

A non-linear model for the propagation of dispersive waves generated by bathymetric variations: discretisation and validation

The study of wave propagation in channels is a rich subject in terms of physics, modelling and numerical approximation. It is also a very important subject in many applications (see the recent talk [1]). For these flows, wave propagation is often of the "dispersive" type: the celerity depends on the wavelength, and secondary waves are observed whose amplitude can be significant.

In this project, we propose to study a new family of surface wave propagation models. These are 'shallow water' type models that take into account a mechanism that was little known until a few years ago: the generation of dispersion caused by variations in bathymetry. This phenomenon was highlighted and studied, for example, in the article [2] for the case of trapezoidal channels (both natural and artificial). In the reference, the authors propose a linear asymptotic model, obtained from the classical Saint Venant equations, showing that under certain hypotheses bore propagation in variable-section channels is governed by a PDE with a dispersion term.

Here we want to work on a new non-linear 1D model proposed by S. Gavriluk (U. Aix-Marseille) and M. Ricchiuto (Inria U. Bordeaux). This model is essentially a shallow water system with dispersion terms, similar to that studied for example in [3, 4]. It has many interesting properties: it takes into account bathymetric dispersion for channels of arbitrary cross-section; it admits exact solutions of the solitary wave type; it admits a clear notion of energy conservation; etc. This 1D model is a perfect means of estimating the bathymetric dispersion for channels of arbitrary cross-section. This 1D model is a perfect means of familiarising oneself with advanced modelling of free-surface flows, hyperbolic PDEs with dispersive regularisation terms, and their numerical approximation. The proposed work is to

- Go through the steps of the derivation of model and compare the dispersion relation (linear) with those known in the literature and those derived in [2].
- Develop a numerical approximation of the model based on finite difference or finite element methods following, for example, the approach of [3]. Particular attention to the role of energy conservation will be given.
- Validate the solver on analytical solutions
- Study the application to more complex problems, in particular oscillating jumps as in [2].

Profile/keywords: PDE modelling, numerical analysis (finite elements, finite differences), programming (fortran, C, python, or advanced proficiency of MATLAB)

Contact : Mario Ricchiuto, mario.ricchiuto@inria.fr

Un modèle non-linéaire pour la propagation d'ondes dispersives générées par les variations de bathymétrie : discrétisation et validation

L'étude de la propagation de ressauts de vagues dans des canaux est un sujet riche à la fois en termes de physique, de modélisation et d'approximation numérique. Il est aussi un sujet très important dans beaucoup d'applications (voir l'exposé récent [1]). Pour ces ressauts, la propagation de vagues est souvent de type ``dispersive'' : la célérité de propagation dépend de la longueur d'onde, et on observe des ondes secondaires dont l'amplitude peut être importante.

Dans ce stage on propose d'étudier une nouvelle famille de modèles de propagation d'ondes de surface. Il s'agit de modèles type ``shallow water'' prenant un compte un mécanisme peu connu jusqu'à il y a quelques années : la génération de dispersion causée par les variations de bathymétrie. Ce phénomène a été mis en avant et étudié par exemple dans l'article [2] pour le cas de canaux trapézoïdaux (à la fois naturels et artificiels). Dans la référence les auteurs proposent un modèle asymptotique linéaire, obtenu en partant des équations classiques de Saint Venant, permettant de montrer que sous certaines hypothèses la propagation de ressauts dans des canaux à section variable est bien régie par un EDP avec un terme de dispersion.

Ici on veut travailler sur un nouveau modèle non-linéaire 1D proposé pour S. Gavriluk (U. Aix-Marseille) et M. Ricchiuto (Inria U. Bordeaux). Ce modèle est essentiellement un système de shallow water avec des termes de dispersion, proche de celui étudié par ex. en [3, 4]. Il a beaucoup de propriétés intéressantes : il prend en compte la dispersion bathymétrique pour des canaux de section arbitraire ; il admet des solutions exactes de type onde solitaire ; il admet une notion claire de conservation d'énergie ; etc. Ce modèle 1D est un moyen parfait pour se familiariser avec la modélisation avancée des écoulements à surface libre, les EDPs hyperboliques avec des termes de régularisation dispersive, ainsi que leur approximation numérique. Le travail proposé est donc de

- Reprendre la dérivation du modèle et comparer la relation de dispersion (linéaire) avec celles connues en littérature ainsi que celles dérivées dans [2]
- Développer un solveur différences ou éléments finis pour résoudre le système d'EDPs, suivant par ex. l'approche de [3], avec une attention particulière au rôle de la conservation de l'énergie
- Valider le solveur sur des solutions analytiques
- Étudier l'application à des problèmes plus complexes, notamment les ressauts oscillants comme dans [2]

Profil/mots clés: modélisation par EDPs, analyse numérique (éléments finis, différences finies), programmation (fortran, python, ou maîtrise avancée de MATLAB)

Contact : Mario Ricchiuto, mario.ricchiuto@inria.fr

Bibliography

- [1] B. Jouy, D. Violeau, M. Ricchiuto, M. Le, and E. Demay, Using a Boussinesq-type 1-D model to simulate Favre waves, 40th IAHR World Conf., August 2023 [PDF slides](#)
- [2] R. Chassagne, A. Filippini, M. Ricchiuto, P. Bonneton, Dispersive and dispersive-like bores in channels with sloping banks, *J. Fluid Mechanics* 870, 2019 [PDF](#)
- [3] A. Filippini, M. Kazolea and M. Ricchiuto. A flexible genuinely nonlinear approach for wave propagation, breaking and runup. *J.Comput.Phys.*, 310:381–417, 2016 [PDF](#)
- [4] N Favrie, S Gavrilyuk, A rapid numerical method for solving Serre–Green–Naghdi equations describing long free surface gravity waves, *Nonlinearity* 30, 2017 [PDF](#)