

# M2 mathématiques de la modélisation

Examen du mardi 23 avril 2024 (durée 2h)

## Modèles hyperboliques d'écoulements complexes dans le domaine de l'énergie

N. Aguillon & J. Sainte-Marie

### Avertissement

Les diverses parties proposées sont indépendantes les unes des autres.

Les notes manuscrites ainsi que les photocopies imprimés sont autorisés (pas les tablettes, smartphones, ordinateurs...).

**Remarque :** Il vous est demandé de bien détailler et expliquer vos calculs et vos raisonnements.

### Exercice 1 : un problème de Riemann

Pour les équation de Saint-Venant (avec les notations habituelles,  $h = h(t, x)$  désigne la hauteur d'eau et  $u = u(t, x)$  la vitesse du fluide)

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x (hu) = 0 \\ \partial_t (hu) + \partial_x (hu^2 + \frac{g}{2}h^2) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

on considère le problème de Riemann correspondant à une expansion symétrique d'une colonne d'eau avec comme état gauche  $(h_*, u_*)$  et comme état droit  $(h^*, u^*)$  avec  $h_* > 0$  et  $0 < u_* < 2\sqrt{gh_*}$ .

1. Représenter dans le plan  $(h, u)$  les courbes de 1-détente, 1-choc issue de l'état gauche et de 2-détente et 2-choc issues de l'état droit dans le cas et justifier que la solution contient une 1-détente et une 2-détente.
2. Soit  $(h, u)$  une solution régulières des équations (1). Montrer que  $(\tilde{h}, \tilde{u})$  avec

$$\tilde{h}(t, x) = h(t, x) \quad \text{et} \quad \tilde{u}(t, x) = u(t, x)$$

est aussi solution des équations de Saint-Venant.

3. On admet l'unicité au problème de Cauchy pour les équations (1) (sans se soucier des espaces fonctionnels). Montrer que l'état milieu du problème de Riemann est tel que  $u^* = 0$ .
4. En déduire que  $u + 2\sqrt{gh} = 2\sqrt{gh^*}$ .
5. Représenter précisément la vitesse  $u$  au temps 1.
6. Que se passe-t-il si  $u > 2\sqrt{gh}$ ?

### Exercice 2 : Quelques propriétés de la reconstruction hydrostatique

On considère le schéma de reconstruction hydrostatique pour les équations de Saint-Venant avec topographie

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x (hu) = 0 \\ \partial_t (hu) + \partial_x (hu^2 + \frac{g}{2}h^2) = gh\partial_x z_b \end{cases} \quad (2)$$

qu'on écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} h_j^{n+1} \\ (hu)_j^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_j^n \\ (hu)_j^n \end{pmatrix} - \frac{t}{x} \left[ \left( \begin{pmatrix} h_{j+1/2} \\ u_j^n h_{j+1/2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_{j+1/2}^+ \\ u_{j+1}^n h_{j+1/2}^+ \end{pmatrix} \right) \right. \\ \left. \left( \begin{pmatrix} h_{j-1/2} \\ u_j^n h_{j-1/2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_{j-1/2}^+ \\ u_j^n h_{j-1/2}^+ \end{pmatrix} \right) \right] + t \begin{pmatrix} 0 \\ S_j^n \end{pmatrix}$$

Avec

$$S_j^n = \frac{g}{2} \frac{(h_{j+1/2})^2 - (h_j^+)^2}{x} \quad \text{et} \quad \begin{cases} h_{j+1/2}^+ = \max(0, h_{j+1}^n + z_{j+1} - \max(z_j, z_{j+1})) \\ h_{j+1/2}^- = \max(0, h_j^n + z_j - \max(z_j, z_{j+1})) \end{cases}$$

1. Rappeler en une phrase l'intérêt de ce schéma.
2. (a) On répartit le terme source aux interfaces en écrivant

$$S_j^n = S_{j+1/2} + S_{j-1/2}^+ = \frac{g}{2} \frac{(h_{j+1/2})^2 - (h_j^n)^2}{x} + \frac{g}{2} \frac{(h_j^n)^2 - (h_j^+)^2}{x}$$

Calculer, dans le cas où le max avec 0 n'intervient pas et où  $z_j \geq z_{j+1}$ , la quantité  $S_{j+1/2} + S_{j+1/2}^+$

- (b) Retrouver une propriété de consistence.
3. Trouver une condition sous laquelle le schéma de Rusanov (pour le système de Saint-Venant à fond plat) est positif, c'est à dire si  $h_j^n, h_{j+1}^n$  et  $h_{j-1}^n$  sont tous les trois positifs, il en va de même de  $h_j^{n+1}$ .
4. On suppose désormais que le schéma de volumes finis est positif, c'est-à-dire que sous une condition sur  $\frac{t}{x}$  (qu'on supposera connue)

$$h_j^n - \frac{t}{x} \left[ h \left( \left( \frac{h_j^n}{u_j^n h_j^n} \right), \left( \frac{h_{j+1}^n}{u_{j+1}^n h_{j+1}^n} \right) \right) u_j^n h_j^n \right] \geq 0$$

où on note  $h$  la première composante du flux numérique associé à l'évolution de la hauteur d'eau  $h$ .

- (a) Montrer une propriété similaire pour le schéma de reconstruction hydrostatique avec la même condition et la condition supplémentaire  $\frac{t}{x} |u_j^n| < 1$

$$h_j^n - \frac{t}{x} \left[ h \left( \left( \frac{h_{j+1/2}}{u_j^n h_{j+1/2}} \right), \left( \frac{h_{j+1/2}^+}{u_{j+1}^n h_{j+1/2}^+} \right) \right) u_j^n h_j^n \right] \geq 0$$

- (b) Pourquoi peut-on s'attendre à ce que la propriété supplémentaire  $\frac{t}{x} |u_j^n| < 1$  soit toujours vérifiée ?
- (c) On suppose de plus que

$$h_j^n - \frac{t}{x} \left[ u_j^n h_j^n - h \left( \left( \frac{h_{j-1/2}}{u_j^n h_{j-1/2}} \right), \left( \frac{h_{j-1/2}^+}{u_{j+1}^n h_{j-1/2}^+} \right) \right) \right] \geq 0$$

Montrer que sous condition (éventuellement différente que celle supposée jusqu'ici), le schéma de reconstruction hydrostatique est lui aussi positif.

### Exercice 3 : Ondes dispersives

On part du système dit de Saint-Venant dispersif étudié en cours et écrit sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2 + \frac{g}{2}h^2 + hp_{nh}) = 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial huw}{\partial x} = 2p_{nh} \\ w = \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \quad (3)$$

1. Quelle(s) amélioration(s) ce modèle apporte par rapport aux équations de Saint-Venant (1) ? Quels phénomènes permet-il de modéliser ?

2. Soient  $t_0$  et  $t^0$  deux constantes. On suppose que

$$h(t, x) = \frac{x}{t - t_0}, \quad u(t, x) = \frac{x}{t - t^0}, \quad w(x, t) = \frac{h(x, t)}{2(t - t^0)}$$

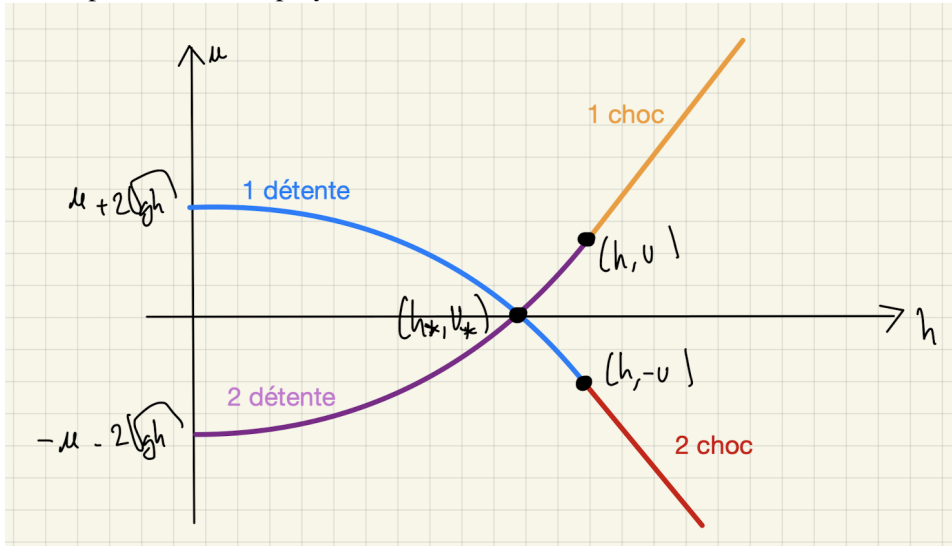
Quelle expression choisir pour  $p_{nh} = p_{nh}(x, t)$  pour que  $h, u, w$  et  $p_{nh}$  soient des solutions analytiques du système (3)?

3. Décrire à quelle situation physique la solution analytique de la question précédente correspond.
4. Dans cette question, on considère le système (1). Si on suppose  $h = h_0 + \delta$ ,  $\delta = \delta(x, t)$  où  $h_0$  est une constante et  $\delta, u = \mathcal{O}(\varepsilon)$  avec  $\varepsilon \ll 1$ . Quelle est l'équation des ondes vérifiée par  $\delta$ ?  
Indication On pourra négliger les termes en  $\varepsilon^2$ .
5. Dans cette question, on considère le système (3). On suppose  $h = h_0 + \hat{\delta}$ ,  $\hat{\delta} = \hat{\delta}(x, t)$  où  $h_0$  est une constante et  $\hat{\delta}, u, w, p_{nh} = \mathcal{O}(\varepsilon)$  avec  $\varepsilon \ll 1$ . Quelle est l'équation des ondes (dispersives) vérifiée par  $\hat{\delta}$ ?

# Corrections

## Correction de l'exercice 1

1. On adapte le dessin du poly à ce cadre



2. On a

$$[\partial_t \tilde{h} + \partial_x \tilde{h} \tilde{u}] (t, x) = [\partial_t h \quad \partial_x h \quad u] (t, x) = 0$$

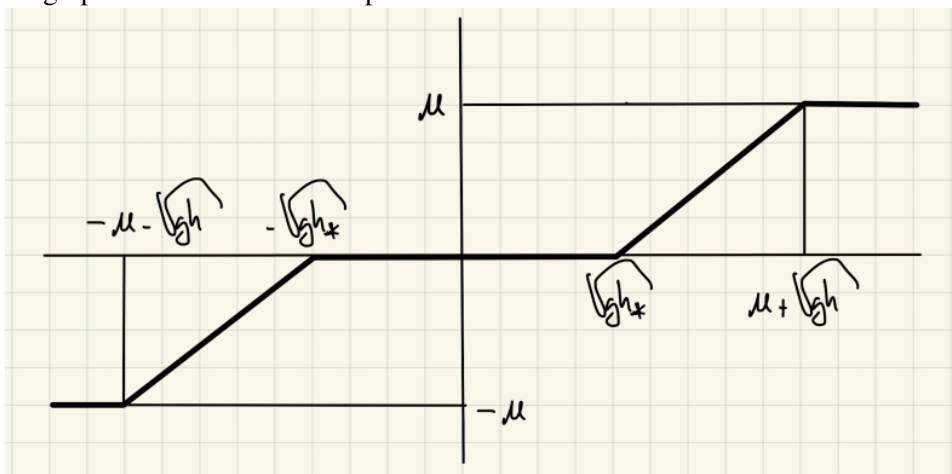
et

$$\left[ \partial_t \tilde{h} \tilde{u} + \partial_x \left( \tilde{h} \tilde{u}^2 + \frac{g}{2} \tilde{h}^2 \right) \right] (t, x) = \left[ \partial_t (h \quad u) \quad \partial_x \left( hu^2 + \frac{g}{2} h^2 \right) \right] (t, x) = 0$$

3. On note  $(h, u)$  la solution du problème de Riemann qui nous intéresse. Alors  $(\tilde{h}, \tilde{u})$  est aussi solution du problème de Saint Venant et vérifie la même donnée initiale, donc  $h = \tilde{h}$  et la hauteur d'eau est paire, tandis que  $u = \tilde{u}$  et la hauteur d'eau est impaire. Il suit que la droite  $x/t = 0$  correspond forcément à l'état intermédiaire par symétrie, et en particulier  $u^* = u(0) = u(0) = 0$ .

4. travers la 1-détente, l'invariant de Riemann  $u - 2\sqrt{gh}$  reste constant, on a donc  $u - 2\sqrt{gh} = 0 - 2\sqrt{gh^*}$   
d'où  $h^* = \left( \sqrt{h} - \frac{u}{2\sqrt{g}} \right)^2$ .

5. Le graphe est continu et affine par morceaux



6. Cette condition assure qu'il n'y a pas de zone sèche dans la solution. Si elle n'est pas vérifiée, les deux courbes de la première question ne se croisent pas.

## Correction de l'exercice 2

1. Ce schéma préserve toutes les solutions "lac au repos" qui correspondent à  $h + z_b = cte, u = 0$ .
2. (a) On calcule

$$S_j^n = S_{j+1/2} + S_{j-1/2}^+ = \frac{g}{2} \frac{z_{j+1} - z_j}{x} (h_{j+1/2}^n)^2 - \frac{g}{2} \frac{z_j - z_{j-1}}{x} (h_{j-1/2}^n)^2 + \frac{g}{2} \frac{z_{j+1} - z_j}{x} (h_{j+1}^n)^2 - \frac{g}{2} \frac{z_j - z_{j-1}}{x} (h_{j-1}^n)^2$$

Calculer, dans le cas où le max avec 0 n'intervient pas et où  $z_j \geq z_{j+1}$ , la quantité  $S_{j+1/2} + S_{j+1/2}^+$

$$\begin{aligned} S_{j+1/2} + S_{j+1/2}^+ &= \frac{g}{2} \frac{z_{j+1} - z_j}{x} (h_{j+1/2}^n)^2 - \frac{g}{2} \frac{z_j - z_{j-1}}{x} (h_{j-1/2}^n)^2 + \frac{g}{2} \frac{z_{j+1} - z_j}{x} (h_{j+1}^n)^2 - \frac{g}{2} \frac{z_j - z_{j-1}}{x} (h_{j-1}^n)^2 \\ &= 0 + \frac{g}{2} \frac{z_{j+1} - z_j}{x} (h_{j+1}^n)^2 - \frac{g}{2} \frac{z_j - z_{j-1}}{x} (h_{j-1}^n)^2 \\ &= \frac{g}{x} h_{j+1}^n (z_{j+1} - z_j) + \frac{g}{2} \frac{z_{j+1} - z_j}{x} (z_{j+1} - z_j)^2 \end{aligned}$$

- (b) Quand  $h_j^n$  et  $h_{j+1}^n$  tendent vers une valeur commune  $h$  et  $u_j^n$  et  $u_{j+1}^n$  vers  $u$ , on obtient que  $S_{j+1/2} + S_{j+1/2}^+$  tend vers

$$g \frac{z_{j+1} - z_j}{x} h + \frac{g}{2} \frac{z_{j+1} - z_j}{x} (z_{j+1} - z_j)^2 = gh \partial_x z_b(x_{j+1/2}) + O(z_{j+1} - z_j)$$

ce qui est consistant avec le terme source  $gh \partial_x z_b$  évalué en l'interface  $x_{j+1/2}$ .

3. Le schéma de Rusanov sur la hauteur d'eau s'écrit

$$\begin{aligned} h_j^{n+1} &= h_j^n - \frac{t}{x} \left[ \frac{h_j^n u_j^n + h_{j+1}^n u_{j+1}^n}{2} - \frac{j+1/2}{2} (h_{j+1}^n - h_j^n) \frac{h_j^n u_j^n + h_{j+1}^n u_{j+1}^n}{2} + \frac{j-1/2}{2} (h_j^n - h_{j-1}^n) \frac{h_j^n u_j^n + h_{j-1}^n u_{j-1}^n}{2} \right] \\ &= h_j^n \left( 1 - \frac{t}{x} \frac{j+1/2}{2} - \frac{t}{x} \frac{j-1/2}{2} \right) + h_{j+1}^n \frac{t}{2x} (u_j^n + u_{j+1}^n) + h_{j-1}^n \frac{t}{2x} (u_j^n + u_{j-1}^n) \end{aligned}$$

Tout les facteurs entre parenthèses sont positifs sous les conditions  $\frac{j+1/2}{2} > |u_{j+1/2}|$  qui est toujours vérifiées car  $\frac{j+1/2}{2}$  doit être prise plus grande que les vitesse d'onde et

$$1 \geq \frac{t}{x} \frac{j+1/2}{2} + \frac{t}{x} \frac{j-1/2}{2}$$

Une autre approche est proposée dans les notes de cours, basée sur la positivité de  $h^*$ , et donne une condition moins restrictive.

4. (a) On introduit le terme nécessaire pour utiliser la propriété de positivité :

$$\begin{aligned} h_j^n &= \frac{t}{x} \left[ h \left( \left( \frac{h_{j+1/2}^+}{u_j^n h_{j+1/2}^+}, \frac{h_{j+1/2}^-}{u_{j+1}^n h_{j+1/2}^-} \right), \left( \frac{h_{j+1/2}^+}{u_{j+1}^n h_{j+1/2}^-}, \frac{h_{j+1/2}^-}{u_j^n h_{j+1/2}^+} \right) \right) u_j^n h_j^n \right] \\ &= h_{j+1/2} \frac{t}{x} \left[ h \left( \left( \frac{h_{j+1/2}^+}{u_j^n h_{j+1/2}^+}, \frac{h_{j+1/2}^-}{u_{j+1}^n h_{j+1/2}^-} \right), \left( \frac{h_{j+1/2}^+}{u_{j+1}^n h_{j+1/2}^-}, \frac{h_{j+1/2}^-}{u_j^n h_{j+1/2}^+} \right) \right) u_j^n h_{j+1/2} \right] \\ &\quad + \left[ h_j^n (h_{j+1/2} + \frac{t}{x} (u_j^n h_{j+1/2} - u_j^n h_j^n)) \right] \end{aligned}$$

Le premier terme est positif, le deuxième s'écrit

$$h_j^n (h_{j+1/2} + \frac{t}{x} u_j^n)$$

qui est positif également.

(b) La propriété supplémentaire est moins stricte que la condition CFL usuelle pour les schémas numérique explicites vus en cours qui s'écrit plutôt  $1 - \frac{t}{x} |u_j^n| + \sqrt{gh_j^n} < 1/2$ .

(c) On écrit

$$\begin{aligned}
h_j^{n+1} &= h_j^n - \frac{t}{x} \left[ h \left( \left( \begin{array}{c} h_{j+1/2} \\ u_j^n h_{j+1/2} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} h_{j+1/2}^+ \\ u_{j+1}^n h_{j+1/2}^+ \end{array} \right) \right) - h \left( \left( \begin{array}{c} h_{j-1/2} \\ u_j^n h_{j-1/2} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} h_{j-1/2}^+ \\ u_j^n h_{j-1/2}^+ \end{array} \right) \right) \right] \\
&= h_j^n - \frac{t}{x} \left[ h \left( \left( \begin{array}{c} h_{j+1/2} \\ u_j^n h_{j+1/2} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} h_{j+1/2}^+ \\ u_{j+1}^n h_{j+1/2}^+ \end{array} \right) \right) - h_j^n u_j^n \right] \\
&\quad - \frac{t}{x} \left[ h_j^n u_j^n - h \left( \left( \begin{array}{c} h_{j-1/2} \\ u_j^n h_{j-1/2} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} h_{j-1/2}^+ \\ u_j^n h_{j-1/2}^+ \end{array} \right) \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left\{ h_j^n - \frac{2t}{x} \left[ h \left( \left( \begin{array}{c} h_{j+1/2} \\ u_j^n h_{j+1/2} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} h_{j+1/2}^+ \\ u_{j+1}^n h_{j+1/2}^+ \end{array} \right) \right) - h_j^n u_j^n \right] \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ h_j^n - \frac{2t}{x} \left[ h_j^n u_j^n - h \left( \left( \begin{array}{c} h_{j-1/2} \\ u_j^n h_{j-1/2} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} h_{j-1/2}^+ \\ u_j^n h_{j-1/2}^+ \end{array} \right) \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

et les deux termes entre accolades sont positifs si les conditions sont vérifiées non plus pour  $t$  mais pour  $2t$ , ce qui correspond à diviser la condition CFL par deux.

### Correction de l'exercice 3

1. La dérivation du modèle de Saint-Venant fait l'hypothèse hydrostatique qui consiste à négliger l'accélération verticale du fluide. Le modèle (3) ne fait pas l'hypothèse hydrostatique et la troisième équation décrit l'équilibre entre l'accélération verticale et le bilan des forces selon l'axe vertical. Dans de nombreux phénomènes géophysiques notamment la propagation d'ondes, les effets dispersifs sont importants à prendre en compte.
2. Il faut d'abord vérifier que les équations 1 et 4 du modèle (3) sont vérifiées avec les expressions proposées. Ensuite, on utilise l'équation 3 du modèle (3) pour obtenir l'expression de  $p_{nh}$  sous la forme

$$p_{nh} = \frac{1}{2} \frac{h(t,x)^2}{t - t_0)^2},$$

et finalement, on vérifie que la seconde équation du modèle (3) est satisfaite.

3. La situation physique est décrite par la figure 1.
4. Si on néglige les termes en  $\varepsilon^2$ , le système (1) devient

$$\begin{cases} \partial_t \delta + h_0 \partial_x u = 0 \\ h_0 \partial_t u + gh_0 \partial_x \delta = 0 \end{cases} \quad (4)$$

On dérive la première équation de (4) par rapport à  $t$  et la seconde par rapport à  $x$  et on soustrait les équations obtenues ce qui donne

$$\partial_{tt} \delta - \partial_x gh_0 \partial_x \delta = 0$$

5. Si on néglige les termes en  $\varepsilon^2$ , le système (3) devient

$$\begin{cases} \partial_t \delta + h_0 \partial_x u = 0 \\ h_0 \partial_t u + gh_0 \partial_x \delta + h_0 \partial_x p_{nh} = 0 \\ h_0 \partial_t w = 2p_{nh} \\ w = \frac{h_0}{2} \partial_x u \end{cases} \quad (5)$$

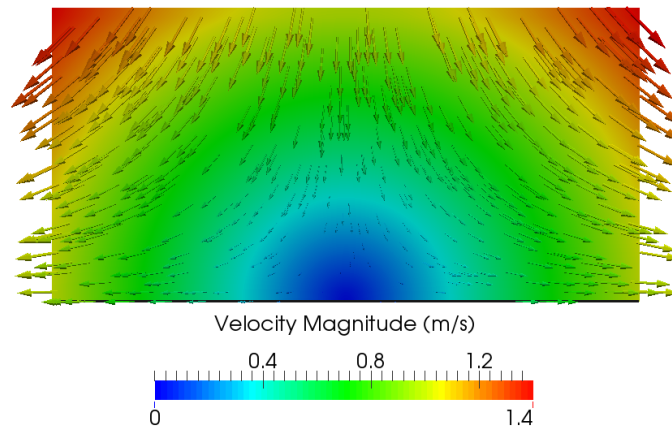


FIGURE 1 – The fluid domain with the color representing the magnitude of the velocity field. The arrows correspond to the velocity vector.

Les deux dernières équations de (5) donnent

$$\frac{h_0^2}{2} \partial_{xt} u = 2p_{nh},$$

ce qui permet d'écrire la seconde équation de (5) sous la forme

$$h_0 \partial_t u + gh_0 \partial_x \delta - \frac{h_0^3}{4} \partial_{xxt} u = 0$$

Et en utilisant la première équation de (5) on obtient finalement

$$\partial_{tt} \delta - \partial_x (gh_0 \partial_x \delta) - \frac{h_0^2}{4} \partial_{xtt} \delta = 0$$