M2 mathématiques de la modélisation

Examen du mardi 11 avril 2023 (durée 2h)

Modèles hyperboliques d'écoulements complexes dans le domaine de l'énergie

N. Aguillon & J. Sainte-Marie

Avertissement
Les diverses parties proposées sont indépendantes les unes des autres.
Les notes manuscrites ainsi que les polycopiés imprimés sont autorisés (pas les tablettes, smartphones, ordinateurs...).
Remarque : Il vous est demandé de bien détailler et expliquer vos calculs et vos raisonnements.

Exercice 1 : équation des ondes

1. Rappeler la formulation des équations d'Euler hydrostatique et incompressible à surface libre et les grandes étapes de la dérivation des équations de Saint-Venant (disons en moins de 10 lignes), en présence d'une topographie de fond variable en espace.
2. On considère une solution des équations de Saint-Venant de la forme $H = H_0(t,x) + \varepsilon H_1(t,x)$ et $\bar{u} = \varepsilon \bar{u}_1(t,x)$. Réinjecter cette forme dans les équations et répondre aux questions suivantes.
   (a) Qu'obtient-on en ne gardant que les termes d'ordre 0 en ε ? À quel équilibre cela correspond t-il ?
   (b) Supposons cette relation vérifiée. Quelles équations sur $\eta = H - H_0$ et $\bar{u}$ obtient-on en négligeant les termes en ε^2 et ε^3 ?
   (c) Justifier que dans cette approximation à l'ordre 1, on peut remplacer Montrer que $-\frac{\partial z_b}{\partial x}$ par $\frac{\partial H_0}{\partial x}$ puis obtenir l'équation suivante :
$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(gH_0 \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = 0. \tag{1}$$
3. On suppose dans toute la suite que la topo est plate et donc que H_0 est constant en espace. Quel est le bilan d'énergie associé à l'équation (1) ? Quel est le bilan d'énergie associé à l'équation obtenue à la question précédente ? Montrer formellement (c'est-à-dire sans vérifier les hypothèses des théorèmes calculatoires que vous appliquerez) que la quantité
$$\mathscr{E}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + gH_0 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 dx$$
est préservée au cours du temps. On pourra supposer que η est à support compact pour tout temps.
4. Si on considère qu'il y a du frottement entre la topographie et le fluide, comment modifier l'équation (1) pour en tenir compte ?
5. Proposer une méthode de différence finie de votre choix pour discrétiser l'équation (1).
6. On repart du système sur $(\eta, \bar{u})$ et on pose $a = \eta + \bar{u}\sqrt{\frac{H_0}{g}}$, $b = \eta - \bar{u}\sqrt{\frac{H_0}{g}}$ et $\lambda = \sqrt{gH_0}$. Montrer que $\partial_t a + \lambda \partial_x a = 0$ et que $\partial_t b - \lambda \partial_x b = 0$.
7. Proposer un schéma de volumes finis upwind (aussi appelé décentré amont) pour actualiser les valeurs de a et de b. Quelle formule d'actualisation de η_j^{n+1} trouve t-on ? À quoi cela vous fait-il penser ?

Exercice 2 : Saint-Venant avec cisaillement On considère le système suivant, sans topographie ni frottement ni viscosité.

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h\bar{u}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(h\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x}\left(h\bar{u}^2 + \frac{g}{2}h^2 + h\hat{u}^2\right) = 0, \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\hat{u}\bar{u}) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

où h représente la hauteur d'eau totale, $\bar{u}$ la vitesse horizontale moyennée sur la verticale, et $\hat{u}$ l'écart moyen à $\bar{u}$ sur la verticale.

1. Soit $u(t,x,z)$ une vitesse horizontale qui dépend aussi de la verticale. On suppose $u(t,x,z) = \bar{u}(t,x) + \dfrac{\sqrt{12}\hat{u}(t,x)}{h}\left(z - \frac{h}{2}\right) + O(\varepsilon^2)$. Donner un DL à l'ordre 2 de $\displaystyle\int_0^h u(t,x,z)^2\,dz$.
2. Quand on passe des équations d'Euler à Saint-Venant, quel terme ce calcul justifie t-il dans (2) ?
3. Montrer que les solutions régulières de (2) vérifie de plus l'égalité d'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{g}{2}h^2 + \frac{h}{2}\left(\bar{u}^2 + \hat{u}^2\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\bar{u}^2 + 3\hat{u}^2}{2} + gh\right)h\bar{u}\right) = 0.$$

   On ne justifiera que les parties nouvelles par rapport à l'équation d'énergie pour le modèle de Saint-Venant habituel.
4. On considère une solution particulière de (2) de la forme

$$(h, h\bar{u}, \hat{u})(t,x) = \begin{cases} (h_-, h_-\bar{u}_-, \hat{u}_-) & \text{si } x < \sigma t \\ (h_+, h_+\bar{u}_+, \hat{u}_+) & \text{si } x > \sigma t \end{cases}.$$

   Rappeler sous quelles conditions reliant σ, $(h_-, h_-\bar{u}_-, \hat{u}_-)$ et $(h_+, h_+\bar{u}_+, \hat{u}_+)$ on obtient bien une solution faible de (2) (on ne cherchera pas à résoudre le système non linéaire obtenu).
5. Montrer qu'il existe une solution particulière non triviale avec $\sigma = \bar{u}_- = \bar{u}_+$.
6. Que devient l'égalité d'énergie sur cette solution ? En quoi cela est-il surprenant ?
7. Dans le cas des solutions régulières, trouver l'équation vérifiée par $\dfrac{\hat{u}}{h}$.
8. On suppose qu'on dispose d'un schéma de volumes finis pour les deux premières équations de (2) de la forme

$$\begin{cases} h_j^{n+1} = h_j^n - \dfrac{\Delta t}{\Delta x}(F_{j+1/2}^h - F_{j-1/2}^h) \\ h_j^{n+1}\bar{u}_j^{n+1} = h_j^n\bar{u}_j^n - \dfrac{\Delta t}{\Delta x}(F_{j+1/2}^{h\bar{u}} - F_{j-1/2}^{h\bar{u}}) \end{cases}$$

   Rappeller brièvement ce qu'approxime chacun de ses termes et proposer une condition CFL raisonnable pour ce type de schéma.
9. Justifier le choix de flux numérique suivant sur la variable $\hat{u}$:

$$F_{j+1/2}^{\hat{u}} = \begin{cases} \dfrac{\hat{u}_j^n}{h_j^n}F_{j+1/2}^h & \text{si } F_{j+1/2}^h \geq 0 \\ \dfrac{\hat{u}_{j+1}^h}{h_{j+1}^n}F_{j+1/2}^h & \text{sinon} \end{cases}$$

Correcion - Exercice 1

1. En 2d (x,z) et avec les notations vues en cours, les équations d'Euler hydrostatiques s'écrivent

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{3}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}+g\frac{\partial \eta}{\partial x}=-\frac{\partial p^a}{\partial x}. \tag{4}$$

Elles sont complétées par les conditions cinématiques u fond et à la surface qui s'écrivent

$$u_b\frac{\partial z_b}{\partial x}-w_b=0,$$

et

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+u_s\frac{\partial \eta}{\partial x}-w_s=0.$$

Une intégration selon la verticale des équations précédentes couplée à la propriété $u=\bar{u}+\mathscr{O}(\varepsilon)$ justifiée par le caractère mince de l'écoulement donne les équations de Saint-Venant

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial (H\bar{u})}{\partial x}=0, \tag{5}$$
$$\frac{\partial (H\bar{u})}{\partial t}+\frac{\partial(}{\partial x}\Big(H\bar{u}^2+\frac{g}{2}H^2\Big)=-gH\frac{\partial z_b}{\partial x}. \tag{6}$$

2. A l'ordre 0, il reste

$$\frac{\partial H_0}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial (H_0+z_b)}{\partial x}=0,$$

ce qui correspond à l'équilibre dit du lac au repos $\eta=cste$.
A l'ordre 1, il reste

$$\frac{\partial H_1}{\partial t}+\frac{\partial (H_0\bar{u}_1)}{\partial x}=0, \tag{7}$$
$$\frac{\partial (H_0\bar{u}_1)}{\partial t}+\frac{\partial gH_0H_1}{\partial x}=-gH_1\frac{\partial z_b}{\partial x}. \tag{8}$$
$$\tag{9}$$

D'après le développement à l'ordre 0, $H_0+z_b=C+\mathscr{O}(\varepsilon)$ et donc $-gH_1\frac{\partial z_b}{\partial x}=gH_1\frac{\partial H_0}{\partial x}+O(\varepsilon)$.On obtient finalement

$$\frac{\partial H_1}{\partial t}+\frac{\partial (H_0\bar{u}_1)}{\partial x}=0, \tag{10}$$
$$\frac{\partial (H_0\bar{u}_1)}{\partial t}+gH_0\frac{\partial H_1}{\partial x}=-gH_1\frac{\partial z_b}{\partial x}. \tag{11}$$
$$\tag{12}$$

En dérivant (5) par rapport au temps puis (6) par rapport à l'espace, il vient

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(gH_0\frac{\partial H_1}{\partial x}\right)=0,$$

où l'on a utilisé les expressions proposées pour H et $\bar{u}$ et on a retenu que les termes en ε. Cela donne bien l'équation demandée puisque $\eta=H-H_0$.

3. On multiplie l'équation (1) par $\frac{\partial \eta}{\partial t}$, il vient

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 - \frac{\partial}{\partial x}\left(gH_0\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right) + gH_0\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} = 0,$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + gH_0\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\Big)^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(gH_0\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right) = 0.$$

En admettant que les conditions soient réunies pour la réaliser, une intégration en espace de la relation précédente donne le résultat.

4. L'introduction d'un frottement (par exemple de type Navier) reviendrait à modifier (6) en

$$\frac{\partial (H\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(H\bar{u}^2 + \frac{g}{2}H^2\Big) = -gH\frac{\partial z_b}{\partial x} - \kappa \bar{u},$$

où κ est une constante positive. L'approximation utilisée à la question précédente donne l'équation

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(gH_0\frac{\partial H_1}{\partial x}\right) = \kappa\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x},$$

avec (5) qui s'exprime sous la forme

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} + H_0\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} = 0,$$

ce qui fournit

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(gH_0\frac{\partial H_1}{\partial x}\right) = -\frac{\kappa}{H_0}\frac{\partial H_1}{\partial t}.$$

Et le bilan d'énergie de vient

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + gH_0\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\Big)^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(gH_0\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right) = -\frac{\kappa}{H_0}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2,$$

où l'on voit que le frottement induit une perte d'énergie (par effet Joule).

5. Avec des notations évidentes, on peut penser à

$$\eta_i^{n+1} = 2\eta_i^n - \eta_i^{n-1} + gH_{0,i}\frac{\Delta t^n}{\Delta x_i}\left(\eta_{i+1}^n - 2\eta_i^n + \eta_{i-1}^n\right).$$

6. Avec l'approximation de la question 2, le système de Saint-Venant s'écrit

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + gH_0\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \tag{14}$$

avec $q = H_0\bar{u}_1$. Un calcul simple montre que les 2 équations proposées redonnent le système ci-dessus.

7. Comme $\lambda \geq 0$, le décentrement "upwind" des 2 équations donne

$$a_i^{n+1} = a_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x_i}\lambda_i^n\left(a_i^n - a_{i-1}^n\right),$$

$$b_i^{n+1} = b_i^n + \frac{\Delta t^n}{\Delta x_i}\lambda_i^n\left(b_{i+1}^n - b_i^n\right).$$

Avec $2\eta_i^{n+1} = a_i^{n+1} + b_i^{n+1}$, il vient

$$2\eta_i^{n+1} = 2\eta_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x_i}\lambda_i^n\Big(a_i^n + b_{i+1}^n - (a_{i-1}^n + b_i^n)\Big),$$

soit

$$\eta_i^{n+1} = \eta_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x_i}\lambda_i^n\Big(\frac{a_i^n + a_{i+1}^n + b_i^n + b_{i+1}^n}{2} - \frac{a_i^n + a_{i-1}^n + b_i^n + b_{i-1}^n}{2}\Big) + \frac{\Delta t^n}{\Delta x_i}\lambda_i^n\Big(\frac{a_{i+1}^n - a_i^n + b_{i+1}^n - b_i^n}{2} - \frac{a_i^n - a_{i-1}^n + b_i^n - b_{i-1}^n}{2}\Big),$$

qui s'apparente à un schéma de Rusanov.

Correcion - Exercice 2

1. On trouve aisément
$$\int_0^h u(t,x,z)dz = h\bar{u}.$$
2. Le calcul donne
$$\int_0^h u(t,x,z)^2 dz = h\bar{u}^2 + h\hat{u}^2,$$
on a ainsi une meilleure approximation de la partie convective de l'accélération.
3. On multiplie l'équation sur h par $gh + h\bar{u} + \frac{\hat{u}^2}{2}$, celle sur $h\bar{u}$ par $\bar{u}$ et celle sur $h\hat{u}$ par $\hat{u}h$, ainsi les termes de dérivées en temps donnent $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{g}{2}h^2 + \frac{h}{2}\left(\bar{u}^2 + \hat{u}^2\right)\right)$. Les termes nouveaux dans la dérivée en espace donnent après calcul
$$\frac{\hat{u}^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}(h\bar{u}) + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}(h\hat{u}^2) + \hat{u}\frac{\partial}{\partial x}(\hat{u}\bar{u}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{2}\bar{u}h\hat{u}^2\right)$$
4. Les relations de Rankine Hugoniot s'écrivent
$$\begin{cases} \sigma[h] = [h\bar{u}], \\ \sigma[h\bar{u}] = \left[h\bar{u}^2 + \frac{g}{2}h^2 + h\hat{u}^2\right] \\ \sigma[\hat{u}] = [\hat{u}\bar{u}] \end{cases}$$
5. Dans le cas où $\sigma = \bar{u}_- = \bar{u}_+$, on peut sortir $\bar{u}$ de la première et de la troisième équation qui deviennent triviales. La seconde s'écrit alors simplement $\left[\frac{g}{2}h^2 + h\hat{u}^2\right]$ ce qui admet des solutions sans que h ou $\hat{u}$ ne soient constantes.
6. Regardons comment varie l'énergie à travers cette discontinuité. En utilisant $\sigma = \bar{u}$ on trouve après un petit calcul
$$\sigma\left[\frac{g}{2}h^2 + \frac{h}{2}\left(\bar{u}^2 + \hat{u}^2\right)\right] - \left[\left(\frac{\bar{u}^2 + 3\hat{u}^2}{2} + gh\right)h\bar{u}\right] = -\left[\frac{gh^2}{2} + h\hat{u}^2\right].$$
et cette quantité est nulle d'après la relation de Rankine Hugoniot précédemment obtenue. Cela est surprenant car à travers un choc, cette quantité tendance à diminuer strictement (si le choc est entropique) ou augmenter strictement (s'il ne l'est pas).
7. $$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\hat{u}}{h} = -\frac{\hat{u}}{h^2}\frac{\partial}{\partial t}h + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial t}(\hat{u}) = \frac{\hat{u}}{h^2}\frac{\partial}{\partial x}(h\bar{u}) - \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\hat{u}) = \frac{\hat{u}\bar{u}}{h^2}\frac{\partial}{\partial x}h - \frac{\bar{u}}{h}\frac{\partial}{\partial x}(\hat{u}) = -\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\hat{u}}{h}$$
Ainsi $\dfrac{\hat{u}}{h}$ est advecté à vitesse $\bar{u}$.

8. Partant de cette constatation, on décentre $/h$.

$$F^{\hat{u}}_{j+1/2} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \frac{\hat{u}}{h}(h\bar{u}) \approx \left(\frac{\hat{u}}{h}\right)_{j+1/2} = \frac{\hat{u}}{h} F^h_{j+1/2}$$

   Le signe du flux de masse $F^h_{j+1/2}$ (homogène à $h\bar{u}$) donne le sens du décentrement : s'il est positif on décentre à gauche, s'il est négatif on décentre à droite, par analogie avec les schémas décentrés pour l'équation de transport.