

Schémas de Godunov et de Rusanov

La présentation est faite pour un système hyperbolique général

$$\partial_t U + \partial_x f(U) = 0 \quad (H)$$

$U \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω convexe, et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

On a en plus une inégalité d'entropie pour sélectionner les chocs

$$\partial_t \eta(U) + \partial_x G(U) \leq 0 \quad (IE)$$

$\eta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, $G: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

L'application qui a a en tête est le système de \mathcal{I} Venant.

On va présenter deux schémas de volumes fins en 1D

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}}) \quad (S)$$

en portant une attention particulière aux deux questions suivantes :

- le schéma doit préserver le domaine invariant Ω , c'est-à-dire la positivité de la hauteur d'eau dans le cas de \mathcal{I} Venant

- le schéma doit avoir une inégalité d'entropie, c'est-à-dire qu'il existe des flux numériques d'entropie $G_{j+\frac{1}{2}}$ tels que

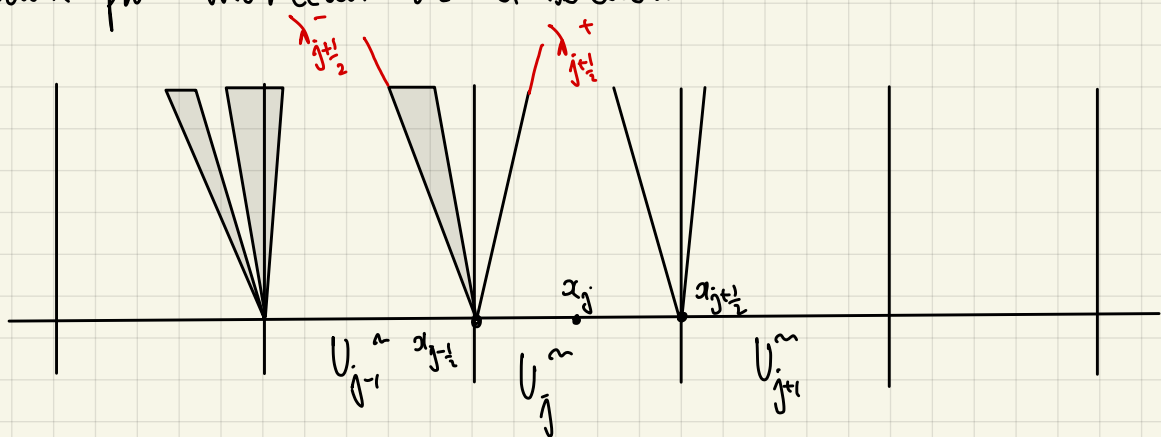
$$\eta(U_j^{n+1}) \leq \eta(U_j^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (G_{j+\frac{1}{2}} - G_{j-\frac{1}{2}}). \quad (IE_{num})$$

Cette dernière condition assure que si les approximations $(U_{\Delta x})_{\Delta x}$ données par le schéma numérique convergent dans L^1 vers une fonction U , cette fonction est une solution entropique du système hyperbolique auquel on s'intéresse (théorème de Lax-Wendroff).

rem: et part si $m=1$ ou si les données initiales sont petites, on ne sait en général pas montrer que $(U_{\Delta x})_{j \leq n}$ converge ... mais on le vérifie numériquement.

I) Schéma de Godunov

au début de l'itération, on dispose d'une approximation constante par morceaux de la solution.



Pour des temps courts, on sait résoudre exactement $(H)+(I\mathbb{Z})$ avec la donnée initiale

$$U^0(x) = U_j^m \quad \text{si } x \in \left[x_j - \frac{\Delta x}{2}, x_j + \frac{\Delta x}{2} \right]$$

En effet :

- Pour tout j on sait résoudre le problème de Riemann avec l'état gauche U_j^m et l'état droit U_{j+1}^m .

Notons $\lambda_{j+1/2}^-$ et $\lambda_{j+1/2}^+$ la plus petite et la plus grande vitesse d'onde apparaissant dans ce problème de Riemann

- Supposons que Δt est pris de telle sorte que ces ondes extrêmes ne traversent pas plus d'une demi maille :

$$U_j, \quad |\lambda_{j+\frac{1}{2}}^-| \Delta t \leq \frac{\Delta x}{2} \quad \text{et} \quad |\lambda_{j+\frac{1}{2}}^+| \Delta t \leq \frac{\Delta x}{2}$$

Les problèmes de Riemann n'interfèrent pas entre eux et on trouve les solutions en les juxtaposant :

$$U^{exa}(\Delta t, x) = R \left(\frac{x - x_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta t}; U_j^m, U_{j+1}^m \right)$$

solution auto-semblable
 du problème de Riemann
 avec U_j^m comme état gauche
 et U_{j+1}^m comme état droit

le problème de Riemann ne dépend que de $\frac{x}{t}$.
 On le centre en $x_{j+\frac{1}{2}}$
 et on est au temps Δt .

rem : à partir du moment où deux ondes se croisent, par exemple $\lambda_{j-\frac{1}{2}}^+$ et $\lambda_{j+\frac{1}{2}}^-$, ça devient bien plus compliqué de calculer la solution exacte : c'est un nouveau problème de Riemann si les deux ondes sont des choc, mais si ça a une détente ??

Le schéma de Godunov consiste à prendre

$$U_j^{m+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} U^{exa}(\Delta t, x) dx \quad (\text{Godunov 1})$$

En exploitant le fait qu'il y a une loi de conservation, cela se réécrit

$$\begin{aligned}
 U_j^{m+1} &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} U^{exa}(0, x) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta t} \int (U^{exa}(s, x_{j-\frac{1}{2}})) ds \\
 &\quad - \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta t} \int (U^{exa}(s, x_{j+\frac{1}{2}})) ds \\
 &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} U^0(x) dx = U_j^m
 \end{aligned}$$

Comme on a résolu des problèmes de Riemann centrés sur les interfaces $x_{j-\frac{1}{2}}$ et $x_{j+\frac{1}{2}}$, on peut évaluer les autres termes :

$$f(U^{\text{res}}(s, x_{j-\frac{1}{2}})) = R(0; U_{j-1}^n, U_j^n)$$

$$f(U^{\text{res}}(s, x_{j+\frac{1}{2}})) = R(0; U_j^n, U_{j+1}^n)$$

du final on obtient (6odunax 2)

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}}) \quad \text{avec } F_{j+\frac{1}{2}} = R(0; U_j^n, U_{j+1}^n)$$

on n'a pas besoin de connaître tous les détails du problème de Riemann mais "juste" la solution sur $x=0$. En pratique cela demande le calcul de l'état intermédiaire dans \mathcal{I}^* devant dans

① ça coûte très cher

② on peut le faire pour \mathcal{I}^* devant mais résoudre un problème de Riemann est généralement ardu.

L'écriture (6odunax 1) permet de voir immédiatement que la hauteur d'eau reste bien positive, puisque c'est le cas à l'intérieur du problème de Riemann. L'existence d'une inégalité d'entropie discrète est aussi une conséquence simple, puisque U^{res} vérifie l'inégalité (IE) :

$$\eta(U_j^{n+1}) = \eta \left(\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} U^{\text{res}}(s, x) dx \right)$$

$$\leq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \eta(U^{\text{res}}(s, x)) dx$$

inégalité de Jensen, η est convexe

$$\leq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}} U_{\text{exact}}(0, x) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}} G(U_{\text{exact}}(s, x_{j-\frac{1}{2}})) ds$$

$$- \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}} G(U_{\text{exact}}(s, x_{j+\frac{1}{2}})) ds \quad (\text{grâce à (EJ)})$$

$$\leq \eta(U_j^m) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (G_{j+\frac{1}{2}} - G_{j-\frac{1}{2}})$$

avec $G_{j+\frac{1}{2}} = G(R(0; U_j^m, U_{j+1}^m))$ en réutilisant le fait que la solution de problème de Riemann est constante sur la droite $x=0$

II) Le schéma de Rusanov (ou HLL)

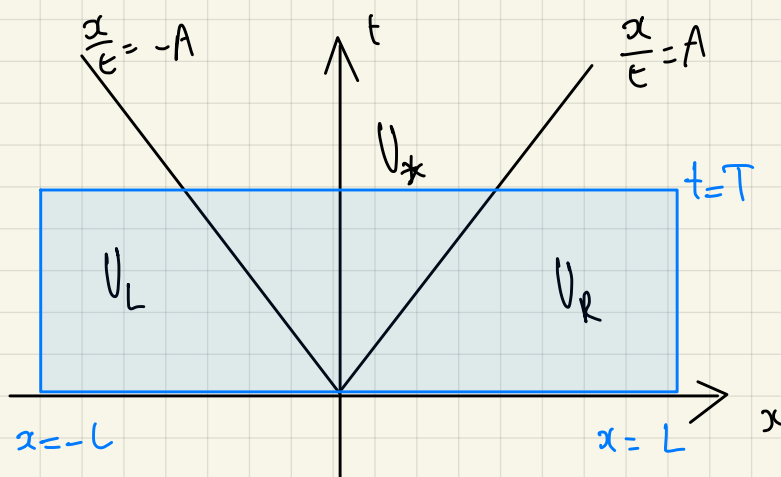
L'idée de ce schéma, un représentant de la classe des solveurs de Riemann approchés, est qu'on peut remplacer la résolution exacte du problème de Riemann par une approximation bien plus simple. Pour une donnée initiale

$$U^0(x) = U_L \mathbb{1}_{x < 0} + U_R \mathbb{1}_{x > 0}$$

dans le cas du schéma de Rusanov cette approximation est de la forme

$$U^{\text{Rus}}\left(\frac{x}{\epsilon}; U_L, U_R\right) = \begin{cases} U_L & \text{si } \frac{x}{\epsilon} < -A \\ U_* & \text{si } -A < \frac{x}{\epsilon} < A \\ U_R & \text{si } A < \frac{x}{\epsilon} \end{cases}$$

où $A > 0$ est une vitesse d'onde approchée à déterminer



structure du problème de Riemann approché

Rappelons que si T est choisi assez petit de sorte que les ondes extrêmes du problème de Riemann exact ne sortent pas de la boîte, i.e

$$|\lambda^-(U_L, U_R)| T \leq L \text{ et } |\lambda^+(U_L, U_R)| T \leq L, \text{ on a}$$

$$\int_{-L}^L U^{\text{exact}}(T, x) dx = LU_L + LU_R + T(f(U_L) - f(U_R)) \quad (c)$$

On détermine l'état intermédiaire U_* en utilisant cette propriété au niveau discret: on veut

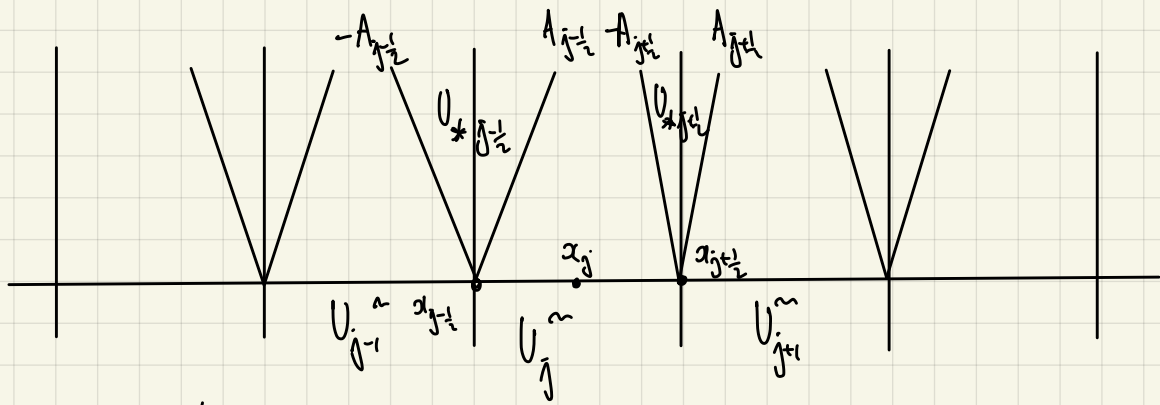
$$\int_{-L}^L U^{\text{Rus}}\left(\frac{x}{T}; U_L, U_R\right) dx = LU_L + LU_R + T(f(U_L) - f(U_R)) \quad (c)$$

$$(L-AT)U_L + 2ATU_* + (L-AT)U_R$$

$$\text{d'où } U_* = \frac{U_L + U_R}{2} - \frac{f(U_R) - f(U_L)}{2A} \quad (U_*)$$

ce calcul est valable pourvu que les ondes approchées ne sortent pas de la boîte, i.e $AT \leq L$.

On procède ensuite de la même manière que pour le schéma de Godunov, sauf qu'on utilise le solveur de Riemann approché:



$$U_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} U^{n+1}(T, x) dx$$

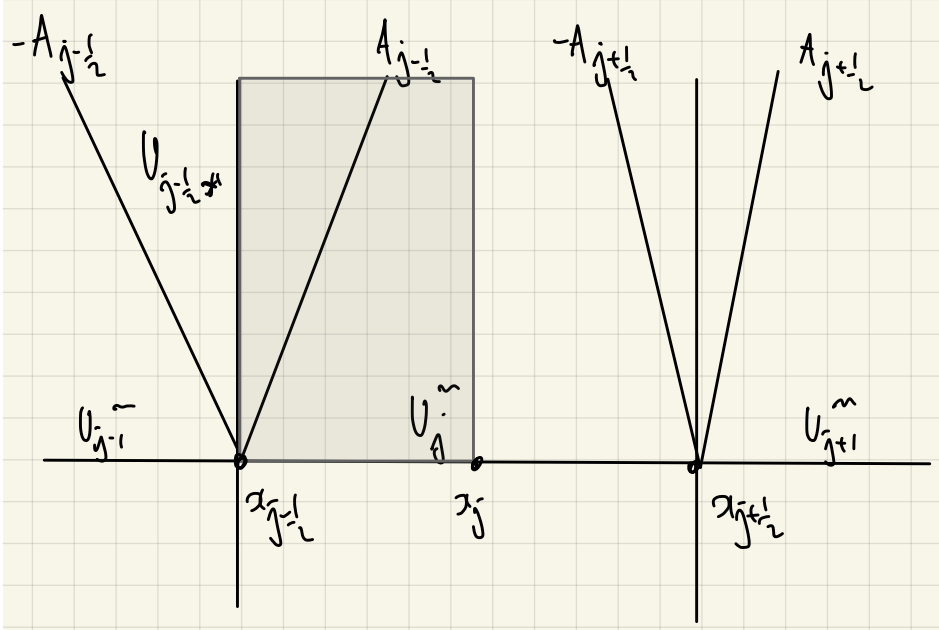
où $U^{n+1}(T, x) = U^{n+1} \left(\frac{x - x_{j-1/2}}{T}; U_{j-1}^n, U_j^n \right)$ sur $[x_{j-1/2}, x_j]$

On a donc besoin que

$$\Delta t \max_j A_{j+1/2} \leq \frac{\Delta x}{2}$$

pour être sûr que les problèmes de Riemann approchés n'intégralisent pas, comme sur le dessin.

Reste à trouver le flux associé. On utilise la conservation de nouveau, mais cette fois sur les demi mailles $[x_{j-1/2}, x_j]$ et $[x_j, x_{j+1/2}]$



Sur l'interface artificielle au milieu de la maille, il est naturel de prendre $f(U_j^n)$ comme flux puisque les ondes approchées ne sont pas

arrivées jusque là. On cherche donc le flux $F_{j-\frac{1}{2}}$ sur l'interface tel que

$$A_{j-\frac{1}{2}} \Delta t U_{*j-\frac{1}{2}} + \left(\frac{\Delta x}{2} - A_{j-\frac{1}{2}} \Delta t \right) U_j^m = \frac{\Delta x}{2} U_j^m + \Delta t F_{j-\frac{1}{2}} - \Delta t F(U_j^m)$$

ce qui donne

$$F_{j-\frac{1}{2}} = F(U_j^m) + A_{j-\frac{1}{2}} (U_{*j-\frac{1}{2}} - U_j^m) \quad (F1)$$

intégrale de la solution approchée sur $[x_{j-1}, x_j]$ au temps Δt

Si on avait intégré sur la demi maille $[x_{j-1}, x_{j-\frac{1}{2}}]$ on aurait obtenu

$$A_{j-\frac{1}{2}} \Delta t U_{*j-\frac{1}{2}} + \left(\frac{\Delta x}{2} - A_{j-\frac{1}{2}} \Delta t \right) U_{j-1}^m = \frac{\Delta x}{2} U_{j-1}^m + \Delta t F(U_{j-1}^m) - \Delta t F_{j-\frac{1}{2}}$$

$$F_{j-\frac{1}{2}} = F(U_{j-1}^m) - A_{j-\frac{1}{2}} (U_{*j-\frac{1}{2}} - U_{j-1}^m) \quad (F2)$$

Ces deux expressions sont égales grâce à la relation (U_*) . Il est agréable de présenter le flux sous la forme

$$F_{j-\frac{1}{2}} = \frac{F(U_{j-1}^m) + F(U_j^m)}{2} - A_{j-\frac{1}{2}} \frac{(U_j^m - U_{j-1}^m)}{2}$$

Le raisonnement par demi maille est également utile pour trouver une condition sur $A_{j-\frac{1}{2}}$ qui permet d'obtenir une inégalité d'entropie. En effet, en raisonnant maintenant sur la décroissance de l'entropie, on aimerait trouver un flux numérique d'entropie $G_{j-\frac{1}{2}}$ tel que, sur $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_j]$ et $[x_{j-1}, x_{j-\frac{1}{2}}]$ on ait

$$A_{j-\frac{1}{2}} \Delta t \eta(U_{*j-\frac{1}{2}}) + \left(\frac{\Delta x}{2} - A_{j-\frac{1}{2}} \Delta t \right) \eta(U_j^m) \leq \frac{\Delta x}{2} \eta(U_j^m) + \Delta t G_{j-\frac{1}{2}} - \Delta t G(U_j^m)$$

$$A_{j-\frac{1}{2}} \Delta t \eta(U_{*j-\frac{1}{2}}) + \left(\frac{\Delta x}{2} - A_{j-\frac{1}{2}} \Delta t \right) \eta(U_{j-1}^m) \leq \frac{\Delta x}{2} \eta(U_{j-1}^m) + \Delta t G(U_{j-1}^m) - \Delta t G_{j-\frac{1}{2}}$$

Soit après calcul

$$G(U_j^m) + A_{j-\frac{1}{2}} \left(\eta(U_{*j-\frac{1}{2}}) - \eta(U_j^m) \right) \leq G_{j-\frac{1}{2}} \stackrel{(D)}{\leq} G(U_{j-1}^-) - A_{j-\frac{1}{2}} \left(\eta(U_{*j-\frac{1}{2}}) - \eta(U_{j-1}^-) \right)$$

Verifions que $G_{j-\frac{1}{2}} = \frac{G(U_j^m) + G(U_{j-1}^-)}{2} - A_{j-\frac{1}{2}} \left(\frac{\eta(U_j^m) - \eta(U_{j-1}^-)}{2} \right)$ convient
par $A_{j-\frac{1}{2}}$ assez grand. L'inégalité (D) est équivalente à

$$\frac{G(U_j^m) + G(U_{j-1}^-)}{2} - A_{j-\frac{1}{2}} \left(\frac{\eta(U_j^m) - \eta(U_{j-1}^-)}{2} \right) \leq G(U_{j-1}^-) - A_{j-\frac{1}{2}} \left(\eta(U_{*j-\frac{1}{2}}) - \eta(U_{j-1}^-) \right)$$

$$\text{soit } A_{j-\frac{1}{2}} \eta(U_{*j-\frac{1}{2}}) \leq A_{j-\frac{1}{2}} \frac{\eta(U_j^m) + \eta(U_{j-1}^-)}{2} + \frac{G(U_{j-1}^-) - G(U_j)}{2}$$

Supposons que $A_{j-\frac{1}{2}} \geq \max(|\lambda^-(U_{j-1}^-, U_j^m)|, |\lambda^+(U_{j-1}^-, U_j^m)|)$

c'est-à-dire que le vrai problème de Riemann soit entièrement compris dans la zone délimitée par le problème de Riemann approché. Alors par la propriété de consistance du schéma (C)

$$\frac{1}{2A\Delta t} \int_{-A\Delta t}^{A\Delta t} \eta \left(U^{\text{num}} \left(\frac{x}{\Delta t}; U_{j-1}^-, U_j^m \right) \right) = \eta \left(\frac{1}{2A\Delta t} \int_{-A\Delta t}^{A\Delta t} v^{\text{exa}} \left(\frac{x}{\Delta t}; U_{j-\frac{1}{2}}^-, U_j^m \right) \right)$$

inégalité de Jensen (η convexe)

$$\leq \frac{1}{2A\Delta t} \int_{-A\Delta t}^{A\Delta t} \eta \left(v^{\text{exa}} \left(\frac{x}{\Delta t}; U_{j-\frac{1}{2}}^-, U_j^m \right) \right)$$

$$\leq \frac{1}{2A\Delta t} \left(A\Delta t \eta(U_{j-1}^-) + A\Delta t \eta(U_j^m) \right) + \Delta t \left(G(U_{j-1}^-) - \Delta t G(U_j^m) \right) \quad (C)$$

et par ailleurs

$$\frac{1}{2A\Delta t} \int_{-A\Delta t}^{A\Delta t} \eta \left(U^{\text{num}} \left(\frac{x}{\Delta t}; U_{j-1}^-, U_j^m \right) \right) = \eta(U_{*j-\frac{1}{2}})$$

Pour montrer le tout

$$\eta(U_j^{n+1}) = \eta \left(\frac{1}{\Delta x} (A_{j-\frac{1}{2}} \Delta t U_{*j-\frac{1}{2}} + A_{j+\frac{1}{2}} \Delta t U_{*j+\frac{1}{2}} + (\Delta x - A_{j-\frac{1}{2}} \Delta t - A_{j+\frac{1}{2}} \Delta t) U_j^n) \right)$$

convexité de η

$$\leq \frac{1}{\Delta x} \left(A_{j-\frac{1}{2}} \Delta t \eta(U_{*j-\frac{1}{2}}) + \left(\frac{\Delta x}{2} - A_{j-\frac{1}{2}} \Delta t \right) \eta(U_j^n) + A_{j+\frac{1}{2}} \Delta t \eta(U_{*j+\frac{1}{2}}) \right. \\ \left. + \left(\frac{\Delta x}{2} - A_{j+\frac{1}{2}} \Delta t \right) \eta(U_j^n) \right)$$

$$\leq \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\Delta x}{2} \eta(U_j^n) + \Delta t G_{j-\frac{1}{2}} - \Delta t G(U_j^n) + \frac{\Delta x}{2} \eta(U_j^n) + \Delta t G(U_j^n) - \Delta t G_{j+\frac{1}{2}} \right]$$

grâce aux inégalités (*)

$$\leq \eta(U_j^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (G_{j+\frac{1}{2}} - G_{j-\frac{1}{2}})$$

□

La positivité de la hauteur d'eau dans GT devant est plus facile :

$$h_{\downarrow} = \frac{h_L + h_R}{2} - \frac{q_R - q_L}{2A}$$

$$= \frac{1}{2} \left[h_L \left(1 + \frac{u_L}{A} \right) + h_R \left(1 - \frac{u_R}{A} \right) \right]$$

qui est bien positive pourvu que $|u_L| < A$ et $|u_R| < A$, condition moins restrictive que pour l'antropie

En pratique, on prend

$$A_{j+\frac{1}{2}} = \max \left(|u_{j+1}| + \sqrt{gh_{j+1}}, |u_j| + \sqrt{gh_j} \right)$$

Il n'y a pas de garantie que cette quantité soit bien plus grande que $|u_{j+\frac{1}{2}}^-|$ et $|u_{j+\frac{1}{2}}^+|$, mais on observe un bon comportement de