

Exercice

N. Aguillon & J. Sainte-Marie

10 mars 2023

On considère un écoulement 'shallow water' modélisé par les équations de Saint-Venant. L'écoulement a lieu sur une topographie donnée par $x \rightarrow z_b(x)$.

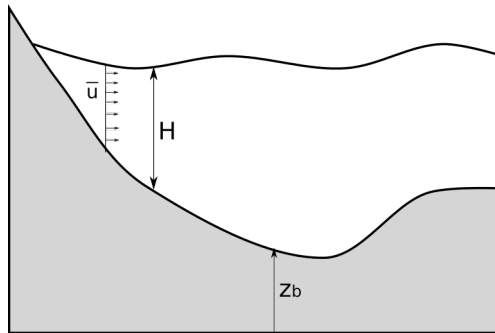


FIGURE 1 – Notations pour les équations de Saint-Venant.

On rappelle l'expression des équations de Saint-Venant

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u})}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(H\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(H\bar{u}^2 + \frac{g}{2}H^2 \right) = -gH \frac{\partial z_b}{\partial x}, \quad (2)$$

où $\rho_1 = cste$ est la densité du fluide, $H(x,t)$ est la hauteur d'eau du fluide et $\bar{u}(x,t)$ sa vitesse, voir figure 1. On néglige les effets de la pression atmosphérique et de la viscosité du fluide.

1. Rappeler brièvement comment sont obtenues les équations de Saint-Venant.
2. Quelle est l'équation d'énergie vérifiée par le système (1)-(2)? Comment est-elle obtenue?
3. Quel est l'effet du frottement entre le fluide et la topographie? Comment sont modifiées les équations (1)-(2) lorsqu'un frottement de type Navier est considéré entre le fluide et la topographie?
4. On remplace l'équation (2) par

$$\frac{\partial(H\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(H\bar{u}^2 + \frac{g}{2}H^2 \right) = -gH \frac{\partial z_b}{\partial x} + S_f(H, \bar{u}),$$

où le terme $S_f(H, \bar{u})$ correspond à un frottement entre le fluide et la topographie. A quelle condition le terme $S_f(H, \bar{u})$ correspond-il à une dissipation d'énergie?

On considère maintenant la situation décrite par la figure 2. La topographie $x \rightarrow z_b(x)$ est constituée d'un matériau 'très dur' qui ne se déforme pas au cours du temps. Un second fluide dénommé fluide 2, de densité $\rho_b = cste$, de hauteur $H_b(x,t)$ et ayant pour vitesse $u_b(x,t)$ est présent. Les fluides 1 et 2 ne sont pas miscibles.

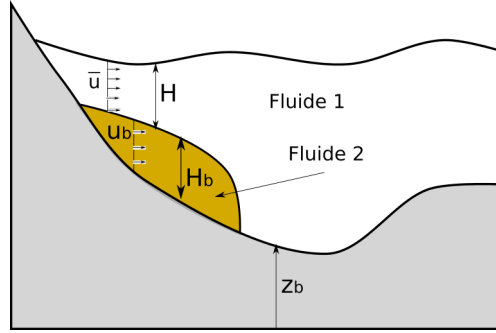


FIGURE 2 – Notations pour la modélisation du glissement de terrain.

5. Comment se réécrit le système (1)-(2) pour tenir compte de la nouvelle topographie $x \rightarrow z_b(x) + H_b(x, t)$
6. Rappeler ce que signifie l'hypothèse hydrostatique pour un écoulement gouverné par les équations de Navier-Stokes.
7. En supposant que l'écoulement dans le fluide 1 est hydrostatique, quelle est l'expression de la pression dans le fluide 1 ?
8. En supposant que l'écoulement dans le fluide 2 est hydrostatique, quelle est l'expression de la pression dans le fluide 2 ?
9. En supposant que l'écoulement dans le fluide 2 est de type 'shallow water', comment s'écrivent les équations de Saint-Venant dans le fluide 2 ?
10. On suppose que $\bar{u} \ll gH$ et $u_b \ll gH_b$, montrer que le système formé des équations (1)-(2) complété par le modèle obtenu à la question 9 s'écrit

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u})}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial(H\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g}{2} H^2 \right) = -gH \frac{\partial(z_b + H_b)}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial H_b}{\partial t} + \frac{\partial(H_b u_b)}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial(H_b u_b)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g}{2} H_b^2 \right) = -gH_b \frac{\partial z_b}{\partial x} - g \frac{\rho_1}{\rho_2} H_b \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (6)$$

11. Montrer que le système (3)-(6) est hyperbolique si et seulement si

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} < 1.$$

12. Proposer un schéma HLL pour approximer le système (3)-(6).
13. Simuler numériquement (3)-(4) dans le cas où H_b est connu, de la forme $F(x - ct)$.
14. Comment faudrait-il modifier les équations (4) et (6) pour modéliser un frottement de type Navier entre les fluides 1 et 2 ?
15. On suppose maintenant que $z_b = z_b^0 = cste$. Montrer que le fluide 1 vérifie l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(gH \frac{\partial H}{\partial x} \right) = g \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial H_b}{\partial x} \right). \quad (7)$$

16. Dans l'équation (7), on suppose $H = H_0 + h$ avec $H_0 = cste$ et $h \ll H_0$. De plus, on considère que $H_b = H_b(x, t)$ est de la forme

$$H_b = F(x - ct),$$

avec $c = cste$. Montrer que h satisfait l'équation

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - gH_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -gH_0 F''(x - ct). \quad (8)$$

17. On cherche des solutions de l'équation (8) sous la forme $h(x, t) = \bar{h}(x - c_1 t)$. A quelle condition sur c_1 peut-on avoir un effet de résonance ?

Remark 0.1. Pour répondre aux questions 12 et 13, il faut avoir vu le chapitre traitant de l'approximation numérique.

Correction

- On fait un développement limité des équations de Navier-Stokes incompressible à surface libre. L'hypothèse hydrostatique couplée à une intégration des équations (continuité et moment) selon l'axe vertical donne le résultat.
- On multiplie l'équation (2) par \bar{u} et après manipulation, on obtient

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \bar{u} \left(E + \frac{g}{2} H^2 \right) = 0,$$

avec

$$E = \frac{H}{2} \bar{u}^2 + \frac{g}{2} (\eta^2 - z_b^2).$$

- Le frottement entre la topographie et le fluide a tendance à 'ralentir' ce dernier. Le frottement correspond à une dissipation d'énergie par effet Joule. En présence d'un frottement de type Navier de coefficient κ , l'équation (2) devient

$$\frac{\partial(H\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(H\bar{u}^2 + \frac{g}{2} H^2 \right) = -gH \frac{\partial z_b}{\partial x} - \kappa \bar{u}.$$

- Pour que le frottement $S_f(H, \bar{u})$ corresponde à une dissipation d'énergie, il faut

$$S_f(H, \bar{u}) \bar{u} \leq 0.$$

- Le système (1)-(2) devient

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u})}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial(H\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(H\bar{u}^2 + \frac{g}{2} H^2 \right) = -gH \frac{\partial(z_b + H_b)}{\partial x}. \quad (10)$$

- Cela consiste à négliger l'accélération verticale du fluide, l'équation des moments selon l'axe vertical se réduit à

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g,$$

où ρ est la densité du fluide.

On obtient alors l'expression de la pression sous la forme

$$p = p^a + \int_z^\eta \rho g dz,$$

($p^a = p^a(x, t)$) est la pression atmosphérique, η est la cote de la surface libre) ou encore

$$p = p^a + \rho g(\eta - z),$$

lorsque $\rho = cste$.

7. Pour le fluide 1, la pression vaut

$$p_1 = \rho_1(H + z_b + H_b - z).$$

8. Pour le fluide 2, la pression vaut

$$p_2 = \rho_1 H + \rho_2(z_b + H_b - z).$$

9. Les équations du mouvement du fluide 2 sont donc données par

$$\frac{\partial H_b}{\partial t} + \frac{\partial(H_b u_b)}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial(H_b u_b)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(H_b u_b^2 + \frac{g}{2} H_b^2 \right) = -g H_b \frac{\partial z_b}{\partial x} - g \frac{\rho_1}{\rho_2} H_b \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (12)$$

10. En négligeant $H\bar{u}^2$ dans l'équation (2) et $H_b u_b^2$ dans l'équation (12), on obtient le résultat.

11. Le système s'écrit sous forme

$$\frac{\partial X}{\partial t} + A \frac{\partial X}{\partial x} = S(X),$$

avec $X = H, H\bar{u}, H_b, H_b u_b$ et

$$S(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gH \frac{\partial X}{\partial x} \\ 0 \\ -gH_b \frac{\partial X}{\partial x} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \bar{u} & H & 0 & 0 \\ gH & 0 & gH_b & 0 \\ 0 & 0 & u_b & H_b \\ gH \frac{\rho_1}{\rho_2} & 0 & gH_b & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont solutions de l'équation

$$P(Z) = \frac{\rho_1}{\rho_2} g^2 H^2 H_b^2,$$

avec $P(Z) = (Z^2 - Z u_b - g H_b^2)(Z^2 - Z \bar{u} - g H^2)$ qui dans le cas général admet 4 racines distinctes dès que $P(0) < 1$.

12. Voir le chapitre correspondant à l'approximation numérique du polycopié.

13. Voir le chapitre correspondant à l'approximation numérique du polycopié..

14. Un frottement de type Navier (avec un coefficient κ) s'écrirait

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u})}{\partial x} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial(H\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g}{2} H^2 \right) = -gH \frac{\partial(z_b + H_b)}{\partial x} - \kappa(\bar{u} - u_b), \quad (14)$$

$$\frac{\partial H_b}{\partial t} + \frac{\partial(H_b u_b)}{\partial x} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial(H_b u_b)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g}{2} H_b^2 \right) = -gH_b \frac{\partial z_b}{\partial x} - g \frac{\rho_1}{\rho_2} H_b \frac{\partial H}{\partial x} + \kappa(\bar{u} - u_b). \quad (16)$$

En effet, à $\bar{u} = 0$ (resp. $u_b = 0$) on obtient la loi classique de Navier pour un seul fluide. De plus, en multipliant (14) par \bar{u} et (16) par u_b et en sommant les 2 équations, on obtiendrait le bilan d'énergie avec la dissipation par effet Joule $\kappa(\bar{u} - u_b)^2$.

15. Il suffit de dériver l'équation (3) par rapport au temps t , l'équation (4) par rapport à x et de soustraire les deux équations obtenues.
16. Après linéarisation de l'Eq. (7) et sachant la forme de H_b , on obtient l'expression (8).
17. En remplaçant $h(x,t) = \bar{h}(x - c_1 t)$ dans (8) on obtient

$$c_1^2 \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial z^2} - gH_0 \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial z^2} = -gH_0 F''(z + (c_1 - c)t).$$

Et la résonance apparaît pour $c_1 = \sqrt{gH_0}$.