

Réduction de modèle pour les systèmes hyperboliques et la simulation d'avalanches

On peut dans de nombreux cas accélérer la résolution numérique de problèmes en prenant en compte des informations connues a priori sur la solution. C'est l'objet des méthodes dites de réduction de modèle, qui réduisent l'espace de calcul à des domaines de faible dimension. Mathématiquement, ces méthodes reposent sur une dimension de Kolmogorov faible de l'ensemble de solutions obtenu lorsque les paramètres du modèle considéré varient : cette dimension mesure en effet la qualité de l'approximation de cet ensemble par un espace vectoriel de dimension finie choisi de manière optimale.

Pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles hyperboliques, la dimension de Kolmogorov est connue pour être très grande, rendant les approches classiques inefficaces. Le défi consiste donc à rechercher de nouveaux outils et représentations permettant des paramétrisations de petites dimensions des solutions du problème étudié.

L'objet de ce stage est d'attaquer cette question au travers d'un problème très concret issu de la géophysique, la simulation d'avalanche. Dans le contexte d'évaluation des conséquences d'un glissement de terrain majeur sur un site donné, il faut calculer les écoulements résultants de divers choix de paramètres. La topographie du site étant complexe, il est important de pouvoir faire des évaluations rapides.

Il s'agira dans un premier temps d'étudier les possibilités d'approximations en petite dimension des représentations du phénomène. Un modèle central pour les écoulements d'avalanche est le modèle de Saint Venant

$$\begin{aligned}\partial_t h + \partial_x(hu) &= 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) &= -\mu h \operatorname{sgn} u,\end{aligned}\tag{1}$$

où h est l'épaisseur et u la vitesse, g est la constante de gravitation et μ un coefficient de friction. Pour évaluer la dimension de Kolmogorov de l'ensemble des solutions associée à un éventail de paramètres k_i , il faudra calculer les valeurs propres de la matrice de Gram

$$\langle U_{k_i}, U_{k_j} \rangle_{ij},\tag{2}$$

où $\langle \cdot \rangle$ désigne un produit scalaire et U la solution. On comparera en particulier la réduction des représentations eulerienne (1) et lagrangienne associée. À terme, l'objectif est de d'implémenter des algorithmes au niveau d'un code existant, SHALTOP, qui résout un modèle basé sur les équations de Saint Venant.

Contact : Jacques Sainte-Marie, Laboratoire Jacques-Louis Lions.

Réalisation du stage : printemps 2018.

Bibliographie :

- Sur les bases réduites :

https://www.ceremade.dauphine.fr/~mula/docs/2016_summer_school/day_1_lecture_RBM.pdf

<http://www.ians.uni-stuttgart.de/am/Haasdonk/data/oberwolfach2014/RBtutorial.pdf>

- Sur les modèles d'avalanche :

Numerical simulation of the 30–45 ka debris avalanche flow of Montagne Pelée volcano, Martinique : from volcano flank collapse to submarine emplacement, M. Brunet, L. Moretti, A. Le Friant, A. Mangeney, E.D. Fernandez-Nieto, F. Bouchut, *Natural Hazards* 87, 1189-1222, 2017.

- Sur la réduction de modèle pour les systèmes hyperboliques :

Robust model reduction by L1-norm minimization and approximation via dictionaries : application to linear and nonlinear hyperbolic Problems, R. Abgrall, D. Amsallem, <https://arxiv.org/abs/1506.06178>