbf{e}_{i,r} + (\Phi_{ij} \cdot \mathbf{e}_{i,\theta}) \mathbf{e}_{i,\theta}, \\ \Phi_j &= (\Phi_{ij} \cdot \mathbf{e}_{j,r}) \mathbf{e}_{j,r} + (\Phi_{ij} \cdot \mathbf{e}_{j,\theta}) \mathbf{e}_{j,\theta}, \end{aligned}$$

where $(\mathbf{e}_{i,r}, \mathbf{e}_{i,\theta})$ is the average vector basis in the cell Ω_i , $(\mathbf{e}_{j,r}, \mathbf{e}_{j,\theta})$ is those of the cell Ω_j .

We turn now to numerical tests in 2D polar coordinates in order to validate our approach.

C.4.3 Advection equation test

The first test concerns a scalar advection equation with a constant azimuthal velocity,

$$\partial_t n + \nabla \cdot (n\mathbf{V}) = 0,$$

which in polar coordinates takes the form,

$$\partial_t r n + \partial_r (r n V_r) + \partial_\theta (n V_\theta) = 0.$$

We consider the following initial conditions (Fig. 4) : $\forall (r, \theta) \in \Omega$:

- for the density : $n(r, \theta) = n_0$,
 - for the velocity : $V_r(r, \theta) = 0$ and $V_\theta(r, \theta) = V_0$,
- where n_0 and V_0 are constants. For our test, $n_0 = 1$ and $V_0 = 0.5$.

For the boundary conditions we set a null flux.

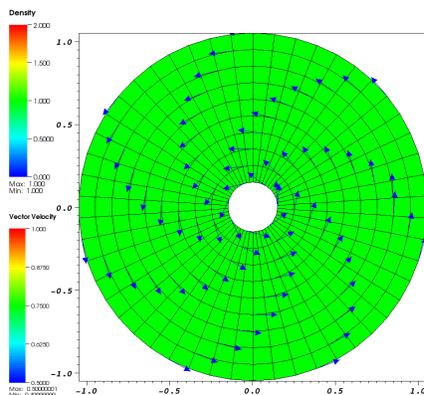


FIG 4: IC with Cartesian mesh.

In this case, we obtain similar results with Cartesian and polar methods : the solutions are preserved as expected. The error in both cases is in the order of machine epsilon. Note that for scalar equation, only the cell areas are different but the flux is the same whence the similar results.

C.4.4 Isothermal Euler system

The following tests concern the isothermal Euler system. Here, we consider a scalar and a vectorial equations. As consequence, as well as the areas, the computation of the fluxes is different.

More precisely, we are interested in the following dimensionless system where the temperature is supposed constant,

$$\begin{cases} \partial_t n + \nabla \cdot (n\mathbf{V}) = 0, \\ \partial_t (n\mathbf{V}) + \nabla \cdot (n\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) + \nabla n = 0. \end{cases} \quad (\text{C.21})$$

We use this system for two test cases. The first one considers a constant density and an azimuthal velocity. With the second one, the Gresho test, we can compare the two methods on a stationary solution.

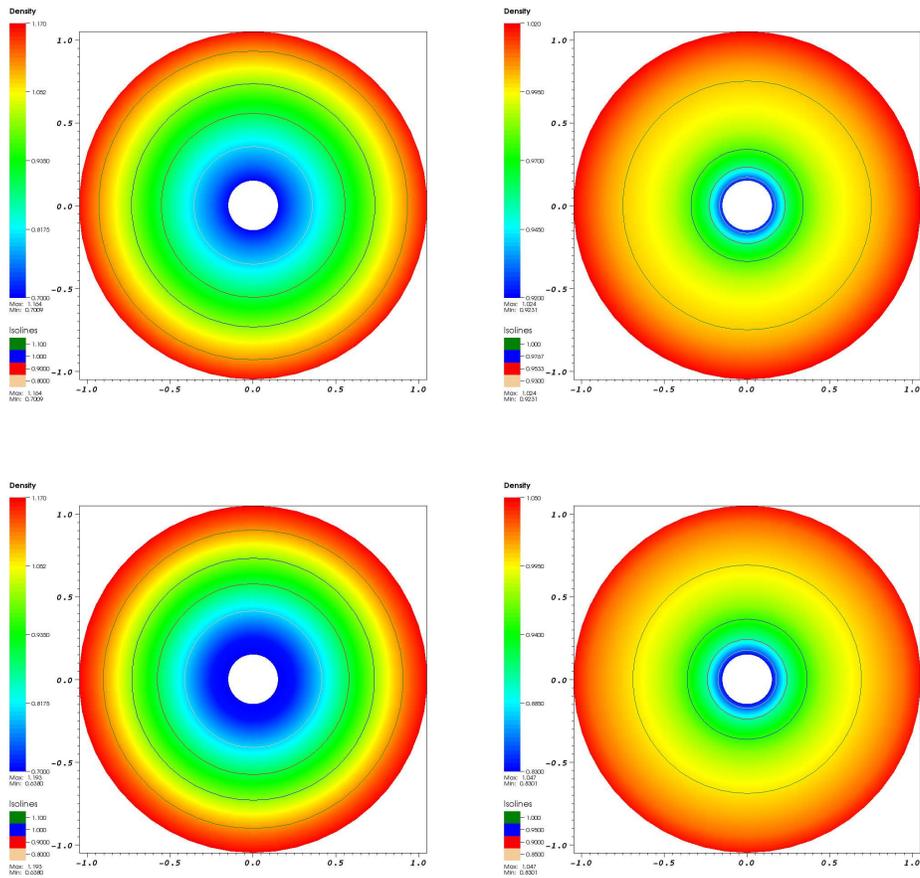


FIG 5: Cartesian results for density at $t = 0.83, 1.69$ on first line ; polar results for density at $t = 0.82, 1.65$ on second line.

Constant density and velocity

The initial conditions in this test are a constant density and an azimuthal velocity :

- for the density : $n(r, \theta) = n_0, \forall (r, \theta) \in \Omega,$
- for the velocity : $V_r(r, \theta) = 0$ and $V_\theta(r, \theta) = V_0, \forall (r, \theta) \in \Omega,$

where n_0 and V_0 are constants, typically $n_0 = 1$ and $V_0 = 0.5$ for our test.

For the boundary conditions we impose slippery walls.

Figures 5 represent the Cartesian and polar results.

Note here that a radial velocity appears and comes from the source term. Indeed, if we consider the isothermal Euler system in polar coordinates, we obtain :

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_r(rnV_r) + \partial_\theta(nV_\theta) = 0, \\ \partial_t rV_r + \partial_r(r(nV_r^2 + n)) + \partial_\theta nV_rV_\theta = nV_\theta^2 + n, \\ \partial_t rV_\theta + \partial_r r(nV_\theta V_r) + \partial_\theta(nV_\theta^2 + n) = -nV_rV_\theta. \end{cases} \quad (\text{C.22})$$

With the initial conditions, the second equation of the system (C.22) becomes,

$$\partial_t rV_r = nV_\theta^2.$$

As consequence, a centripetal force appears and then a radial velocity is created. We note that the numerical results (Fig. 5) match those of physical problems in which a radial velocity appears and then a new profile of the density is obtained. Nevertheless, even if the Cartesian and the polar methods present similar results, it is difficult to compare the two approaches in absence of a stationary solution.

Gresho test

The aim of this last test is to compare explicitly the polar and the Cartesian methods with a stationary solution.

To have a stationary solution, first, we suppose,

$$V_r = 0 \quad \text{and} \quad \partial_\theta = 0.$$

With these assumptions, system (C.22) becomes,

$$\begin{cases} \partial_t n = 0, \\ \partial_t rV_r + r\partial_r n = nV_\theta^2, \\ \partial_t V_\theta = 0. \end{cases} \quad (\text{C.23})$$

We have a stationary solution if the velocity and the density satisfy,

$$r\partial_r n = nV_\theta^2. \quad (\text{C.24})$$

For example, if we choose the velocity as a constant,

$$V_\theta = 1,$$

with equation (C.24), we obtain the following density profile,

$$n(r) = n(1)r.$$

For the boundary conditions we choose influx and outflux computed from the density and the velocity analytic profiles.

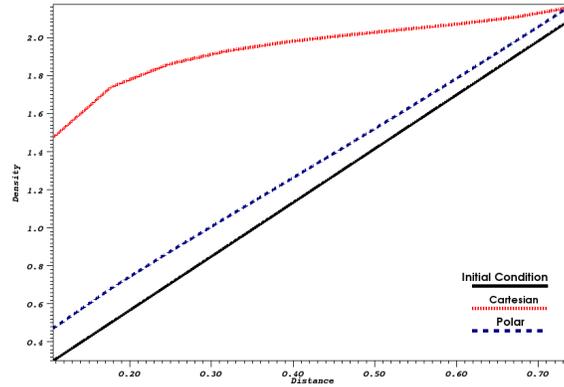


FIG 6: Density profiles for stationary, polar and Cartesian solutions.

Figure 6 shows density profiles for stationary solution (black) and polar and Cartesian methods (respectively, blue and red) with a small $N_\theta = 4$, where $n(1) = 2$ is chosen. Note that even if the mesh is not refined in θ , the polar method gives a solution close to the stationary one whereas the Cartesian method solution is completely different. As consequence, in this case, when N_θ is small, the polar method is better than the Cartesian one.

Figure 7 shows the L^2 -error for the density computed with polar and Cartesian methods, which confirms the superiority of the polar scheme over the Cartesian one. Errors remain small when the polar method is used for small N_θ . Nevertheless, as we already noted in the previous part, when N_θ becomes large, the polar and Cartesian methods tend to be equivalent, as it should be. In addition, we note that whatever the N_θ chosen, the L^2 -error is the same in polar method. Indeed, the error depends only on the chosen N_r (Fig. 8).

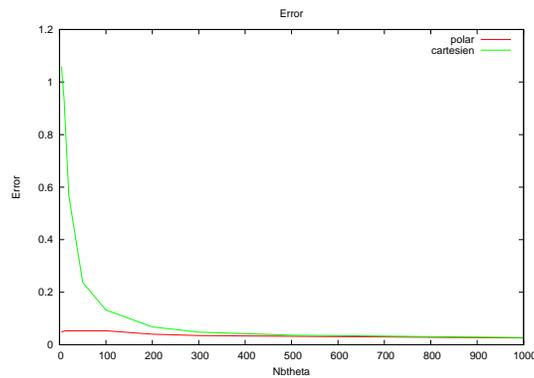


FIG 7: Polar and Cartesian L^2 -errors density.

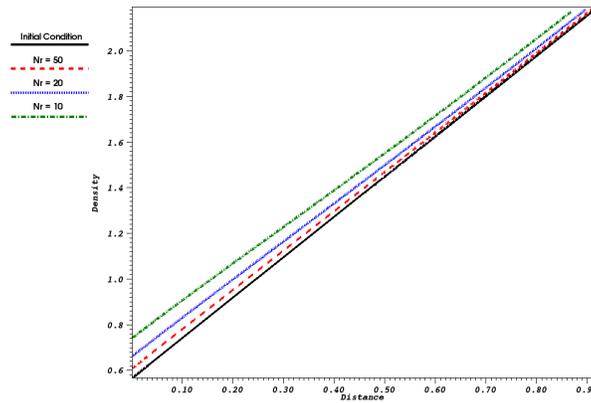


FIG 8: Density profiles for polar solutions in the cases : stationary and $Nr = 10, 20, 50$ with $N_\theta = 4$.

C.5 Conclusion

In this paper, finite volume methods in general curvilinear coordinates for hyperbolic conservation laws have been investigated. This approach has been applied to realistic problems coming from fluid dynamics in tokamak geometry, precisely in $2D$ polar coordinates. Comparison with finite volume in Cartesian coordinates system has confirmed the advantage to use our approach.

Fourthcoming works will consist in extending our approach to toroidal geometry, and to unstructured meshes, and to apply the obtained schemes to physical problems of fusion in tokamaks, for instance ELM instabilities and edge turbulence plasmas simulations.

Annexe D

Construction de B

L'expression globale du champ magnétique est :

$$\mathbf{B} = B_\theta \mathbf{e}_\theta + \mathbf{B}_p \text{ avec } \mathbf{B}_p = \frac{1}{R} \nabla \phi \wedge \mathbf{e}_\theta \quad (\text{D.1})$$

Les expressions des composantes du champ magnétique poloïdal, \mathbf{B}_p sont donc données à partir du potentiel magnétique ϕ :

$$B_R = -\frac{1}{R} \partial_Z \phi \text{ et } B_Z = \frac{1}{R} \partial_R \phi. \quad (\text{D.2})$$

La composante toroïdale du champ magnétique s'exprime à partir d'une fonction $F(\phi)$:

$$B_\theta = \frac{F(\phi)}{R}. \quad (\text{D.3})$$

En utilisant les formules (D.2), on peut construire le champ magnétique à l'aide des valeurs du potentiel magnétique aux sommets des triangles. En effet, dans un premier temps, le gradient du flux magnétique peut être calculé sur chaque triangle τ à l'aide des gradients des fonctions de base, ψ_k définies sur chacun des triangles :

$$(\nabla \phi)_\tau = \sum_{k \in \tau} \phi_k \nabla \psi_k. \quad (\text{D.4})$$

Ensuite, on évalue le gradient du flux magnétique au sommet i en pondérant les gradients obtenus sur chaque triangle, τ , auquel i appartient, par l'aire de celui-ci, \mathbf{A}_τ :

$$(\nabla \phi)_i = \frac{1}{\sum_{\tau \ni i} \mathbf{A}_\tau} \sum_{\tau \ni i} \mathbf{A}_\tau (\nabla \phi)_\tau. \quad (\text{D.5})$$

A partir des formules (D.2), on obtient le champ magnétique poloïdal au point i :

$$B_{R,i} = -\frac{1}{R_i} (\nabla \phi)_i^Z \text{ et } B_{Z,i} = \frac{1}{R_i} (\nabla \phi)_i^R, \quad (\text{D.6})$$

où $(\nabla\phi)_i^R$ et $(\nabla\phi)_i^Z$ représentent les coordonnées radiale et verticale de $(\nabla\phi)_i$ et R_i , la distance du point i à l'axe du tokamak.

Dans les équilibres étudiés dans ce travail, la fonction $F(\Psi)$ est une constante, $F(\Psi) = C$. La dernière composante du champ magnétique est alors :

$$B_{\theta,i} = \frac{C}{R_i}. \quad (\text{D.7})$$

Annexe E

Solveur de Riemann : Calculs annexes.

Les impédances acoustiques, Z_R et Z_L sont choisies de telle façon que les ondes soient classées dans l'ordre suivant :

$$u_L - \frac{Z_L}{\rho_L} \leq u^* \leq u_R - \frac{Z_R}{\rho_R}. \quad (\text{E.1})$$

Dans le but de simplifier les calculs, on pose :

$$Z_R = a_R \rho_R \text{ et } Z_L = a_L \rho_L \text{ avec } a_L = a_R. \quad (\text{E.2})$$

E.1 Classement des ondes et positivité des densités intermédiaires

En reprenant l'expression de u^* donnée par (3.26), les deux inégalités du second ordre à résoudre (E.1) sont :

$$- 0 \leq u^* - u_L + \frac{Z_L}{\rho_L}$$

Avec (E.2) et en supposant $Z_L + Z_R > 0$, cette inégalité devient :

$$(\rho_L + \rho_R)a_R^2 + \rho_R(u_R - u_L)a_R + \bar{\Pi}_L - \bar{\Pi}_R \geq 0 \quad (\text{E.3})$$

Le discriminant de cette inégalité est :

$$\Delta_L = \rho_R^2(u_R - u_L)^2 - 4(\rho_L + \rho_R)(\bar{\Pi}_L - \bar{\Pi}_R) \quad (\text{E.4})$$

d'où

$$m_{\rho,1} = \frac{-\rho_R(u_R - u_L) + \sqrt{\Delta_L}}{2(\rho_L + \rho_R)}. \quad (\text{E.5})$$

$$- 0 \leq u_R + \frac{Z_R}{\rho_R} - u^*$$

De même, cette inégalité devient :

$$(\rho_L + \rho_R)a_R^2 + \rho_L(u_R - u_L)a_R + \bar{\Pi}_R - \bar{\Pi}_L \geq 0 \quad (\text{E.6})$$

Le discriminant de cette inégalité est :

$$\Delta_R = \rho_L^2(u_R - u_L)^2 - 4(\rho_L + \rho_R)(\bar{\Pi}_R - \bar{\Pi}_L) \quad (\text{E.7})$$

d'où

$$m_{\rho,2} = \frac{-\rho_L(u_R - u_L) + \sqrt{\Delta_R}}{2(\rho_L + \rho_R)} \quad (\text{E.8})$$

Le maximum de $m_{\rho,1}$ et $m_{\rho,2}$ sera donc choisie comme valeurs de a_L et a_R afin que l'inégalité (E.1) soit bien satisfaite.

Notons qu'alors les valeurs ρ^* et ρ^{**} sont positives :

$$\frac{1}{\rho^*} = \frac{1}{Z_L} \left(u^* - \left(u_L - \frac{Z_L}{\rho_L} \right) \right) \geq 0 \quad (\text{E.9})$$

car les ondes sont classés dans l'ordre défini précédemment. On a le même résultat pour ρ^{**} .

E.2 Positivité des ε^* et ε^{**}

D'autre part, les valeurs de Z_R et Z_L sont choisies de telle façon que les énergies ε^* et ε^{**} soient positives. Pour cela, chacune des expressions de ε^* et ε^{**} ((3.25) à (3.32)) sont considérées. Sous l'hypothèse (E.1) et en utilisant la formule de $\bar{\Pi}^*$ donnée par (3.26) :

$$- \varepsilon^* = \varepsilon_L + \frac{(\bar{\Pi}^* + p_{eq,L})^2 - (\bar{\Pi}_L + p_{eq,L})^2}{2Z_L^2} \geq 0$$

L'inégalité suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} Aa_L^2 + Ba_L + C \geq 0 \quad \text{avec} \quad & A = 2\rho_L^2(\rho_L + \rho_R)^2\varepsilon_L + \rho_L^2\rho_R^2(u_L - u_R)^2 \\ & B = 2I_2\rho_L\rho_R(u_L - u_R) \\ & C = I_2^2 - (\rho_L + \rho_R)^2(\bar{\Pi}_L + p_{eq,L})^2 \\ & I_2 = \rho_R\bar{\Pi}_L + \rho_L\bar{\Pi}_R + p_{eq,L}(\rho_L + \rho_R) \end{aligned}$$

Le discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$ permet d'avoir :

$$m_{\varepsilon,1} = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A}. \quad (\text{E.10})$$

$$- \varepsilon^* = \varepsilon_L + \frac{(\bar{\Pi}^* + p_{eq,R})^2 - (\bar{\Pi}_L + p_{eq,R})^2}{2Z_L^2} \geq 0$$

L'inégalité suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} Aa_L^2 + Ba_L + C \geq 0 \quad \text{avec} \quad & A = 2\rho_L^2(\rho_L + \rho_R)^2\varepsilon_L + \rho_L^2\rho_R^2(u_L - u_R)^2 \\ & B = 2I_1\rho_L\rho_R(u_L - u_R) \\ & C = I_1^2 - (\rho_L + \rho_R)^2(\bar{\Pi}_L + p_{eq,R})^2 \\ & I_1 = \rho_R\bar{\Pi}_L + \rho_L\bar{\Pi}_R + p_{eq,R}(\rho_L + \rho_R) \end{aligned}$$

Le discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$ permet d'avoir :

$$m_{\varepsilon,2} = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} \quad (\text{E.11})$$

$$- \varepsilon^{**} = \varepsilon_R + \frac{(\bar{\Pi}^* + p_{eq,R})^2 - (\bar{\Pi}_R + p_{eq,R})^2}{2Z_R^2} \geq 0$$

L'inégalité suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} Aa_L^2 + Ba_L + C \geq 0 \quad \text{avec} \quad & A = 2\rho_R^2(\rho_L + \rho_R)^2\varepsilon_R + \rho_L^2\rho_R^2(u_L - u_R)^2 \\ & B = 2I_1\rho_L\rho_R(u_L - u_R) \\ & C = I_1^2 - (\rho_L + \rho_R)^2(\bar{\Pi}_R + p_{eq,R})^2 \end{aligned}$$

Le discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$ permet d'avoir :

$$m_{\varepsilon,3} = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} \quad (\text{E.12})$$

$$- \varepsilon^{**} = \varepsilon_R + \frac{(\bar{\Pi}^* + p_{eq,L})^2 - (\bar{\Pi}_R + p_{eq,L})^2}{2Z_R^2} \geq 0$$

L'inégalité suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} Aa_L^2 + Ba_L + C \geq 0 \quad \text{avec} \quad & A = 2\rho_R^2(\rho_L + \rho_R)^2\varepsilon_R + \rho_L^2\rho_R^2(u_L - u_R)^2 \\ & B = 2I_2\rho_L\rho_R(u_L - u_R) \\ & C = I_2^2 - (\rho_L + \rho_R)^2(\bar{\Pi}_R + p_{eq,L})^2 \end{aligned}$$

Le discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$ permet d'avoir :

$$m_{\varepsilon,4} = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} \quad (\text{E.13})$$

Afin de s'assurer la positivité de chacune des énergies intermédiaires ainsi que l'ordre des ondes, a_L et a_R auront pour valeur le maximum de 0, $m_{\rho,1}$, $m_{\rho,2}$, $m_{\varepsilon,1}$, $m_{\varepsilon,2}$, $m_{\varepsilon,3}$ et $m_{\varepsilon,4}$.

Bibliographie

- [1] <http://www-fusion-magnetique.cea.fr/>.
- [2] <http://fusionforenergy.europa.eu/>.
- [3] <http://www.efda.org/>.
- [4] <http://www.iter.org/>.
- [5] <http://www-sop.inria.fr/pumas/plato.php>.
- [6] M.A. Beer, S.C. Cowley, and G.W. Hammett. Field-aligned coordinates for nonlinear simulations of tokamak turbulence. *Physics of Plasma*, 2 :2687–2700, 1995.
- [7] P. Bellan. *Fundamentals of plasma physics*. Cambridge university press, 2006.
- [8] C. Berthon, B. Braconnier, and B. Nkonga. Numerical approximation of a degenerated non-conservative multifluid model : relaxation scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 48(1) :85–90, 2005.
- [9] P. Bertrand. Description cinétique de la turbulence dans un plasma de tokamak. Ecole d'Aquitaine onde et matière, Maubuisson, 2004.
- [10] M. Bilanceri. Private communication.
- [11] H.M. Blackburn and S.J. Sherwin. Formulation of a galerkin spectral element-fourier method for a three-dimensional incompressible flows in cylindrical geometries. *Journal of Computational Physics*, 197 :759–778, 2004.
- [12] A. Bonnement, T. Fajraoui, H. Guillard, M. Martin, A. Mouton, B. Nkonga, and A. Sangam. Finite volume method in curvilinear coordinates for hyperbolic conservation laws. *Esaim Proceedings*, 32 :163–176, 2011.
- [13] B. Braconnier. *Modélisation numérique d'écoulements multiphasiques pour des fluides compressibles, non miscibles et soumis aux effets capillaires*. PhD thesis, Université de Bordeaux I, 2007.
- [14] S.I. Braginskii. Transport processes in a plasma. *Reviews of Plasma Physics*, 1 :205, 1965.
- [15] J.D. Callen. *Fundamentals of plasma physics*. University of Wisconsin, 2006.
- [16] L. Combe. Private communication.
- [17] A. M. Dimits. Fluid simulations of tokamak turbulence in quasibalooning coordinates. *Phys. Rev. E*, 48 :4070–4079, 1993.

- [18] T.H. Dupree. Kinetic theory of plasma and the electromagnetic field. *Phys. Fluids*, 6, 1963.
- [19] A. Ern and J.L. Guermond. *Eléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre*. Springer, 2002.
- [20] P.F. Fischer. Anisotropic diffusion in a toroidal geometry. *Journal of Physics : Conference Series*, 16 :446, 2005.
- [21] J.P. Freidberg. *Ideal Magneto hydrodynamics*. Springer, 1987.
- [22] X. Garbet, Y. Idomura, L. Villard, and T.H. Watanabe. Gyrokinetic simulations of turbulent transport. *Nuclear Fusion*, 50(4) :043002, 2010.
- [23] O.E. Garcia, V. Naulin, A.H. Nielsen, and J.J. Rasmussen. Turbulence and intermittent transport at the boundary of magnetized plasmas. *Physics of Plasmas*, 12(6), 2005.
- [24] Ph. Ghendrih, H. Capes, and A. Samain. Radiative instability in a diverted plasma. *Phys. Fluids*, 4 (5) :1287, 1992.
- [25] E. Godlewski and P.-A. Raviart. *Numerical Approximation of Hyperbolic System of Conservation Laws*. Applied Mathematics Sciences, **118**, Springer, New York, 1996.
- [26] J.P. Goedbloed and S. Poedt. *Principles of Magnetohydrodynamics : With Applications to Laboratory and Astrophysical Plasmas*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [27] H. Grad and H. Rubin. Hydromagnetic equilibria and force-free fields. *Proceedings of the 2nd UN Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy.*, 31 :190, 1958.
- [28] B. Graille, T. Magin, and M. Massot. Kinetic theory of plasmas : Translational energy. *ArXiv e-prints*, nov 2007.
- [29] V. Grandgirard. *Modélisation de l'équilibre d'un plasma de tokamak*. PhD thesis, Université de Besançon, 1999.
- [30] V. Grandgirard. Numerical methods for magnetic confinement fusion. CEMRACS, 2010.
- [31] V. Grandgirard, M. Brunetti, P. Bertrand, N. Besse, X. Garbet, P. Ghendrih, G. Manfredi, Y. Sarazin, O. Sauter, E. Sonnendrucker, J. Vaclavik, and L. Villard. A drift-kinetic semi-lagrangian 4d code for ion turbulence simulation. *Journal of Computational Physics*, 217(2) :395 – 423, 2006.
- [32] V. Grandgirard, Y. Sarazin, P. Angelino, A. Bottino, N. Crouseilles, G. Darmet, G. Dif-Pradalier, X. Garbet, Ph Ghendrih, S. Jolliet, G. Latu, E. Sonnendrucker, and L. Villard. Global full- f gyrokinetic simulations of plasma turbulence. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 49(12B) :B173, 2007.
- [33] Ph.M. Gresho and S.T. Chan. On the theory of semi-implicit projection methods for viscous incompressible flow and its implementation via a finite element method that also introduces a nearly consistent mass matrix. part 2 : Implementation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids.*, 11 :621–659, 1990.

- [34] J.L. Guermond and R. Pasquetti. Entropy viscosity method for high-order approximation of conservation laws. *Lecture Notes in computational Science and Engineering, 76, Spectral and high order methods for partial differential equations, J.S. Hesthaven & E.M. Ronquist Eds*, pages 411–418, 2010.
- [35] H. Guillard and R. Abgrall. *Modélisation Numérique des Fluides Compressibles*. Series in Applied Mathematics, **5**, Gauthier-Villars, Paris, North-Holland, Amsterdam, 2001.
- [36] R.D. Hazeltine and J.D. Meiss. *Plasma Confinement*. Dover publications INC, Mineola, New York, 2003.
- [37] J.A. Heikkinen, S.J. Janhunen, T.P. Kiviniemi, and F. Ogando. Full f gyrokinetic method for particle simulation of tokamak transport. *Journal of Computational Physics*, 227(11) :5582 – 5609, 2008.
- [38] P. Hertout, C. Boulbe, E. Nardon, J. Blum, S. Brémond, J. Bucalossi, B. Faugeras, V. Grandgirard, and P. Moreau. The cedres++ equilibrium code and its application to iter, jt-60sa and tore supra. *Fusion Engineering and Design*, 86(6â8) :1045 – 1048, 2011. Proceedings of the 26th Symposium of Fusion Technology (SOFT-26).
- [39] K. Huang. *Statistical mechanics*. Wiley, 1988.
- [40] J.D. Huba. *NRL PLASMA formulary*. The office of Naval Research, Washington DC 20375, 2009.
- [41] G. Huysmans. External kink (peeling) modes in x-point geometry. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 47(12) :2107, 2005.
- [42] L. Isoardi. *Modélisation du transport dans le plasma de bord d'un tokamak*. PhD thesis, Université Paul Cézanne Aix-Marseille III, 2010.
- [43] S. Jin and Z. Xin. The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions. *Comm. Pure Appl. Math*, 48 :235–277, 1995.
- [44] B.B. Kadomtsev. *Tokamak plasma, a complex physical system*. Institute of Physics Publishing, Bristol, 1993.
- [45] P. Kominsky. Derivation of conservative mhd equation, 2006. Report of Dept. of Aerospace Engineering, University of Michigan.
- [46] J.D. Lawson. Some criteria for a power producing thermonuclear reactor. *Proc. Phys. Soc.*, B70, 1, 1957.
- [47] B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme, v. a second order sequel to godunov's method. *J. Com. Phys.*, 32 :101–136, 1979.
- [48] R.J. Leveque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic problems*. Cambridge University Press, 2002.
- [49] S.L. Milora. Review of pellet fueling. *Journal of fusion energy.*, 1 :15–48, 1981.
- [50] S. Pamela. *Simulation Magnéto-Hydro-Dynamique des Edge-Localised-Modes dans un tokamak*. PhD thesis, Université de Provence, 2010.

- [51] A. Paredes, E. Serre, L. Isoardi, G. Chiavassa, G. Ciraolo, F. Schwander, Ph. Ghendrih, Y. Sarazin, and P. Tamain. Boundary conditions at the limiter surface obtained in the modelling of plasma wall interaction with a penalization technique. *Journal of Nuclear Materials*, 415(1, Supplement) :S579 – S583, 2011. Proceedings of the 19th International Conference on Plasma-Surface Interactions in Controlled Fusion.
- [52] R. Pasquetti. Private communication.
- [53] J. Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer, New York, 2nd edition edition, 1987.
- [54] C.S. Pitcher. A review of particle fuelling and recycling processes in magnetic fusion devices. *Vacuum Technology applications and ion physics*, 38 :1059–1069, 1988.
- [55] J.M. Rax. *Physique des plasmas*. Dunod, 2005.
- [56] D.R. Reynolds, R. Samtaney, and C.S. Woodward. A fully implicit numerical method for single-fluid resistive magnetohydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 219 :144–162, November 2006.
- [57] J.F. Sacadura. *Initiation aux transferts thermiques*. Lavoisier, 1993.
- [58] V.D. Shafranov. Plasma equilibrium in a magnetic field. *Reviews of Plasma Physics*, 2 :103, 1966.
- [59] S.Tsai, F.W. Perkins, and T.H. Stix. Thermal conductivity and low frequency waves in collisional plasmas. *Physics of Fluids*, 13(8), 1970.
- [60] P. Tamain. *Etude des Flux de Matière dans le Plasma de Bord des Tokamaks : Alimentation, Transport et Turbulence*. PhD thesis, Université de Provence(Aix-Marseille I), 2007.
- [61] P. Tamain, Ph. Ghendrih, E. Tsitrone, V. Grandgirard, X. Garbet, Y. Sarazin, E. Serre, G. Ciraolo, and G. Chiavassa. Tokam-3d : A 3d fluid code for transport and turbulence in the edge plasma of tokamaks. *Journal of Computational Physics*, 229(2) :361 – 378, 2010.
- [62] E.F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for fluid dynamics - A practical introduction*. Springer - Verlag, 2006.
- [63] J. Wesson. *Tokamaks*. Oxford Sciences Publications, 2004.

Modélisation numérique par approximation fluide du plasma de bord des tokamaks (projet ITER)

Résumé : La Fusion par Confinement Magnétique (FCM) permet de favoriser les réactions de fusion et donc la production d'énergie par l'utilisation d'une enceinte de géométrie torique, appelée tokamak, soumise à d'importantes forces électro-magnétiques dans le but de confiner le plasma. Afin d'étudier le comportement du plasma de bord dans le cadre de la FCM, nous considérons un système fluide, obtenu à partir du modèle cinétique Vlasov-Maxwell avec fermeture de Braginskii. Une méthode de volumes/éléments finis est choisie pour approximer le modèle. Le système obtenu est de type Euler, ou Navier-Stokes anisotrope si on tient compte de la diffusion, auquel des termes modélisant le confinement du plasma sont rajoutés. Plusieurs méthodes sont proposées pour approximer ces termes ainsi que pour modéliser les conditions aux limites de Bohm, caractéristiques des tokamaks. Par ailleurs, une étude sur la modélisation volumes finis en géométrie cylindrique est menée dans laquelle on considère comme volume élémentaire la cellule engendrée par rotation autour de l'axe du tokamak d'une cellule bidimensionnelle, d'où une formulation conservative des équations. Différents résultats numériques sont présentés, notamment sur un problème de diffusion anisotrope avec rayonnement ou encore sur des simulations d'injection de pellets, glaçons de matière permettant le réapprovisionnement du tokamak.

Mots clés : Simulation des plasmas, modèle fluide, fermeture de Braginskii, diffusion anisotrope, condition aux limites de Bohm, méthode volumes/éléments finis, coordonnées cylindriques.

Numerical modeling with fluid approach of the plasma edge region of tokamaks (ITER project).

Abstract : Magnetic confinement fusion allows to favour fusion reactions and energy production with toric devices, called tokamaks, using an electro-magnetic field in order to confine the plasma. To study the edge plasma of tokamak, we use a fluid model, obtained from the Vlasov-Maxwell kinetic model and the Braginskii closure. A finite volume/element method is chosen to approach the model. The system is similar to the Euler or anisotropic Navier-Stokes systems, with additional terms to model the plasma confinement. We propose some methods to approach these terms and to model Bohm boundary conditions, characteristic of tokamak. Moreover, a finite volume method in cylindrical coordinates is proposed in order to preserve the conservative form of the equations. Thus, we consider as elementary volume, the cell which is given by rotation around the tokamak axis of the 2D cell. Several numerical results are given, e.g. for an anisotropic diffusion problem with radiation and also for simulations of pellet injections (matter ice cubes) to refuel the tokamak.

Keywords : Plasma simulation, fluid model, Braginskii closure, anisotropic diffusion, Bohm boundary condition, finite volume/element method, cylindrical coordinates.