M2 mathématiques de la modélisation

Examen du mardi 9 avril 2012 (durée 2h)

Modèles hyperboliques d'écoulements complexes dans le domaine de l'énergie

E. Godlewski & J. Sainte-Marie

Avertissement
Les diverses parties proposées sont indépendantes les unes des autres.
Les notes manuscrites ainsi que les polycopiés imprimés sont autorisés (pas les tablettes, smartphones, ordinateurs...).

Problème

Partie 1 - Rhéologie dans Saint-Venant

On suppose dans tout l'exercice que les hypothèses dites de "Shallow Water" sont valables. La pression atmosphérique est supposée constante $p^a = 0$. On part du système de Saint-Venant écrit sous la forme (voir figure pour les notations).

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial H}{\partial t} + \dfrac{\partial (H\bar{u})}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial (H\bar{u})}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(H\bar{u}^2 + \dfrac{g}{2}H^2\right) = -gH\dfrac{\partial z_b}{\partial x} \end{array} \right. \tag{1}$$

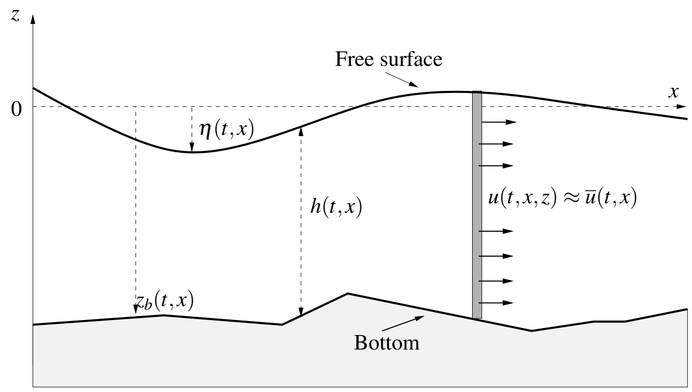

FIGURE 1 – Notations

1. Rappeler l'équation de conservation de l'énergie satisfaite par les solutions du système (1). On se placera dans un régime où les solutions de (1) sont régulières.
2. On considère le système de Saint-Venant modifié

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial H}{\partial t} + \dfrac{\partial (H\bar{u})}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial (H\bar{u})}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(H\bar{u}^2 + \dfrac{g}{2}H^2\right) = -gH\dfrac{\partial z_b}{\partial x} - \kappa(H)\bar{u}^n \end{array} \right. \tag{2}$$

où $\kappa = \kappa(H)$ est une fonction de H et $n \in \mathbb{N}$ un entier. A quelle(s) condition(s) sur $\kappa(H)$et n, le terme $\kappa(H)\bar{u}^n$ pourra-t-il être considéré comme un terme modélisant le frottement entre l'écoulement et la topographie ?

3. On considère le système de Saint-Venant modifié

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial H}{\partial t}+\dfrac{\partial(H\bar{u})}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial(H\bar{u})}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(H\bar{u}^2+\dfrac{g}{2}H^2\right)=-gH\dfrac{\partial z_b}{\partial x}+\mu(H)\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}\end{array}\right. \tag{3}$$

   où $\mu=\mu(H)$ est une fonction. A quelle(s) condition(s) sur $\mu(H)$, le terme $\mu(H)\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}$ pourra-t-il être considéré comme un terme modélisant la viscosité du fluide ?

4. On considère le système de Saint-Venant suivant

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial H}{\partial t}+\dfrac{\partial(H\bar{u})}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial(H\bar{u})}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(H\bar{u}^2+\dfrac{g}{2}H^2-H\sigma\right)=-gH\dfrac{\partial z_b}{\partial x}\end{array}\right. \tag{4}$$

   où σ est défini par

$$\left\{\begin{array}{ll}\sigma=4\mu_0\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+g\frac{\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}}{\left|\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right|} & \text{si } \frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\neq 0,\\ |\sigma|<g & \text{si } \frac{\partial\bar{u}}{\partial x}=0,\end{array}\right. \tag{5}$$

   avec $\mu_0=cst$, $\mu_0\geq 0$.
   Quelle est l'équation d'énergie satisfaite par les solutions du système (4) ? On se place à nouveau dans un régime où les solutions de (1) sont régulières.

5. Pourquoi peut-on dire que le terme σ apparaissant dans (4) favorise les mouvements de corps rigides ?

Partie 2 - Linéarisation

On considère à nouveau le système de Saint-Venant (1) et on se place dans un régime où $\bar{u}=\varepsilon\bar{u}_0$ et $H=H_0(x)+\varepsilon h(x,t)$ avec $\varepsilon\ll 1$.

6. En négligeant les termes en $\mathcal{O}(\varepsilon)$, proposer une version linéarisée des équations de Saint-Venant (1). A quoi correspond ce modèle ?
7. En conservant les termes en ε^0 et ε mais en négligeant les termes en $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, proposer une version linéarisée des équations de Saint-Venant (1).
8. Le système d'équations obtenues à la question précédente satisfait-il une équation de conservation de l'énergie ?
9. Si non, proposer une version modifiée du modèle obtenu à la question 8 et qui satisfasse une équation de conservation de l'énergie.

Partie 3 - Schéma numérique

10. On considère le système de Saint-Venant avec viscosité et frottement écrit sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial H}{\partial t}+\dfrac{\partial(H\bar{u})}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial(H\bar{u})}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(H\bar{u}^2+\dfrac{g}{2}H^2\right)=-gH\dfrac{\partial z_b}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(4\mu_0H\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right)-\kappa_0\bar{u},\end{array}\right. \tag{6}$$

    où μ_0 et κ sont deux coefficients positifs.
    Proposer un schéma numérique explicite en temps pour la résolution de (6).

11. Que traduit une contrainte de CFL ? Quelle est la contrainte de CFL associée à votre schéma ?
12. Comment évolue la contrainte de CFL lorsque H devient grand ? lorsque le pas de discrétisation en espace Δx tend vers 0 ?

Partie 4 - Autre approche

Pour étudier et approcher les solutions de (1), on pose $c = \sqrt{gH}$.

12. Écrire (1) sous forme non conservative en variables $V = (2c, \bar{u})^T$, $\partial_t V + B(V)\partial_x V = S(V)$, préciser la matrice $B(V)$, et calculer ses valeurs propres, qu'on notera $\lambda_i, i = 1,2$ et les vecteur propres, qu'on notera $r_i, i = 1,2$. En déduire un choix simple d'invariants de Riemann, c'est à dire de fonctions $w_i(V)$ telles que $w_i'(V)r_i(V) = 0$ (où $w_i(V)$ désigne la différentielle de w_i), et écrire le système (1) en variable $W = (r_1(V).V, r_2(V).V)^T$.
13. On suppose pour simplifier $\partial_x z_b = 0$. On introduit le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{C^2}{g}\bar{U}) = 0, \\ \dfrac{\partial H\bar{u}}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{C^2}{g}(\bar{U}^2 + \dfrac{C^2}{2})) = 0, \\ \dfrac{\partial C}{\partial t} + \bar{u}_0 \dfrac{\partial C}{\partial x} + \dfrac{c_0}{2}\dfrac{\partial \bar{U}}{\partial x} = \mu(c - C), \\ \dfrac{\partial U}{\partial t} + 2c_0 \dfrac{\partial C}{\partial x} + \bar{u}_0 \dfrac{\partial U}{\partial x} = \mu(\bar{u} - \bar{U}) \end{cases} \tag{7}$$

   dans lequel $\bar{u}_0, c_0, \mu$ sont des coefficients supposés donnés. Écrire le système (7) sous la forme non conservative $\partial_t X + A(X)\partial_x X = S(X)$ en précisant les variables X, la matrice $A(X)$ et le terme $S(X)$.

   Interpréter le système (7) et préciser ses liens avec (1). Calculer les valeurs propres de $A(X)$, vérifier que deux d'entre elles sont nulles, quelle est la nature des deux autres ? Exhiber un choix simple de vecteurs propres associés à la valeur propre 0, en déduire des invariants de Riemann associés à 0.
14. Proposer les grandes lignes d'une méthode numérique utilisant (7) et permettant d'approcher les solutions de (1).