Examen

E. Godlewski & J. Sainte-Marie

16 mars 2020

Avertissement
Les notes manuscrites ainsi que les polycopiés sont autorisés.

Exercice 1

On considère un canal 1d de longueur L avec une topographie donnée par la fonction $z_b(x)$. La hauteur d'eau est $H(x,t)$, la surface libre est donnée par $\eta = H + z_b$ et la vitesse (moyennée sur la verticale) est donnée par

$$\bar{u}(x,t) = \frac{1}{H}\int_{z_b}^{\eta} u(x,z,t)\, dz,$$

où u est la composante selon l'axe Ox de la vitesse du fluide, voir Fig. 1.
On note $H_0 = H_0(x) = -z_b(x)$. On fait l'hypothèse que la fonction $x \mapsto z_b(x)$ est une fonction régulière et que $H_0(x) > 0$.
On suppose dans tout l'exercice que les hypothèses dites de "Shallow Water" sont valables. La pression atmosphérique est supposée constante $p^a = 0$.

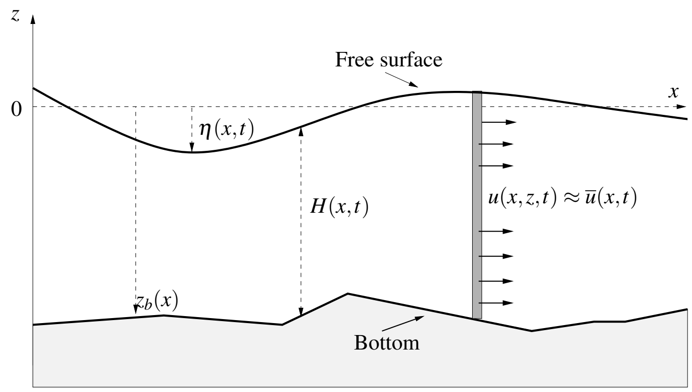

FIGURE 1 – Notations

1. Rappeler les équations de Saint-Venant.
2. Montrer que lorsque $\eta \approx 0$ on a $H \approx H_0$ et que donc
$$\frac{g}{2}\frac{\partial H^2}{\partial x} + gH\frac{\partial z_b}{\partial x} \approx gH_0\frac{\partial \eta}{\partial x}.$$
3. On définit le nombre de Froude par
$$Fr = \frac{\overline{u}}{gH}.$$
A quelle situation correspond le cas $Fr \ll 1$? le cas $Fr \gg 1$?

4. En utilisant les 2 questions précédentes, dans quelle(s) circonstance(s) le système de Saint-Venant peut-il être approché par le système

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (H\bar{u})}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial (H\bar{u})}{\partial t} + gH_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

5. On réécrit le système (1)-(2) sous la forme

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + gH_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \tag{4}$$

   Le système (3)-(4) est-il hyperbolique ?

6. Lorsqu'on suppose H_0 constante, calculer les invariants de Riemann du système (3)-(4) et donner les équations (EDP) qu'ils vérifient. En déeduire dans ce cas l'expression générale de la solution de (3)-(4).

7. Le système (3)-(4) peut-il admettre des solutions discontinues stationnaires ? discontinues instationnaires ?

8. Pour les solutions régulières, quelle égalité d'énergie satisfait le système (3)-(4) ?

9. On réécrit le système (3)-(4) sous la forme

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + gH_0 \frac{\partial H}{\partial x} = -gH_0 \frac{\partial z_b}{\partial x}. \tag{6}$$

   Proposer un schéma numérique, explicite en temps, pour la résolution du système (5)-(6) ?

10. Quelle(s) propriété(s) et quelles condition(s) de stabilité peut-on demander à un schéma approchant les solutions du système (5)-(6) ?

    Ces conditions sont-elles satisfaites par votre schéma ?

11. On suppose H_0 constant et on considère pour approcher le système (3)-(4) le schéma résultant du schéma décentré pour les équations des invariants de Riemann du système (3)-(4), avec une discrétisation adéquate du terme source. Ecrire le schéma obtenu pour les variables H,q. Est-ce que le schéma préserve exactement les états d'equilibre du système (3)-(4) ?

    Comment peut on fabriquer un schéma qui respecte exactement les états d'équilibre ?