Résolution du problème de Riemann pour les équations de S^T Venant sans topographie

I) Hyperbolicité du système de S^T Venant

Le système s'écrit en 1 dimension d'espace

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x (hu) = 0 \\ \partial_t (hu) + \partial_x \left(hu^2 + \frac{g}{2} h^2\right) = 0 \end{cases} \qquad (S^T V)$$

et on demande aux solutions de vérifier de plus l'inégalité d'entropie

$$\partial_t E + \partial_x \left(u \left(E + g\frac{h^2}{2}\right)\right) \leq 0 \qquad (IE)$$

où E est l'énergie totale

$$E = \underbrace{\frac{hu^2}{2}}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{g\frac{h^2}{2}}_{\text{énergie potentielle}}$$

Pour les solutions régulières, (IE) est une égalité. Cette inégalité sert à sélectionner quelles discontinuités sont admissibles, c'est-à-dire quelles solutions sont physiques.

Pour les solutions régulières, $(S^T V)$ est équivalent au système quasi-linéaire suivant, écrit en variables (h, u)

$$\begin{cases} \partial_t h + u \partial_x h + h \partial_x u = 0 \\ \partial_t u + g \partial_x h + u \partial_x u = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\partial \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} = 0$$

La matrice $\begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}$ est diagonalisable dès que $h>0$

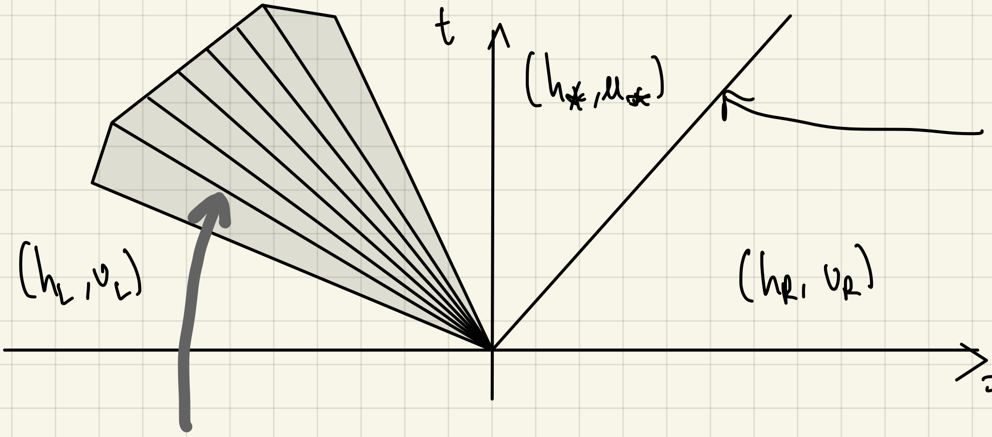
avec comme valeurs propres

$\lambda_1 = u - \sqrt{gh}$ et $\lambda_2 = u + \sqrt{gh}$

et comme vecteurs propres associés

$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{g}{h}} \end{pmatrix}$ et $r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{g}{h}} \end{pmatrix}$

Dans la suite on s'intéresse à des solutions "autosemblables" de (S^tV), c'est-à-dire à des solutions qui ne dépendent que de la variable $\xi = \frac{x}{t}$: ces solutions sont constantes le long de (demi)-droites $x = at$, $a \in \mathbb{R}$. On les représente souvent dans le plan (x,t) ainsi :



discontinuité franche (choc) entre (h_*, v_*) et (h_R, v_R)

indique une zone où la solution varie continuement entre (h_L, v_L) et (h_*, v_*) (détente)

rem : ce n'est qu'un exemple, il pourrait très bien y avoir deux discontinuités par exemple.

rem : On verra dans la suite que dans le cas des équations de S^t-Venant, il n'y a bien qu'un seul état intermédiaire (h_*, v_*).

rem : Le fait que la solution soit constante le long de $x = at$ impose naturellement une condition initiale constante sur $\{x<0\}$ (limite $a \to -\infty$) et sur $\{x>0\}$ (limite $a \to +\infty$).

$$h(t=0, x) = \begin{cases} h_L & \text{si } x<0 \\ h_R & \text{si } x>0 \end{cases} \qquad u(t=0,x) = \begin{cases} u_L & \text{si } x<0 \\ u_R & \text{si } x>0 \end{cases} \qquad (\text{PbR})$$

L'EDP (StV) avec la condition initiale (PbR) s'appelle le problème de Riemann pour St Venant

II) Ondes de détente

On considère un système hyperbolique général

$$\partial_t U + \partial_x f(U) = 0 \qquad (H)$$

avec $U \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω convexe, et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

On détaillera les calculs pour St Venant, soit $n=2$, $\Omega = \{(h, hu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\}$, $f(h, hu) = (hu, hu^2 + \frac{g}{2}h^2)$.

Les ondes de détente sont des solutions continues et $\mathcal{C}^1$ par morceaux de (H), qui ne dependent que de $\frac{x}{t}$:
$U(t,x) = \mathcal{U}\left(\frac{x}{t}\right)$. En réinjectant dans (H) on trouve $(\xi = \frac{x}{t})$

$$-\frac{x}{t^2} \mathcal{U}'(\xi) + \frac{1}{t} Df(\mathcal{U}(\xi)) \mathcal{U}'(\xi) = 0$$

soit $\quad Df(\mathcal{U}(\xi)) \mathcal{U}'(\xi) = \xi \, \mathcal{U}'(\xi)$

Par conséquent, ξ est une valeur propre de $Df(\mathcal{U}(\xi))$ et $\mathcal{U}'(\xi)$ est un vecteur propre associé. Oui mais quel vecteur propre ?

Comme ξ est valeur propre, on a

$\xi = \lambda(u(\xi))$ où λ est la valeur propre qui nous intéresse.

On dérive:

$1 = D\lambda(u(\xi))\, u'(\xi)$

On sait de plus que $u'(\xi) = \tilde{r}(u(\xi))$ où $\tilde{r}$ est un vecteur propre, donc

$1 = D\lambda(u(\xi))\, \tilde{r}(u(\xi))$

On voit que cela impose

- que la quantité $D\lambda(u(\xi))\, \tilde{r}(u(\xi))$ reste strictement positive ou négative (« champs vraiment non linéaires »)
- Une renormalisation du vecteur propre.

Passons au calcul détaillé pour St Venant. Notons déjà que comme les détentes sont des solutions régulières, on peut travailler avec les variables que l'on veut. On choisit (h,u) qui est pratique, et on se concentre sur la première valeur propre $\lambda_1 = u - \sqrt{gh}$. $D\lambda_1(h,v) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}, 1\right)$

$$D\lambda_1(h,u)\, r_1(h,u) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h}} - \sqrt{\frac{g}{h}} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{h}} < 0$$

donc pas de problème d'annulation de cette quantité, mais il faut choisir plutôt $\tilde{r}_1(h,u) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{h}{g}} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ pour obtenir

la propriété

$D\lambda_1(h,u)\, \tilde{r}_1(h,u) = 1.$

On doit donc résoudre

$$\begin{cases} h'(\xi) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{h(\xi)}{g}} \\ u'(\xi) = \frac{2}{3} \end{cases} \qquad (EDO)$$

Avec quelle donnée initiale? On connait l'état à gauche (h_L, U_L) et de plus on a $\xi = u(\xi) - \sqrt{g h(\xi)}$.
On va donc fixer $\xi_L = u_L - \sqrt{g h_L}$ et $h(\xi_L) = h_L$, $u(\xi_L) = U_L$.

On obtient ensuite facilement

$$\boxed{u(\xi) = U_L + \frac{2}{3}(\xi - \xi_L)} \qquad (\text{croissant en } \xi)$$

et $$\frac{h'(\xi)}{2\sqrt{h(\xi)}} = \left(\sqrt{h(\xi)}\right)' = \frac{-1}{3\sqrt{g}} = \left(\frac{-\xi}{3\sqrt{g}}\right)'$$

d'où $$\boxed{\sqrt{h(\xi)} - \sqrt{h_L} = -\frac{(\xi - \xi_L)}{3\sqrt{g}}} \qquad (h \text{ decroit avec } \xi)$$

rem: On peut réinjecter la relation sur u dans celle sur h pour obtenir

$$\boxed{u(\xi) + 2\sqrt{g h(\xi)} = u_L + 2\sqrt{g h_L}}$$

La quantité $u + 2\sqrt{gh}$ est constante à travers la 1-détente. C'est ce qu'on appelle un invariant de Riemann.

III) Ondes de chocs

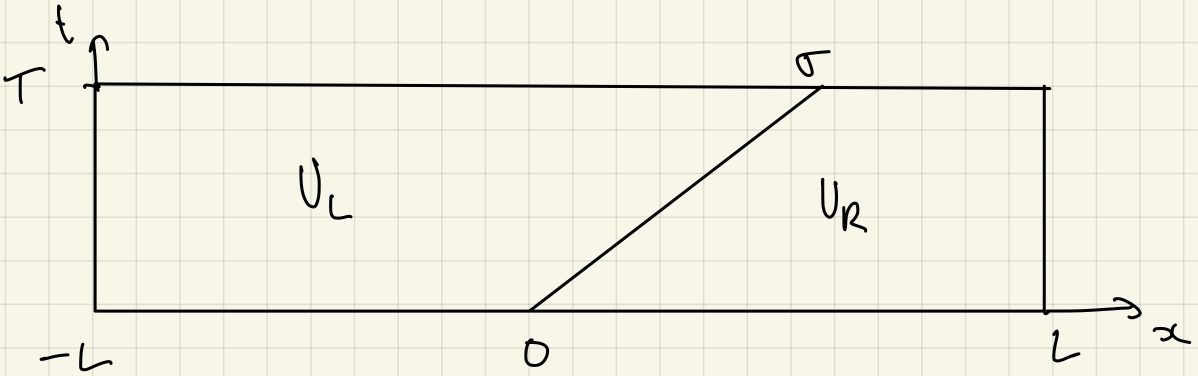
Les chocs sont des solutions discontinues de la forme

$$U(x,t) = \begin{cases} U_L & \text{si } x < \sigma t \\ U_R & \text{si } x > \sigma t \end{cases}$$ il s'agit donc d'une discontinuité

qui se déplace à la vitesse constante σ. C'est une solution autosemblable : $U(x,t) = u\left(\frac{x}{t}\right)$ avec $u(\xi) = \begin{cases} U_L \text{ si } \xi < \sigma \\ U_R \text{ si } \xi > \sigma \end{cases}$.

Comme la solution est discontinue, on ne peut pas changer de variables impunément, et il faut travailler en variables conservatives (pour St Venant, en (h, hu)).

A) Relations de Rankine-Hugoniot



On considère une boite espace-temps $[-L,L]\times[0,T]$, avec $L \geq \sigma T$ de sorte que le choc reste dans cette boite. Si le choc est bien une solution, en intégrant le système hyperbolique $\partial_t U + \partial_x f(U) = 0$ sur cette boite on obtient

$$0 = \int_0^T \int_{-L}^{L} \partial_t U + \partial_x f(U) = \int_{-L}^{L} U(T,x)\,dx - \int_{-L}^{L} U(0,x)\,dx$$

$$+ \int^T f(U(s,L))\,ds - \int_0^T f(U(s,0))\,ds$$

$$= \left[(L+\sigma T)\,U_L + (L-\sigma T)\,U_R\right] - \left[L U_L + L U_R\right] + T f(U_R) - T f(U_L)$$

c'est-à-dire,

$$\boxed{\sigma(U_L - U_R) = f(U_L) - f(U_R)} \qquad \text{(RH)}$$

Réciproquement on vérifie que si U_L, U_R et σ vérifient cette relation de Rankine-Hugoniot (RH), c'est bien une solution de l'EDP

Pour le système de St Venant, (RH) s'écrit

$$\sigma(h_L - h_R) = (q_L - q_R)$$

$$\sigma(q_L - q_R) = \left(\frac{q_L^2}{h_L} + \frac{g}{2}h_L^2 - \frac{q_R^2}{h_R} - \frac{g}{2}h_R^2\right)$$

d'où $q_L = q_R + \sigma(h_L - h_R)$ et

$$\sigma^2(h_L - h_R) = \left(\frac{q_L^2}{h_L} + \frac{g}{2}h_L^2 - \frac{q_R^2}{h_R} - \frac{g}{2}h_R^2\right)$$

$$= \frac{q_R^2 + 2\sigma q_R(h_L - h_R) + \sigma^2(h_L - h_R)^2}{h_L} + \frac{g}{2}h_L^2 - \frac{q_R^2}{h_R} - \frac{g}{2}h_R^2$$

On simplifie par $(h_L - h_R)$: $\frac{q_R^2}{h_L} - \frac{q_R^2}{h_R} = \frac{q_R^2(h_R - h_L)}{h_L h_R}$ donc

$$\sigma^2 = \frac{-q_R^2}{h_L h_R} + 2\sigma\frac{q_R}{h_L} + \frac{\sigma^2}{h_L}(h_L - h_R) + \frac{g}{2}(h_L + h_R)$$

On multiplie par $\frac{h_L}{h_R}$, on obtient

$$0 = u_R^2 - 2\sigma u_R + \sigma^2 - \frac{g}{2}\frac{h_L}{h_R}(h_L + h_R)$$

Le discriminant (en σ) est $\Delta = 4u_R^2 - 4\left(u_R^2 - \frac{g}{2}\frac{h_L}{h_R}(h_L + h_R)\right)$

$$= 4\frac{g}{2}\frac{h_L}{h_R}(h_L + h_R)$$

Il y a donc deux solutions,

$$\sigma = u_R - \sqrt{g\frac{h_L}{h_R}\frac{(h_L + h_R)}{2}} \qquad \sigma = u_R + \sqrt{g\frac{h_L}{h_R}\frac{h_L + h_R}{2}}$$

associée au 1 choc car, quand $h_L \to h_R$, $\sigma \to u_R - \sqrt{gh_R}$; associée au 2-choc

En inversant les rôles de L et R, on peut aussi écrire

$$\sigma = u_L - \sqrt{g\frac{h_R}{h_L}\frac{h_L + h_R}{2}} \quad \text{et} \quad \sigma = u_L + \sqrt{g\frac{h_R}{h_L}\frac{h_L + h_R}{2}}$$

Focalisons nous sur les 1 chocs: une fois u_L, h_L et h_R connues, on trouve σ, puis $q_R = q_L + \sigma(h_R - h_L)$, d'où

$$u_R = \frac{h_L}{h_R} u_L + \frac{1}{h_R}\left(u_L - \sqrt{g \frac{h_R}{h_L} \frac{h_L+h_R}{2}}\right)(h_R - h_L)$$

$$= u_L - \frac{h_R - h_L}{h_R}\sqrt{g\frac{h_R}{h_L}\frac{h_L+h_R}{2}} \qquad (U)$$

B) Condition d'entropie

On se demande maintenant quand est ce qu'un choc vérifie de plus l'inégalité d'entropie (IE) : $\partial_t \eta(U) + \partial_x G(U) \leq 0$.

En intégrant cette inégalité pour $(x,t) \in [-L, L] \times [0, T]$ on obtient

$$(L+\sigma T)\eta(U_L) + (L - \sigma T)\eta(U_R) - (L\eta(U_L) + L\eta(U_R)) + T G(U_R) - T G(U_L) \leq 0$$

d'où $$\boxed{\sigma(\eta(U_L) - \eta(U_R)) \leq G(U_L) - G(U_R)}$$

Regardons ce que cela donne pour St Venant. On veut

$$\begin{cases} \sigma(h_L - h_R) = (h_L u_L - h_R u_R) \\ \sigma(h_L u_L - h_R u_R) = (h_L u_L^2 + \frac{g}{2} h_L^2 - h_R u_R^2 - \frac{g}{2} h_R^2) \\ \sigma\left(\frac{1}{2} h_L u_L^2 + \frac{g}{2} h_L^2 - \frac{1}{2} h_R u_R^2 - \frac{g}{2} h_R^2\right) \leq \left(\frac{h_L u_L^3}{2} + g h_L^2 u_L - \frac{h_R u_R^3}{2} - g h_R^2 u_R\right) \end{cases}$$

Rankine Hugoniot

Introduisons $v = u - \sigma$ la vitesse dans le référentiel qui se déplace à la vitesse du choc. On vérifie que ce système est équivalent à

$$\begin{cases} h_L v_L = h_R v_R \\ h_L v_L^2 + \frac{g}{2} h_L^2 = h_R v_R^2 + \frac{g}{2} h_R^2 \\ \frac{h_R v_R^3}{2} + g h_R^2 u_R \leq \frac{h_L v_L^3}{2} + g h_L^2 u_L \end{cases}$$

Introduisons $M = h_L v_L = h_R v_R$. Pour un 1 choc, comme $\sigma = u_L - \sqrt{\dots} = u_R - \sqrt{\dots}$, on a $v_L = \sqrt{\dots} \geq 0$ et $v_R = \sqrt{\dots} \geq 0$

donc cette quantité M est positive. On l'injecte dans les 2 autres equations :

$$\frac{M^2}{h_L} + \frac{g}{2} h_L^2 = \frac{M^2}{h_R} + \frac{g}{2} h_R^2 \qquad (1)$$

$$\frac{M^3}{2h_R^2} + g h_R M \leq \frac{M^3}{2h_L^2} + g h_L M \underset{(M>0)}{\iff} \frac{M^2}{2h_R^2} + g h_R \leq \frac{M^2}{2h_L^2} + g h_L \qquad (2)$$

de (1) on tire $\frac{M^2}{h_R h_L}(h_L - h_R) + \frac{g}{2}(h_R - h_L)(h_L + h_R) = 0$

d'où $\frac{M^2}{h_L h_R} = \frac{g}{2}(h_L + h_R)$

et (2) donne

$$\frac{M^2}{2h_L^2 h_R^2}(h_R^2 - h_L^2) + g(h_L - h_R) \geq 0$$

soit $(h_L - h_R)\left[-\frac{g}{2}(h_L + h_R)\frac{h_L + h_R}{2h_L h_R} + g\right] \geq 0$

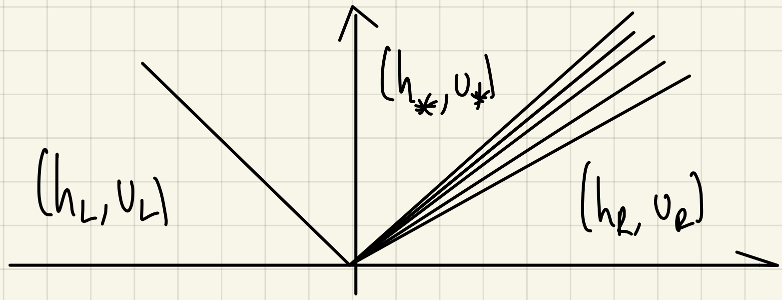
$$\iff (h_L - h_R)\left[\frac{-g(h_L + h_R)^2 + 4g h_L h_R}{4h_L h_R}\right] \geq 0$$

$$\iff (h_L - h_R)^3 \frac{g}{4h_L h_R} \leq 0 \quad \text{et donc} \quad h_L \leq h_R$$

Un 1 choc est entropique si et seulement si $h_L \leq h_R$, on déduit ensuite de (V) que $u_R \leq u_L$

III) Résolution du problème de Riemann pour St Venant

On va résoudre (StV) + (PbR). La structure de la solution autosemblable sera la suivante



Elle contient un état intermédiaire (h_*, u_*) tel que

$$\boxed{\text{On passe de } (h_L, v_L) \text{ à } (h_*, v_*)}$$

Soit par une 1-détente, auquel cas

$v_L + 2\sqrt{gh_L} = v_2 + 2\sqrt{gh_*}$, $u_* \geq v_L$, $h_* \leq h_L$ } courbe bleue

Soit par un 1-choc entropique, auquel cas

$u_* = u_L - \frac{h_*-h_L}{h_*}\sqrt{g\,\frac{h_*}{h_L}\,\frac{h_L+h_*}{2}}$ $v_* \leq v_L$, $h_L \leq h_*$ } courbe rouge

$$\boxed{\text{On passe de } (h_*, u_*) \text{ à } (h_R, u_R)}$$

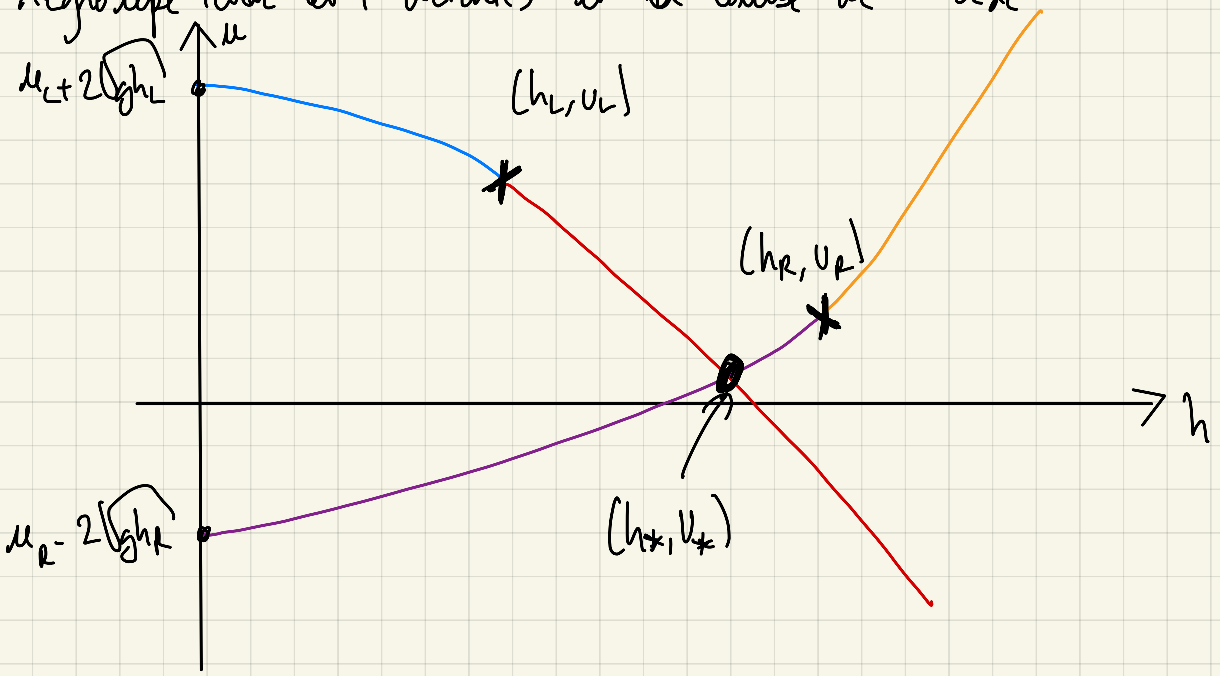
Soit par une 2-détente, auquel cas

$u_R - 2\sqrt{gh_R} = v_* - 2\sqrt{gh_*}$, $u_* \leq v_R$, $h_* \leq h_R$ } courbe violette

Soit par un 2-choc, auquel cas

$u_* = u_R - \frac{h_*-h_R}{h_*}\sqrt{g\,\frac{h_*}{h_R}\,\frac{h_R+h_*}{2}}$ $v_* \geq v_R$, $h_R \geq h_*$ } courbe orange

Ainsi, (h_*, v_*) est l'intersection entre la courbe de 1-onde (qui regroupe 1 choc et 1 détente) et la courbe de 2-onde



Ce point d'intersection existe et est unique si $u_R - 2\sqrt{gh_R} < u_L + 2\sqrt{gh_L}$ ce qui est toujours le cas en régime fluvial $|u| < \sqrt{gh}$.

Dans le cas où $u_R - 2\sqrt{gh_R} \geq u_L + \sqrt{2gh_L}$, les courbes tracées dans le plan (h, hu) s'intersecte en $(0,0)$: cela correspond à une zone sèche où il n'y a pas d'eau. On voit que cela se produit à l'extrémité d'une détente et qu'il y a une vitesse limite. On peut encore résoudre le problème de Riemann dans ce cas.

Sur le cas illustré ici, on a vu 1 choc entre (h_L, u_L) et (h_*, u_*), puis une 2-détente entre (h_*, u_*) et (h_R, u_R).

Notons que le 1-choc se déplace à vitesse $\sigma = u_* - \sqrt{\cdots} \leq u_*$, tandis que l'arrière de la 2-détente se déplace à la vitesse $u_* + \sqrt{gh_*}$: les ondes sont donc bien ordonnées comme sur le 1^{er} dessin et on a bien construit une solution au problème de Riemann pour St Venant.