Examen

E. Godlewski & J. Sainte-Marie

16 mars 2020

Avertissement

Les trois exercices proposés sont indépendants les uns des autres.
Les notes manuscrites ainsi que les polycopiés sont autorisés.

Exercice 1 - Equations de Saint-Venant avec de la pluie

On considère un canal 1d de longueur L avec une topographie donnée par la fonction $z_b(x)$. La hauteur d'eau est $H(x,t)$, la surface libre est donnée par $\eta = H + z_b$ et la vitesse (moyennée sur la verticale) est donnée par

$$\bar{u}(x,t) = \frac{1}{H}\int_{z_b}^{\eta} u(x,z,t)\, dz,$$

où u est la composante selon l'axe Ox de la vitesse du fluide, voir Fig. 1.
On suppose dans tout l'exercice que les hypothèses dites de "Shallow Water" sont valables. La pression atmosphérique est supposée constante $p^a = 0$.

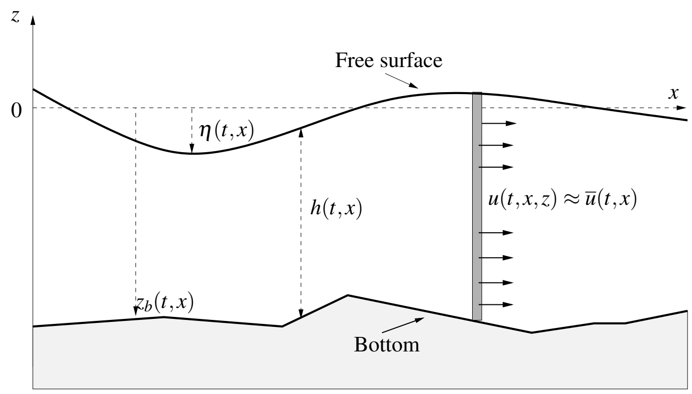

FIGURE 1 – Notations

On part des équations de Navier-Stokes incompressible et hydrostatique – avec une expression simplifiée des termes visqueux – écrites sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g. \tag{3}$$

On suppose qu'il pleut sur le canal. Soit $P = P(x,t)$ la quantité de pluie qui tombe au point d'abscisse x sur la surface libre, P est homogène à une vitesse. L'apport d'eau par la pluie va modifier la condition cinématique à la surface libre.

1. Quelle est la condition cinématique au fond ?

2. Comment est modifiée la condition cinématique de surface libre pour tenir compte de la pluie ?
3. On suppose au fond du canal, une loi de frottement de type Navier. Comment s'écrit la condition dynamique au fond ?
4. Comment s'écrit la condition dynamique de surface libre ?
5. On suppose que la pluie ne tombe pas verticalement mais de façon oblique avec une vitesse horizontale v_P. En supposant [1] $u = \bar{u} + \mathcal{O}(\varepsilon)$, obtenir les équations de Saint-Venant tenant compte de l'influence de la pluie à partir de (1)-(3). On se limitera à une approximation en $\mathcal{O}(\varepsilon)$ des équations de Navier-Stokes.

Exercice 2 - Equation d'advection diffusion

On part des équations de Saint-Venant écrites sous la forme

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H\bar{u}}{\partial x} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial H\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(H\bar{u}^2 + \frac{g}{2}H^2\Big) = -gH\frac{\partial z_b}{\partial x} - CH\bar{u}. \tag{5}$$

où la quantité

$$S_f = CH\bar{u},$$

vient de la prise en compte du frottement au fond du canal.

1. On suppose que l'on est dans la situation suivante :
   - $\bar{u} \approx u_0(x)$,
   - $u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \approx 0$,
   - $\frac{\partial z_b}{\partial x} = I = cste$.

   Montrer que, dans une telle situation, les équations de Saint-Venant se ramènent à

   $$\frac{\partial H}{\partial t} + c_0 \frac{\partial H}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2}, \tag{6}$$

   où c_0 et μ_0 sont des coefficients que l'on déterminera.
2. On suppose maintenant que la hauteur d'eau H peut s'écrire sous la forme

   $$H = h_0 + \varepsilon h + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

   avec $h_0 = cste$ et $h = h(x,t)$. Montrer que l'équation (6) peut alors – à des termes en $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ près – s'écrire sous la forme

   $$\frac{\partial h}{\partial t} + c_1 \frac{\partial h}{\partial x} = \mu_1 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \tag{7}$$

   où c_1 et μ_1 sont des coefficients que l'on déterminera.

   A noter que l'équation (7) est souvent utilisée dans la pratique pour décrire la propagation des ondes de crues.
3. Quelle est la signification physique des trois termes de l'équation (7) ?

Les questions suivantes sont plus ouvertes, il peut exister plusieurs réponses.

1. ε est le petit paramètre intervenant classiquement dans la dérivation des équations de Saint-Venant.

4. Proposer un schéma numérique pour la résolution de l'équation (7). On choisira un schéma explicite pour la partie hyperbolique et un schéma implicite pour les autres termes. Quelle est la condition de CFL de ce schéma ?
5. Proposer un schéma numérique totalement explicite pour la résolution de l'équation (7). Quelle est la condition de CFL de ce schéma ?
6. Quelle(s) condition(s) aux limites peut-on imposer pour la résolution de l'équation (7) ?

Exercice 3

On part de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{8}$$

où $u = u(x,t)$ et $c = cste$ sont deux vitesses, $\mu = cste$ est un coefficient de viscosité.

1. Quelle équation d'énergie satisfait l'équation (8) ?
2. On considère que l'écoulement décrit par le modèle (8) a lieu dans un canal fermé à chaque extrémité i.e. $u = 0$ à chaque bord et on suppose $\mu = 0$. Pourquoi peut-on dire que l'énergie totale du fluide se conserve dans le canal au cours du temps ?
3. On considère une version modifiée de l'équation (8) sous la forme ($\mu \neq 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \kappa_1(1+\kappa_2 u)u. \tag{9}$$

   A quelle condition sur κ_1 et κ_2 le terme

$$\kappa_1(1+\kappa_2 u)u,$$

   va correspondre à une force de frottement ?
4. On considère maintenant le système

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \kappa_3(u-v), \tag{10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \kappa_4(u-v), \tag{11}$$

   où $v = v(x,t)$ est également une vitesse.
   A quelle condition sur κ_3 et κ_4 les termes

$$\kappa_3(u-v), \qquad \kappa_4(u-v),$$

   vont-ils correspondre à des forces de frottement.
5. Calculer l'équation d'énergie de (10) et (11).
6. En considérant le bilan d'énergie du système couplé (10)-(11), quelle condition doit-on imposer sur κ_3 et κ_4 ?