M2 mathématiques de la modélisation

Examen du mardi 18 avril 2017 (durée 2h)

16 mars 2020

Modèles hyperboliques d'écoulements complexes dans le domaine de l'énergie

E. Godlewski & J. Sainte-Marie

Avertissement
Les notes manuscrites ainsi que les polycopiés imprimés sont autorisés (pas les tablettes, smartphones, ordinateurs...)

Exercice 1

1. Rappeler les équations de Saint-Venant en dimension 1 d'espace. Quel est le domaine de validité de ce modèle ?
2. On considère le système de Saint-Venant avec topographie $z_b(x)$ mais sans friction ni viscosité. Quelles sont les valeurs propres de ce système ?

   Écrire le système de Saint-Venant sous la forme
   $$\frac{\partial X}{\partial t} + B(X)\frac{\partial X}{\partial x} = 0, \tag{1}$$
   avec, en suivant les notations du cours, $X = (H, H\bar{u}, z_b)^T$. Donner les valeurs propres du système (1), les vecteurs propres associés et les invariants de Riemann.
3. On suppose maintenant que la topographie évolue selon une équation d'onde c'est-à-dire
   $$\frac{\partial^2 z_b}{\partial t^2} - c_b^2 \frac{\partial^2 z_b}{\partial x^2} = 0, \tag{2}$$
   où $c_b = cste$. Montrer que l'équation (2) se déduit d'un système de la forme
   $$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial F_b(Y)}{\partial x} = 0, \tag{3}$$
   avec $Y = (z_b, m)^T$. On précisera m et $F_b(Y)$.
4. On considère un fluide représenté par le système de Saint-Venant et s'écoulant sur une topographie gouvernée par une équation d'onde. Ecrire les équations de modèle (on négligera l'effet du poids de l'eau sur la topographie). On écrit les équations sous une forme analogue à celle du système (1). Quelles sont les valeurs propres du système obtenu ?
5. *Question difficile* Comment est modifié le système obtenu à la question précédente si on ne néglige plus l'effet du poids de l'eau sur la topographie.

Exercice 2

On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (c(x)u)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \tag{4}$$

où $u = u(x,t)$ est la quantité inconnue, $c = c(x)$ une vitesse donnée et $\mu = \mu(x)$ une viscosité donnée.
L'objet de l'exercice est de proposer un schéma numérique pour la résolution de cette EDP sur le domaine $x \in [0,1]$ et $t \in [0,T]$. On complètera alors l'équation (4) par la condition initiale

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{5}$$

et par les conditions aux limites

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0, \quad \text{et} \quad u(0,t) = 0. \tag{6}$$

On commence par étudier l'équation d'énergie associée dans différents cas.

1. Dans le cas $c(x) = c_0 = cste$, quelle est l'équation d'énergie de l'équation (4) ? Quel signe doit avoir μ pour que le modèle soit physiquement admissible ?
2. On suppose $c = c(x) = 0$. Pourquoi l'équation
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$
n'a pas de sens physique lorsque $\mu(x) \neq cste$?
3. On suppose $\mu(x) = 0$ dans l'équation (4). En supposant la solution suffisament régulière, à quelle condition sur la fonction $c(x)$, l'équation
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (c(x)u)}{\partial x} = 0,$$
admet-elle une équation de dissipation de l'énergie ?
4. Ecrire un schéma numérique pour l'équation (4) avec $\mu(x) = \mu_0 = cste$ et $c = c(x) = 0$, munie des conditions (5),(6). On suppose $u_0(x) \geq 0$, $\forall x$, à quelle condition la solution calculée par votre schéma numérique reste-t-elle positive au cours du temps ?
5. On considère maintenant l'équation (4) avec $\mu(x) = 0$ et $c = c_0 = cste$. Réfléchir aux conditions limites que l'on peut imposer. Proposer une discrétisation (explicite en temps de type volumes finis décentrée) pour l'équation obtenue. Sous quelle(s) conditions(s) cette discrétisation est-elle stable ?
6. On considère toujours l'équation (4) mais avec $\mu(x) = 0$ et $c = c(x)$ où $c(x)$ est une fonction quelconque. Proposer une discrétisation (explicite en temps) pour l'équation obtenue. Sous quelle(s) conditions(s) cette discrétisation est-elle stable ?
7. Pour finir, on considère l'équation (4) mais avec $\mu = \mu_0 \geq 0$ et $c = c(x)$ est une fonction donnée. Proposer une discrétisation (explicite en temps) pour cette équation. Sous quelle(s) conditions(s) cette discrétisation est-elle stable ?

   Si on suppose $c = c_0 = cste$, sous quelle(s) conditions(s) cette discrétisation satisfait-elle un principe du maximum discret ?