M2 mathématiques de la modélisation

Examen du mardi 10 avril 2018 (durée 2h)

Modèles hyperboliques d'écoulements complexes dans le domaine de l'énergie

E. Godlewski & J. Sainte-Marie

Avertissement
Les trois parties proposées sont indépendantes les unes des autres.
Les notes manuscrites ainsi que les polycopiés imprimés sont autorisés (pas les tablettes, smartphones, ordinateurs...).

Problème

Partie 1

1. Rappeler l'expression des équations d'Euler à surface libre pour un fluide incompressible en dimension 2 (x,z). Quelles sont les conditions aux limites nécessaires (fond et surface libre) pour ce modèle ?
2. On considère un écoulement modélisé par les équations d'Euler incompressible à surface libre. On suppose qu'un traceur, dont la concentration est notée $T(x,z,t)$, est présent dans le fluide et qu'il est advecté par celui-ci. Quelle équation gouverne $T(x,z,t)$?
3. Ecrire les équations de Saint-Venant sans frottement ni viscosité avec une topographie donnée $z_b(x) = z_b^0 = cste$. On utilisera les variables $H, H\bar{u}$.
4. Montrer que, en faisant une hypothèse de type « shallow water », l'intégration selon l'axe z de l'équation obtenue à la question 2 donne l'équation
$$\frac{\partial(H\overline{T})}{\partial t} + \frac{\partial(H\overline{T}\bar{u})}{\partial x} = 0. \tag{1}$$
Que représente $\overline{T}$?
5. On considère le système formé des équations de Saint-Venant de la question 3 et de l'équation (1). Quelles sont les valeurs propres de ce système ? Les invariants de Riemann ?
6. On suppose maintenant que le traceur présent dans le fluide n'est pas seulement advecté mais aussi diffusé. Quelle équation gouverne alors $T(x,z,t)$?
7. On fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de flux de traceur au fond et à la surface de l'écoulement, comment s'écrivent les conditions aux limites associées à l'équation d'advection-diffusion obtenue à la question 6.
8. Montrer que, en faisant toujours une hypothèse de type « shallow water », l'intégration selon l'axe z de l'équation obtenue à la question 6 donne l'équation
$$\frac{\partial(H\overline{T})}{\partial t} + \frac{\partial(H\overline{T}\bar{u})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu H \frac{\partial \overline{T}}{\partial x}\right). \tag{2}$$

Partie 2

9. Proposer un schéma numérique pour la résolution des équations de Saint-Venant de la question 3. Ce schéma préserve-t-il la positivité de la hauteur d'eau ?
10. Construire un schéma numérique pour la résolution de l'équation (1).

11. On note $\overline{T}_i^n$ l'approximation numérique de $\overline{T}(x_i,t^n)$ obtenue avec le schéma proposé à la question 10. Votre schéma numérique guarantit-il la positivité de la concentration c'est-à-dire
$$T_i^n \geq 0, \quad \forall i,n$$
dès que $T_i^0 \geq 0$, $\forall i$? Justifier votre réponse.

12. Suite à la question 9, on dispose d'une discrétisation de l'équation de conservation de la masse du système de Saint-Venant sous la forme
$$H_i^{n+1} = H_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x_i}\left(\mathscr{F}_{h,i+1/2}^n - \mathscr{F}_{h,i-1/2}^n\right),$$
où $\mathscr{F}_{h,i+1/2}^n$ est le flux de masse à l'interface $i+1/2$.
On propose de discrétiser (1) sous la forme
$$H_i^{n+1}T_i^{n+1} = H_i^n T_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x_i}\left(\mathscr{F}_{h,i+1/2}^n T_{i+1/2}^n - \mathscr{F}_{h,i-1/2}^n T_{i-1/2}^n\right),$$
avec la définition
$$T_{i+1/2}^n = \begin{cases} T_i^n & \text{si } \mathscr{F}_{h,i+1/2}^n \geq 0 \\ T_{i+1}^n & \text{sinon} \end{cases} \tag{3}$$
A quoi correspond la définition (3) ? Quel sens physique peut-on lui donner ?

13. Montrer que le schéma proposé à la question précédente permet d'assurer (sous une condition de stabilité de type CFL) la positivité de la concentration en traceur.
Remarque Si nécessaire, on pourra supposer que la hauteur d'eau vérifie $H_i^n \geq H_0 > 0$, $\forall i,n$.

14. Dans le cas où l'on a choisi le flux cinétique comme expression pour $\mathscr{F}_{h,i+1/2}^n$, comment s'écrit la condition de CFL obtenue à la question précédente et assurant la positivité de la concentration en traceur ?

15. Pour le schéma proposé à la question précédente, la relation
$$\overline{T}_i^{n+1} \leq \max\{\overline{T}_{i-1}^n, \overline{T}_i^n, \overline{T}_{i+1}^n\}, \quad \forall i,n \tag{4}$$
est-elle vérifiée ?
La relation (4) s'appelle principe du maximum discret. Cette relation traduit le fait que pour un fluide incompressible, on ne peut pas avoir de phénomène de concentration du traceur.

16. Construire maintenant un schéma numérique pour la résolution de l'équation (2). Sous quelle condition votre schéma numérique guarantit-il la positivité de la concentration ?

Partie 3

17. Dans le but d'approcher numériquement les solutions du système de Saint-Venant, on introduit le système de relaxation suivant
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}M = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial m}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{M^2}{\bar{H}} + \dfrac{g}{2}\bar{H}^2\right) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial M}{\partial t} + (-\widetilde{u}^2 + g\widetilde{H})\dfrac{\partial}{\partial x}\bar{H} + 2\widetilde{u}\dfrac{\partial}{\partial x}M = \dfrac{(m-M)}{\tau} \end{cases} \tag{5}$$
où $\widetilde{H}, \widetilde{u}$ sont des états constants. Expliquer le rôle des quantités M, τ. Écrire la partie sans le terme source du système (5) sous la forme $\partial_t V + A(V)\partial_x V = 0$, en précisant la matrice A, calculer ses valeurs propres, donner la nature des champs caractéristiques, les invariants de Riemann.
Donner les grandes lignes permettant de construire le schéma de relaxation.