Exercice

N. Aguillon & J. Sainte-Marie

23 mars 2022

On considère un écoulement 'shallow water' modélisé par les équations de Saint-Venant. L'écoulement a lieu sur une topographie donnée par $x \to z_b(x)$.

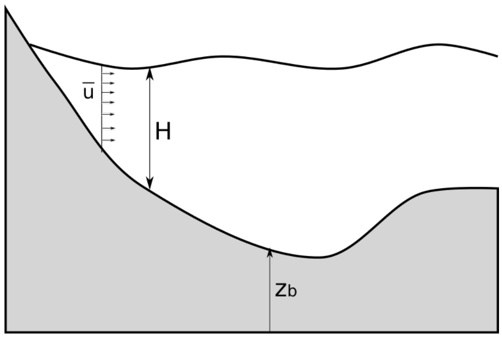

FIGURE 1 – Notations pour les équations de Saint-Venant.

On rappelle l'expression des équations de Saint-Venant

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial (H\bar{u})}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial (H\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(H\bar{u}^2 + \frac{g}{2}H^2\right) = -gH\frac{\partial z_b}{\partial x}, \tag{2}$$

où $\rho_1 = cste$ est la densité du fluide, $H(x,t)$ est la hauteur d'eau du fluide et $\bar{u}(x,t)$ sa vitesse, voir figure 1. On néglige les effets de la pression atmosphérique et de la viscosité du fluide.

1. Rappeler brièvement comment sont obtenues les équations de Saint-Venant.
2. Quelle est l'équation d'énergie vérifiée par le système (1)-(2) ? Comment est-elle obtenue ?
3. Quel est l'effet du frottement entre le fluide et la topographie ? Comment sont modifiées les équations (1)-(2) lorsqu'un frottement de type Navier est considéré entre le fluide et la topogrphie ?
4. On remplace l'équation (2) par

$$\frac{\partial (H\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(H\bar{u}^2 + \frac{g}{2}H^2\right) = -gH\frac{\partial z_b}{\partial x} + S_f(H,\bar{u}),$$

   où le terme $S_f(H,\bar{u})$ correspond à un frottement entre le fluide et la topographie. A quelle condition le terme $S_f(H,\bar{u})$ correspond-il à une dissipation d'énergie ?

On considère maintenant la situation décrite par la figure 2. La topographie $x \to z_b(x)$ est constituée d'un matériau 'très dur' qui ne se déforme pas au cours du temps. Un second fluide dénommé fluide 2, de densité $\rho_b = cste$, de hauteur $H_b(x,t)$ et ayant pour vitesse $u_b(x,t)$ est présent. Les fluides 1 et 2 ne sont pas miscibles.

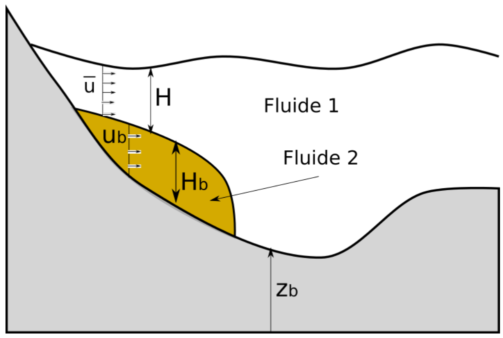

FIGURE 2 – Notations pour la modélisation du glissement de terrain.

5. Comment se réécrit le système (1)-(2) pour tenir compte de la nouvelle topographie $x \to z_b(x) + H_b(x,t)$
6. Rappeler ce que signifie l'hypothèse hydrostatique pour un écoulement gouverné par les équations de Navier-Stokes.
7. En supposant que l'écoulement dans le fluide 1 est hydrostatique, quelle est l'expression de la pression dans le fluide 1 ?
8. En supposant que l'écoulement dans le fluide 2 est hydrostatique, quelle est l'expression de la pression dans le fluide 2 ?
9. En supposant que l'écoulement dans le fluide 2 est de type 'shallow water', comment s'écrivent les équations de Saint-Venant dans le fluide 2 ?
10. On suppose que $\bar{u} \ll gH$ et $u_b \ll gH_b$, montrer que le système formé des équations (1)-(2) complété par le modèle obtenu à la question 9 s'écrit

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial (H\bar{u})}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial (H\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g}{2}H^2\right) = -gH\frac{\partial (z_b + H_b)}{\partial x}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial H_b}{\partial t} + \frac{\partial (H_b u_b)}{\partial x} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial (H_b u_b)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g}{2}H_b^2\right) = -gH_b\frac{\partial z_b}{\partial x} - g\frac{\rho_1}{\rho_2}H_b\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{6}$$

11. Montrer que le système (3)-(6) est hyperbolique si et seulement si

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} < 1.$$

12. Proposer un schéma HLL pour approximer le système (3)-(6).
13. Simuler numériquement (3)-(4) dans le cas où H_b est connu, de la forme $F(x - ct)$.
14. Comment faudrait-il modifier les équations (4) et (6) pour modéliser un frottement de type Navier entre les fluides 1 et 2 ?
15. On suppose maintenant que $z_b = z_b^0 = cste$. Montrer que le fluide 1 vérifie l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(gH\frac{\partial H}{\partial x}\right) = -g\frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial H_b}{\partial x}\right). \tag{7}$$

16. Dans l'équation (7), on suppose $H = H_0 + h$ avec $H_0 = cste$ et $h \ll H_0$. De plus, on considère que $H_b = H_b(x,t)$ est de la forme

$$H_b = F(x - ct),$$

avec $c = cste$. Montrer que h satisfait l'équation

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - gH_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -gH_0 F''(x - ct). \tag{8}$$

17. On cherche des solutions de l'équation (8) sous la forme $h(x,t) = \bar{h}(x - c_1 t)$. A quelle condition sur c_1 peut-on avoir un effet de résonance ?

Remark 0.1. *Pour répondre aux questions 12 et 13, il faut avoir vu le chapitre traitant de l'approximation numérique.*

Correction

1. On fait un développement limité des équations de Navier-Stokes incompressible à surface libre. L'hypothèse hydrostatique couplée à une intégration des équations (continuité et moment) selon l'axe vertical donne le résultat.
2. On multiplie l'équation (2) par $\bar{u}$ et après manipulation, on obtient

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \bar{u} \left(E + \frac{g}{2} H^2 \right) = 0,$$

avec

$$E = \frac{H}{2} \bar{u}^2 + \frac{g}{2} (\eta^2 - z_b^2).$$

3. Le frottement entre la topographie et le fluide à tendance à 'ralentir' ce dernier. Le frottement correpond à une dissipation d'énergie par effet Joule.
En présence d'un frottement de type Navier de coefficient κ, l'équation (2) devient

$$\frac{\partial (H\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(H\bar{u}^2 + \frac{g}{2} H^2 \right) = -gH \frac{\partial z_b}{\partial x} - \kappa \bar{u}.$$

4. Pour que le frottement $S_f(H, \bar{u})$ corresponde à une dissipation d'énergie, il faut

$$S_f(H, \bar{u}) \bar{u} \leq 0.$$

5. Le système (1)-(2) devient

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial (H\bar{u})}{\partial x} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial (H\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(H\bar{u}^2 + \frac{g}{2} H^2 \right) = -gH \frac{\partial (z_b + H_b)}{\partial x}. \tag{10}$$

6. Cela consiste à négliger l'accélération verticale du fluide, l'équation des moments selon l'axe vertical se réduit à

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g,$$

où ρ est la densité du flude.
On obtient alors l'expression de la pression sous la forme

$$p = p^a + \int_z^\eta \rho g dz,$$

($p^a = p^a(x,t)$ est la pression atmosphérique, η est la cote de la surface libre) ou encore

$$p = p^a + \rho g(\eta - z),$$

lorsque $\rho = cste$.

7. Pour le fluide 1, la pression vaut

$$p_1 = \rho_1(H + z_b + H_b - z).$$

8. Pour le fluide 2, la pression vaut

$$p_2 = \rho_1 H + \rho_2(z_b + H_b - z).$$

9. Les équations du mouvement du fluide 2 sont donc données par

$$\frac{\partial H_b}{\partial t} + \frac{\partial(H_b u_b)}{\partial x} = 0, \tag{11}$$
$$\frac{\partial(H_b u_b)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(H_b u_b^2 + \frac{g}{2}H_b^2\right) = -gH_b\frac{\partial z_b}{\partial x} - g\frac{\rho_1}{\rho_2}H_b\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{12}$$

10. En négligeant $H\bar{u}^2$ dans l'équation (2) et $H_b u_b^2$ dans l'équation (12), on obtient le résultat.
11. Le système s'écrit sous forme

$$\frac{\partial X}{\partial t} + A\frac{\partial X}{\partial x} = S(X),$$

avec $X = H, H\bar{u}, H_b, H_b u_b$ et

$$S(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gH\frac{\partial X}{\partial x} \\ 0 \\ -gH_b\frac{\partial X}{\partial x} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \bar{u} & H & 0 & 0 \\ gH & 0 & gH_b & 0 \\ 0 & 0 & u_b & H_b \\ gH\frac{\rho_1}{\rho_2} & 0 & gH_b & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont solutions de l'équation

$$P(Z) = \frac{\rho_1}{\rho_2}g^2H^2H_b^2,$$

avec $P(Z) = (Z^2 - Zu_b - gH_b^2)(Z^2 - Z\bar{u} - gH^2)$ qui dans le cas général admet 4 racines distinctes dès que $P(0) < 1$.

12. Voir le chapitre correspondant à l'approximation numérique du polycopié.
13. Voir le chapitre correspondant à l'approximation numérique du polycopié..
14. Un frottement de type Navier (avec un coefficient κ) s'écrirait

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(H\bar{u})}{\partial x} = 0, \tag{13}$$
$$\frac{\partial(H\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g}{2}H^2\right) = -gH\frac{\partial(z_b + H_b)}{\partial x} - \kappa(\bar{u} - u_b), \tag{14}$$
$$\frac{\partial H_b}{\partial t} + \frac{\partial(H_b u_b)}{\partial x} = 0, \tag{15}$$
$$\frac{\partial(H_b u_b)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g}{2}H_b^2\right) = -gH_b\frac{\partial z_b}{\partial x} - g\frac{\rho_1}{\rho_2}H_b\frac{\partial H}{\partial x} + \kappa(\bar{u} - u_b). \tag{16}$$

En effet, à $\bar{u} = 0$ (resp. $u_b = 0$) on obtient la loi classique de Navier pour un seul fluide. De plus, en multipliant (14) par $\bar{u}$ et (16) par u_b et en sommant les 2 équations, on obtiendrait le bilan d'énergie avec la dissipation par effet Joule $\kappa(\bar{u} - u_b)^2$.

15. Il suffit de dériver l'équation (3) par rapport au temps t, l'équation (4) par rapport à x et de soustraire les deux équations obtenues.
16. Après linéarisation de l'Eq. (7) et sachant la forme de H_b, on obtient l'expression (8).
17. En remplaçant $h(x,t) = \bar{h}(x - c_1 t)$ dans (8) on obtient

$$c_1^2 \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial z^2} - gH_0 \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial z^2} = -gH_0 F''\big(z + (c_1 - c)t\big).$$

Et la résonance apparaît pour $c_1 = \sqrt{gH_0}$.